

# ZENTRALBLATT FÜR MATHEMATIK

72. Band, Heft 2

10. Oktober 1958

S. 241—480

## Allgemeines. Didaktik. Bibliographisches.

• Macintyre, Sheila and Edith Witte: German-english mathematical vocabulary. With a grammatical sketch by Lilius W. Brebner. (University mathematical texts.) Edinburgh and London: Oliver and Boyd; New York: Interscience Publishers, Inc. 1956. XI, 95 p. 8 s. 6 d. net.

Es ist das Ziel dieses Büchleins, englisch sprechenden Mathematikern das Lesen von deutschen Texten zu erleichtern. Es enthält etwa 2500 Wörter und einen grammatikalischen Anhang. Für deutschsprechende Mathematiker, die einen englischen Text verfassen wollen, ist die Darstellung, wie Verf. selbst betont, kaum ausreichend. Die Vokabeln werden nicht übersetzt und nicht erläutert. Verf. selbst weist darauf hin, daß dieses Verfahren nicht ganz befriedigend sein kann, weil der Gebrauch mathematischer Ausdrücke oft nicht einmal innerhalb einzelner Teilgebiete der Mathematik ganz einheitlich ist. — Es werden die wesentlichsten mathematischen Zweige erfaßt, ausgenommen angewandte Mathematik, Statistik und mathematische Logik.

• Atti del quinto congresso dell'Unione Matematica Italiana. Tenuto a Pavia-Torino nei giorni 6-9 ottobre 1955. Roma: Edizioni Cremonese 1956. 386 p. L. 3 500 —

Der Band enthält: Die Ansprachen (Discorsi) zur Eröffnung und zum Schluß des Kongresses; den vollständigen Text von neun größeren Vorträgen (Conferenze); kurze Referate von mehr als 100 Sektionsvorträgen (Comunicazioni), deren Inhalt fast ausnahmslos an anderer Stelle ausführlich veröffentlicht wird. In diesem Zbl. werden nur die Conferenze einzeln angezeigt werden.

• Poincaré, Henri: Œuvres de Henri Poincaré. Tome XI. Mémoires divers. Hommages à Henri Poincaré. Livre du centenaire de la naissance d'Henri Poincaré (1854—1954). Publié par Gérard Petiau. Paris: Gauthier-Villars 1956. 304 p.

Kurepa, G.: The role of mathematics and mathematician at present time. Proc. internat. Congr. Math. 1954 Amsterdam 3, 305—317 (1956).

Behnke, Heinrich: Der Strukturwandel der Mathematik in der ersten Hälfte des 20. Jahrhunderts. Arbeitsgemeinschaft Forsch. Nordrhein-Westfalen 27, 7—40, Diskussion 41—58 (1956).

Verf. beschreibt an der Entwicklung des Begriffes der Geometrie den Zug zur Verallgemeinerung und Algebraisierung, der in den letzten Dezennien die Mathematik beherrscht. Daran anschließend wird in durchsichtiger Weise das Programm und der Aufbau der Mathematik nach N. Bourbaki besprochen. Verknüpft mit diesen Betrachtungen ist eine Reihe von Bemerkungen über didaktische Probleme, z. B. über die Frage: wie soll man an der Schule und z. T. auch an der Universität einen Lehrgang der Mathematik mit der Theorie abstrakter Strukturen („Mutterstrukturen“ im Sinne von Bourbaki) beginnen, ohne das Vertrauen in die Sinnhaftigkeit dieser Theorien für die später zu behandelnden speziellen Theorien (z. B. Infinitesimalrechnung) bei den Hörern zu überbeanspruchen? Eine der hier auftauchenden Schwierigkeiten ist wohl die, daß einerseits die Mutterstrukturen „elementar“ in ihrem Aufbau sind, nicht aber in ihrer anschaulichen Bedeutung, während das z. B. bei der Infinitesimalrechnung im wesentlichen umgekehrt der Fall ist. — Der Vortrag des Verf. wird durch eine Reihe von Diskussionsbemerkungen ergänzt.

G. H. Müller.

Nachbin, Leopoldo: Überblick über die neuere Entwicklung der Mathematik in Brasilien. Soc. Paranaense Mat., Anuário 3, 28—41 (1956) [Portugiesisch].

• Weyl, F. J.: Report on a survey of training and research in applied mathematics in the United States. (Monographs of the Society for Industrial and Applied Mathematics. Nr. 1.) Philadelphia: Published by the Society for Industrial and Applied Mathematics 1956. VI, 58 p.



Verf. legt einen umfassenden Bericht ab über Sinn, Zweck, Bedeutung und Entwicklung der Angewandten Mathematik in den Vereinigten Staaten. Zahlreiche Hinweise über das Interesse, welches diesem Zweig der Mathematik in Wissenschaft, Industrie und Wirtschaft zukommt, sind im Bericht enthalten. Eine besondere Bedeutung nimmt heute das Linear Programming ein, das in verschiedenen wirtschaftlichen, militärischen u. a. Gebieten erfolgreich angewendet wird. Eine Schlußbetrachtung befaßt sich mit Ausbildungsmöglichkeiten der angewandten Mathematiker und gibt eine Zusammenstellung der großen Zentren und Institute der angewandten Mathematik in den USA.

H. P. Künzi.

**South Asian Conference on Mathematical Education. Bombay, 22–28 February 1956.** Math. Student 24, 23–168 (1956).

Der vorliegende Bericht vermittelt eine Übersicht zu der im Tata Institute of Fundamental Research (Bombay) vom 22.–28. Februar 1956 stattgefundenen Konferenz über mathematische Erziehungsfragen. Über 70 Vertreter aus 20 verschiedenen Ländern beteiligten sich an dieser, vorwiegend der mathematischen Didaktik gewidmeten Tagung. Parallel zu den Vorträgen fanden auch Diskussionen in kleinen Gruppen statt. Die 12 Hauptreferate waren den folgenden Themen gewidmet: Mathematical instruction in Italy (E. Bompiani, Rom). Present-day problems in English mathematical education (T. A. A. Broadbent, London). — Typography and the teaching of mathematics (T. A. A. Broadbent, London). — Teaching in secondary schools and research (G. Choquet, Paris). — Initiation into geometry (H. Freudenthal, Utrecht). — The problems which face mathematicians in Singapore and the Federation of Malaya (A. Oppenheim, Singapore). — Some crucial problems of mathematical instruction (M. H. Stone, Chicago). — On mathematical education in the USSR (A. D. Aleksandrov, Leningrad). — New material and a new method for teaching elementary calculations in primary schools (G. Choquet, Paris). — Information on mathematical education in Poland (E. Marczewski, Wrocław). — On mathematical education in Chinese universities (H. F. Tuan, Peking). — Die vier letzten Beiträge erfolgten auf Einladung des Organisationskomitees.

H. P. Künzi.

**Piène, Karl: School mathematics for universities and for life.** Proc. internat. Congr. Math. 1954 Amsterdam 3, 318–335 (1956).

**Daltry, C. T.: Self-education by children in mathematics using Gestalt methods — i. e. learning-through-insight.** Proc. internat. Congr. Math. 1954 Amsterdam 3, 297–304 (1956).

• **Freund, John E.: A modern introduction to mathematics.** (Prentice-Hall Mathematics Series.) Englewood Cliffs, N. J.: Prentice-Hall, Inc. 1956. XVI, 543 p. \$ 6,25.

Verf. ist es gelungen, ein Mathematikwerk zu schaffen, das sich von seinen Vorgängern in verschiedenen Punkten unterscheidet. Es enthält einen Überblick, der von der elementaren Mathematik (reelle Zahlen, Bruchrechnen, u. a. m.) über die Differential- und Integralrechnung bis zu logistischen Auseinandersetzungen reicht. Der Text liest sich leicht und ist eher unterhaltend gestaltet. Das Werk gehört vielleicht mehr in die Hand des Lehrers, als in diejenige des Schülers. Aus dem vielseitigen Inhalt entnehmen wir noch die folgenden Kapitelüberschriften: Introduction, Definitions, Natural Numbers, Number Theory, Further Properties of Natural Numbers, Numbers and Symbols, Integers, Number Scales, Fractions, Decimal and other Fractions, Real Numbers, Progressions, Linear Equations and Applications, Complex Numbers and quadratic Equations, Elementary Mathematical Systems, Algebra and Geometry, Analytic Geometry, Graphs and Functions, Trigonometry, Calculus, Modern Geometry, Transfinite Numbers, Logic, Probability and Statistics, Mathematical Thinking.

H. P. Künzi.



## Geschichte.

● Newman, James R.: The world of mathematics. A small library of the literature of mathematics from A'h-mosé the Scribe to Albert Einstein. 4 vol. New York: Simon and Schuster 1956. XVIII, 2537 p. \$ 20,00.

Berriman, A. E.: The Babylonian quadratic equation. Math. Gaz. 40, 185—192 (1956).

An Hand von einem Dutzend Aufgaben aus altbabylonischen Texten referiert der Verf. über die in ihnen verwendeten Methoden zur Lösung quadratischer Gleichungen. Bei nur einer Unbekannten (und gelegentlich auch, wenn in Aufgaben mit zwei Unbekannten die eine eliminiert wird) verwenden die Babylonier die späteren arabischen Formen  $ax^2 \pm bx = c$ . In den meisten Fällen mit zwei Unbekannten — und das wurde vielleicht zu wenig betont — liegen Normalformen vor oder sie werden vom Rechner durch geschickte Umwandlungen erreicht. Es sind dies die 6 Normalformen: (I und II)  $x \pm y = a$ ;  $xy = b$ ; (III und IV)  $x \pm y = a$ ;  $x^2 + y^2 = b$ ; (V und VI)  $x \pm y = a$ ;  $x^2 - y^2 = b$ . Die Normalform I  $x + y = a$ ;  $xy = b$  ist mit der dritten arabischen Form  $ax^2 + c = bx$  identisch. Diese wird von den Babyloniern vermieden (s. dagegen S. 186). Ihre Lösung geschieht dadurch, daß aus  $\frac{1}{2}(x + y)$  mittels der Identität  $[\frac{1}{2}(x - y)]^2 = [\frac{1}{2}(x + y)]^2 - xy$  das  $\frac{1}{2}(x - y)$  berechnet wird. Summe und Differenz von  $\frac{1}{2}(x + y)$  und  $\frac{1}{2}(x - y)$  geben dann sofort  $x$  und  $y$ . Dieser Zusammenhang tritt deutlich in der griechischen geometrischen Algebra [beim Verf. ist  $\frac{1}{2}(x + y) = p$ ,  $\frac{1}{2}(x - y) = q$ ] zutage. So ist auch die Aufgabe BM 85194,25 wohl nicht, wie Verf. meint, nach der dritten arabischen Form  $x^2 + 8100 = 225x$  gelöst, sondern es liegen die Gleichungen I)  $x_1 + y = 225$ ; II)  $x_1 \cdot y = 8100$  zugrunde, bzw. ursprünglich I)  $36x + 8y = 1800$ ; II)  $xy = 1800$ , ( $x_1 = 4\frac{1}{2} \cdot x$ ). Auch S. Gandz hat diese Zusammenhänge ausführlich (dies. Zbl. 18, 195) dargelegt. — Das letzte, diesmal lineare Problem VAT 8389,1 läßt sich auch ohne Gleichungen durch Raisonement lösen; s. hierzu z. B. van der Waerden, Erwachende Wissenschaft (dies. Zbl. 70, 241) S. 107f.

K. Vogel.

Shimomura, Torataro: Die Bildung der Mathematik in der Polis. Eine Idee zur metaphysischen Genealogie der Mathematik als Mathesis Universalis. Ann. Japan Assoc. Philos. Sci. 1, 1—31 (1956).

Eine geschichtlich-philosophische Studie zur Bildung der griechischen Mathematik. Als ihr entscheidendes Moment wird das Beweisen als seiner selbst bewußtes Denken angesehen und die griechische Art des Beweisens aus der Art des griechischen Denkens erklärt, das stets ein „öffentliches“ Denken und stets ein Sprechen war. Die Besonderheiten des mathematischen Denkens werden in den einzelnen mathematischen Disziplinen Musik, Astronomie, Geometrie, Arithmetik untersucht.

H. Gericke.

Waerden, B. L. van der: Tables for the Egyptian and Alexandrian calendar. Isis 47, 387—390 (1956).

Verf. gibt einfach zu handhabende Regeln, mit denen man ein nach der ägyptischen Zeitrechnung gegebenes Datum in das entsprechende des Alexandrinischen Kalenders und ein alexandrinisches Datum in das entsprechende des Julianischen Kalenders überführen kann.

K. Vogel.

Milankovitch, M.: Aristarchos und Appollonios. Das heliozentrische und das geozentrische Weltsystem des klassischen Altertums. Acad. Serbe Sci., Publ. Inst. math. 9, 79—92 (1956).

Nach einer Übersicht über das Wenige, was von Aristarchos von Samos überliefert ist, befaßt sich Verf. mit der Frage, warum das von Aristarchos vertretene heliozentrische Weltbild sich in der Antike nicht durchsetzen konnte. Er zeigt, daß es nur einiger geometrischer und kinematischer Überlegungen bedarf, um von dem



heliocentrischen Modell, bei welchem die Planeten in verschiedenen Abständen um die Sonne kreisen, zum geozentrischen Epizykelmodell des Apollonios von Perge überzugehen. Auch der Satz des Apollonios über die Stillstände der Planeten (Almagest XII, 1) läßt sich aus dieser Transformation leicht ableiten (vgl. hierzu O. Neugebauer, dies. Zbl. 66, 4). Verf. schließt daraus, daß Apollonios seine Epizykeltheorie auf der Grundlage des heliocentrischen Weltbildes des Aristarchos entwickelt hat. Da so die vollkommene Äquivalenz des geozentrischen und des heliocentrischen Weltbildes erwiesen war, konnten die späteren Astronomen das aus dogmatischen Gründen näherliegende geozentrische Modell unter entsprechender Verfeinerung der Epizykeltheorie beibehalten, während die Leistung des Aristarchos fast völlig in Vergessenheit geriet: „Aus der heliocentrischen Lehre des Aristarchos entstanden, hat die Epizykeltheorie, als sie groß geworden, ihre eigene Mutter verneint und abgestoßen“.

H. Hermelink.

Kennedy, E. S.: Parallax theory in islamic astronomy. Isis 47, 33—53 (1956).

Bei der Finsternißberechnung muß der von der Sonnenhöhe abhängende Unterschied zwischen Mond- und Sonnenparallaxe in seine himmlischen Längen- und Breitenkomponenten zerlegt werden. Zur Lösung dieser Aufgabe der sphärischen Trigonometrie sind in den islamischen astronomischen Werken verschiedene Tafeln und Berechnungsmethoden angegeben, die vom Verf. untersucht werden. Wie auch sonst ist hierbei eine eigentümliche Durchdringung indischer und griechischer Methoden zu beobachten. Die ältesten Tafeln bevorzugen ähnliche Näherungsverfahren, wie sie im Sûrya-Siddhânta gelehrt werden. Hierbei wird mit trigonometrischer Interpolation gearbeitet. Interessant ist die Erweiterung dieser Methode auf den Fall, daß das Maximum der darzustellenden Funktion  $f(t)$  nicht in der Mitte zwischen zwei Nullstellen liegt, durch Einführung der Transformation  $t = \theta - k \sin \theta$  (s. das folgende Referat). — Bald tauchen im Anschluß an den Almagest die exakteren Formeln der sphärischen Trigonometrie auf, wobei bemerkenswerterweise schon Ḥabaš al-Ḥâsib (ca. 850), noch ohne Kenntnis des Sinussatzes, eine strenge Lösung ohne die von Ptolemaios eingeführte Näherung gibt. Die Entwicklung erreicht ihren Höhepunkt und Abschluß mit den eleganten Formeln von al-Kâšî († 1429), die zur Berechnung der Tafeln von Ulug Beg Verwendung fanden. Im übrigen begnügte man sich meist mit den für die Praxis ausreichenden, auf Ptolemaios zurückgehenden Tafeln des Theon von Alexandria. Daß aber die alten rohen Methoden nicht ausgestorben waren, beweist eine ebenfalls von al-Kâšî überlieferte Tafel, deren Herkunft und Berechnungsmethode bisher nicht aufgeklärt werden konnten. Auch Spuren der von den Babyloniern herrührenden arithmetischen Verfahren tauchen gelegentlich auf.

H. Hermelink.

Kennedy, E. S. and W. R. Transue: A medieval iterative algorism. Amer. math. Monthly. 63, 80—83 (1956).

Periodische Funktionen, deren Verlauf nicht genau bekannt war, wurden in der antiken und mittelalterlichen Astronomie häufig durch trigonometrische Interpolation angenähert. Dieses Verfahren wird in einigen indisch beeinflussten islamischen Tafelwerken auf Funktionen  $\Phi(\theta)$  erweitert, deren Maximalwert nicht in der Mitte zwischen zwei Nullstellen für  $\theta = 0$  und  $\theta = 180^\circ$ , sondern bei  $\theta = 90^\circ - m$  liegt. Hierzu wird die Transformation  $t = \theta - m \sin \theta$  eingeführt; dann hat  $\Phi(t) = k \sin \theta(t)$  die verlangte Eigenschaft. — Ḥabaš al-Ḥâsib (ca. 850) gibt zur Ausführung dieser Transformation für ein vorgeschriebenes  $t$  eine interessante Rekursionsformel an: Man bilde die Folge

$$\theta_0(t) = t + m \sin t; \dots \theta_n(t) = t + m \sin \theta_{n-1}(t); \dots$$

( $n = 1, 2, 3, \dots$ ). Dann ist  $\Phi(t) = k \sin \lim_{n \rightarrow \infty} \theta_n(t)$ . Die Folge konvergiert schon nach wenigen Schritten mit ausreichender Genauigkeit. — Über Herkunft und Ab-



leitung dieses Iterationsverfahrens lassen sich nur Vermutungen anstellen.

*H. Hermelink.*

**Thorndike, Lynn:** Notes upon some medieval latin astronomical, astrologica and mathematical manuscripts at the Vatican. I. *Isis* 47, 391—404 (1956).

Bibliographische Angaben über einige Sammelhandschriften des späteren Mittelalters. Von besonderem mathematischem Interesse dürfte Vat. 9410 (15. oder Ende 14. Jahrh.) sein, das eine Practica geometricae demonstratae in 11 Kapiteln und weitere kurze Abhandlungen über Messungsaufgaben in der Ebene und im Raum enthält.

*H. I. Hermelink.*

**Baron, R.:** Hugonis de Sancto Victore, Practica geometriae. *Osiris* 12, 176—224 (1956).

Die von M. Curtze in den Monatsheften f. Math. u. Physik 8, 193—220 (1897) nach einer unzulänglichen Münchener Handschrift herausgegebene Practica geometriae des Hugo (1096—1141) findet sich außerdem in Cambridge, Leiden und Paris (4 HS.). Die vorliegende sehr sorgfältige Ausgabe folgt der besten und vollständigsten Fassung (Paris, Mazarine 717). Das Werk steht in Beziehung zur Gerbertschen Geometrie und ist vor allem deshalb interessant, weil es vor dem genaueren Bekanntwerden der Euklidischen Geometrie im Abendland niedergeschrieben ist.

*J. E. Hofmann.*

**Clagett, Marshall:** The „liber de motu“ of Gerard of Brussels and the origins of kinematics in the west. *Osiris* 12, 73—175 (1956).

Die aus 3 Büchern bestehende Schrift des Gerhard v. Brüssel (zwischen 1187 und 1260 entstanden) stützt sich auf lateinische Fassungen der Aristotelischen Physik, der Heronischen Mechanik, der Sphaera mota des Autolykos, der Circuli dimensio (vermutlich des Gerhard v. Cremona) und der Abhandlung De sphaera et cylindro (in der Paraphrase des Joh. de Tinemue) des Archimedes. Man kennt zwei Fassungen in 5 HS. des 13. Jh. (Oxford, Berlin, Neapel, Paris, Wien). Die Schrift — vielleicht der älteste mittelalterliche Beitrag zur Bewegungslehre — zeigt innerhalb der Traditionellen interessante selbständige Ansätze. Thomas Bradwardine zitiert Gerhard (1328) und setzt sich mit seinen Gedanken kritisch auseinander. Einleitung, Edition und sachliche Erklärung bieten sehr viel Wertvolles.

*J. E. Hofmann.*

**Cohen, I. Bernard:** Galileo's rejection of the possibility of velocity changing uniformly with respect to distance. *Isis* 47, 231—233 (1956).

Die Stelle, woselbst Galilei die Möglichkeit  $v = ks$  zurückweist (Discorsi 1638 = Opere VIII, 1898, S. 203) enthält nach Verf. keineswegs eine von früheren Interpretationen beanstandete Unklarheit, richtet sich vielmehr gegen die sog. Merton-Regel des Thomas Bradwardine (1328).

*J. E. Hofmann.*

**Cassina, Ugo:** Sulla dimostrazione di Wallis del postulato quinto di Euclide. Periodico Mat., IV. Ser. 34, 197—219 (1956).

Eingehend setzt sich Verf. kritisch vom axiomatischen Standpunkt aus mit Wallis' Beweis des Parallelenaxioms (1663) auseinander. So ersetzt er die mit dem Parallelenaxiom gleichwertige Forderung Wallis', daß zu jeder Figur eine ähnliche beliebiger Größe existiere, durch die schwächere: an jede Strecke läßt sich ein Dreieck anlegen, das die nämlichen Winkel wie das gegebene Dreieck hat. Die Behauptung, Clavius habe erst in der 3. Ausgabe (Köln 1591) der Elemente seinen Beweisversuch für das Parallelenaxiom eingefügt, ist unrichtig; dieser Zusatz zur Erstaussgabe (Rom 1574) findet sich schon in der 2. Ausgabe (Rom 1589).

*J. E. Hofmann.*

● **Alexander, H. G.** (edited with introduction and notes by): The Leibniz-Clarke correspondence together with extracts from Newton's „Principia“ and „Optics“. (Philosophical Classics.) Manchester: Manchester University Press 1956. LVI, 200 p. 16 s net.

Diese sorgfältige Ausgabe — der erste vollständige englische Wiederdruck seit dem französisch-englischen in S. Clarke's Works IV, London 1738, und von diesem



nur durch die modernisierte Rechtschrift unterschieden — wird durch eine ausgezeichnete Einleitung über die berührten Einzelfragen und deren spätere Beurteilung ergänzt. Im Anhang sind außer einschlägigen Auszügen aus Newtons Werken zusätzlich Schriftstücke Leibniz' an Conti für Newton, an Wolff und Joh. Bernoulli und die vermittelnden Briefe der Prinzessin Caroline von Wales mit Leibniz abgedruckt.

*J. E. Hofmann.*

**Dyck, Martin:** *Goethe's views on pure mathematics.* The Germanic Review, Febr. 1956, 40—69 (1956).

Aus den mit großer Sorgfalt gemachten Zusammenstellungen [ich vermisste nur einige der einschlägigen Zitate aus E. Locher, National Math. Magazine 11, 131—145 (1936)] geht im Einklang mit früheren Darstellungen wirklicher Kenner hervor, daß sich Goethe im Grundsätzlichen durchaus positiv zur Mathematik stellt. Wo er die Mathematik ablehnt, richtet er sich in erster Linie gegen die Anwendung mathematischer Methoden auf physikalische Vorgänge, die auch für uns nicht immer unproblematisch ist.

*J. E. Hofmann.*

● **Einstein, Albert:** *Lettres à Maurice Solovine.* Reproduites en facsimilé et traduites en français. Paris: Gauthier-Villars 1956. 139 p. 1800 Fr.

Die Briefe Einsteins an seinen französischen Übersetzer M. Solovine enthalten eine Fülle biographisch wertvoller persönlicher und allgemein philosophischer Äußerungen Einsteins. Darüber hinaus enthalten sie auch physik-historisch interessante Bemerkungen Einsteins zu seinen jeweiligen eigenen Forschungen sowie auch zu den Arbeiten anderer Physiker. Die wichtigsten und zahlreichsten dieser Bemerkungen beziehen sich auf die verschiedenen Ansätze zu einer einheitlichen Feldtheorie. Sie gipfeln in wiederholten Ausführungen Einsteins über die Entwicklungsphasen seiner unsymmetrischen Feldtheorie. Insbesondere äußert sich Einstein mehrmals zu zwei grundsätzlichen Problemen, die sich bei der Ausarbeitung der unsymmetrischen Feldtheorie ergeben, zu den Fragen der Kompatibilität der Feldgleichungen und der physikalischen Interpretation der Theorie. Die positive Lösung des ersteren (im wesentlichen rein mathematischen) Problems konnte Einstein dann 1951 seinem Briefpartner melden. Die Frage der physikalischen Interpretation und damit der Verifizierung der Feldgleichungen ist hingegen ja immer noch offen. *H. Treder.*

**Azpeitia, A. G.:** *Isaac Barrow.* Gac. mat., Madrid 8, 123—129 (1956) [Spanisch].

**Darmois, G.:** *Emile Borel.* Revue Inst. internat. Statist. 24, 154—156 (1956).

**Pleijel, Åke:** *Ivar Fredholm.* Nordisk mat. Tidskrift 4, 65—75 mit engl. Zusammenfassg. 119 (1956) [Schwedisch].

**Dubnov, Ja. S. and A. M. Lopšic:** *Veniamin Federovič Kagan (1869—1953).* Trudy Sem. vektor. tenzor. Analizu 10, 3—14 (1956). [Russisch].

Mit Schriftenverzeichnis.

**Ehresmann, Charles:** *Rapport sommaire sur les travaux de M. A. Liechnérovicz.* Atti V. Congr. Un. Mat. Ital. 21—26 (1956).

● **Onoranze a Mauro Picone.** La cerimonia del 15 gennaio 1956. Roma 1956. 79 p.

**Kuroš, A. G.:** *Otto Julevič Šmidt.* Nachruf. Uspechi mat. Nauk 11, Nr. 6 (72), 227—233 (1956) [Russisch].

Mit Schriftenverzeichnis.

**Alexandroff (Aleksandrov), P., A. Samarskij und A. Svešnikov:** *Andrej Nikolaevič Tichonov.* (Zum fünfzigsten Geburtstag). Uspechi mat. Nauk 11, Nr. 6 (72), 235—245 (1956) [Russisch].

Mit Schriftenverzeichnis.

**Freudenthal, Hans:** *Lebensbericht von Herman Weyl (9. November 1885—9. Dezember 1955).* Jaarboek Nederl. Akad. Wet. 1955, 8 p. (1956) [Holländisch].



## Grundlagenfragen. Philosophie. Logik.

**Mostowski, Andrzej:** Die Mathematische Logik auf dem Internationalen Mathematikerkongreß in Amsterdam. *Studia logica* 4, 245—253 (1956) [Polnisch].

**Hermes, Hans:** Über die gegenwärtige Lage der mathematischen Logik und Grundlagenforschung. *J.-Ber. Deutsch. Math.-Verein.* 59, 49—69 (1956).

Dieser zusammenfassende Bericht über einen so anspruchsvollen Gegenstand ist in seiner Art als eine hervorragende Leistung zu bewerten; er vereinigt Klarheit der Darstellung mit Zuverlässigkeit und Vollständigkeit im Wesentlichen. Eingehender besprochen werden: die semantische Grundlegung der Logik und im Zusammenhang damit die Vollständigkeit der elementaren Prädikatenlogik, die Schwierigkeiten angesichts der Logik höherer Stufen und die Skolemsche Nicht-Kategorizität, überdies der Entscheidbarkeitsbegriff und die Grundlegung der Mathematik nach Lorenzen. — Zu beanstanden finde ich nur die angebliche Zurückführung der „klassischen“ Semantik auf Bolzano. Die von Hasenjaeger gefundene Vereinfachung des Henkinschen Beweisverfahrens wurde unabhängig auch vom Ref. angegeben.

*E. W. Beth.*

**Costa, Newton Carneiro Affonso da:** Der gegenwärtige Stand der Philosophie der Mathematik. *Soc. Paranaense Mat., Anuário* 3, 17—27 mit engl. Zusammenfassg. (1956) [Portugiesisch].

**Suetuna, Zyoiti:** Über den Begriff der Totalität. *Ann. Japan Assoc. Philos. Sci.* 1, 33—40 (1956).

Zusammenfassung früher mehr ausführlich dargestellter Ergebnisse. Jeder wirklichen Erkenntnis liegt durch Tat bewirkte Anschauung zugrunde. Z. B. ist die Totalität der natürlichen Zahlen in bezug auf die Tat des Addierens als zeitlich werdend, jedoch in bezug auf die durch Tat bewirkte Anschauung als räumlich seiend zu betrachten. Diese Tatsache wird in Anlehnung an die Philosophie Nishidas eine kontradiktorische Selbst-Identität genannt. Es kommt so eine Art Synthesis zustande von dem, was P. Lorenzen bzw. als operativ und als ontologisch bezeichnet. Das lineare Kontinuum entsteht aus der durch unsere eigene Bewegung bewirkten Anschauung. Die weiteren Ausführungen des Verf. zeigen, daß eine Ausarbeitung der hier nur skizzenhaft vorgetragenen Ideen zur Grundlegung der Mathematik z. Z. schon vorliegt. Es besteht eine gewisse Ähnlichkeit mit der von Brouwer begründeten intuitionistischen Mathematik (so wird dem sehr eng gefaßten Begriff einer Menge der weitere Begriff einer Klasse zur Seite gestellt), aber es zeigen sich auch auffällige Divergenzen (so wird die Anwendung des Satzes vom ausgeschlossenen Dritten anscheinend ziemlich weitgehend gestattet).

*E. W. Beth.*

**Shepherdson, J. C.:** On the interpretation of Aristotelian syllogistic. *J. symbolic Logic* 21, 137—147 (1956).

In dem Verhältnis der Vertreter des modernen Logikkalküls zur Aristotelischen Syllogistik lassen sich drei Phasen unterscheiden: Zunächst bemühte man sich, wie bereits Boole in seinem klassischen Werk „*The Mathematical Analysis of Logic*“, die Gesetze der Aristotelischen Syllogistik herzuleiten im Rahmen der zur Verfügung stehenden Mittel der Algebra der Logik bzw. später des Prädikatenkalküls. Bald stellte man fest, daß das nicht ohne weiteres gelang für alle Gesetze, nämlich für solche, die die unbeschränkte Geltung der Subalternation voraussetzen. Viele Logistiker polemisierten deswegen gegen die angeblich fehlerhafte klassische Logik, und das Interesse an ihr erlahmte immer mehr. Indes setzte unter dem Einfluß von Łukasiewicz in Polen bereits die zweite Phase ein, die ab 1948 durch die Arbeiten von Bocheński und Ivo Thomas auch im Westen das Interesse an der Syllogistik neu entfachte: Die Aristotelischen Urteilsarten werden nicht mehr mit Mitteln des üblichen Kalküls umschrieben, sondern als zusätzliche spezielle Funktoren zusammen mit Spezialaxiomen eingeführt und aus diesen werden dann mittels be-



stimmter Axiome des Aussagenkalküls alle Gesetze der Syllogistik in streng axiomatisch-deduktiver Methode bewiesen. Die dritte Phase schließt dann gewissermaßen den Kreis, indem jetzt, wie z. B. in Menne, „Logik und Existenz“, die Syllogismusklassifikatoren klassenlogisch interpretiert werden. Die vorliegende Arbeit erhellt die Situation in ausgezeichneter Weise, indem sie zwei Arten von Axiomensystemen der Syllogistik in einen allgemeineren Rahmen stellt. Zunächst wird jeweils ein allgemeines algebraisches Axiomensystem aufgestellt, sodann dies durch Deutung seiner Funktoren auf den Klassenkalkül spezialisiert (Verf. beweist, daß das spezielle System dem allgemeinen jeweils quasi-isomorph ist und daß alle seine Systeme entscheidbar sind) und dann durch Zusatzaxiome auf einen Klassenkalkül ohne Null- bzw. Allklasse beschränkt. Ein solches System ergibt dann alle Gesetze der klassischen Syllogistik. Verf. stellt zwei verschiedene Systeme einander gegenüber. Das System  $A$  besitzt einen transitiven dyadischen Funktor, der im speziellen  $A$ -System als Inkluder, und einen monadischen Funktor, der dann als Komplementator gedeutet wird. Das Axiomensystem  $A_1$  postuliert wie die beiden folgenden Systeme Reflexivität, Transitivität und Kontraposition für den Inkluder und das Gesetz von der Aufhebung der doppelten Komplementation. Das Axiom  $A\ 5$  fordert dazu, daß die Nullklasse in jeder Klasse enthalten ist: „ $A\ a\ a' \supset A\ a\ b$ “. Während das System  $A_1$  keinerlei Existenz erfordert, wird in  $A_2$  durch Hinzufügung des Axioms  $A\ 6$  „ $\sim(A\ a\ a' \ \&\ A\ a' a)$ “ erreicht, daß Null- und Allklasse nicht zusammenfallen, also wenigstens ein Element existieren muß. Das System  $A_3$  ersetzt die Axiome  $A\ 5$  und  $A\ 6$  durch  $A\ 5'$  „ $\sim A\ a\ a'$ “ und erreicht damit die Ausschließung aller leeren und Allklassen. Dies System ist nach Verf. äquivalent den Systemen von Wedberg und Ivo Thomas und entspricht der Aristotelischen Logik. Das System  $A_4$  von Menne enthält statt  $A\ 5'$  das dazu äquivalente Axiom  $A\ 5''$  „ $A\ a\ b \supset \sim A\ a\ b'$ “, weicht aber grundsätzlich von allen bisherigen Systemen ab durch Verzicht auf die Reflexivität des  $A$ -Funktors. Verf. fragt nach den Gründen dafür. Die Antwort sei hier gegeben: 1. Die Reflexivität des  $A$ -Funktors findet sich bei Aristoteles selbst nirgends; sie wird erst von Leibniz als Theorem formuliert. Streng genommen gehört sie also nicht in ein System der Aristotelischen Logik hinein, obwohl dies durch ihre Adjungierung nicht widerspruchsvoll wird. 2. Das Reflexivitätsaxiom liefert außer sich selbst keine zusätzlichen Theoreme, noch vereinfacht es die Deduktion. 3. Der  $A$ -Funktor in der Aristotelischen Logik stellt, wie ich in „Logik und Existenz“ zeigte, eine Disjunktion aus Gleichheit und strenger Inklusion dar; während nun Transitivität und Kontraposition beiden Disjunktionsgliedern zukommen und demgemäß die entsprechenden Axiome für den  $A$ -Funktor durchaus angemessen sind, kommt die Reflexivität nur der Gleichheit, niemals aber der strengen Inklusion zu. Nun ist eine Disjunktion natürlich wahr, wenn wenigstens ein Disjunktionsglied wahr ist; aber eine wahre Disjunktion sagt nichts darüber, ob beide Glieder oder welches wahr ist und so verschleiert das Reflexivitätsaxiom für  $A$  die Tatsache, daß  $A$  nur in dem Spezialfalle der Gleichheit reflexiv ist, während es in jedem Falle transitiv und kontrapositionibel ist. Mit Recht weist Verf. allerdings darauf hin, daß man wie Popper durch Substitution von Durchschnittsklassen auch Systeme ohne Reflexivitätsaxiom trivialisieren kann. Das  $B$ -System von Verf. enthält den im speziellen System als Inkluder gedeuteten reflexiven und transitiven dyadischen  $A$ -Funktor und den entsprechend als Überschneidung gedeuteten dyadischen  $I$ -Funktor, für den im System  $B_1$  die folgenden Axiome geboten werden:  $B\ 3: A\ a\ b \ \&\ I\ a\ c \supset I\ c\ b$ ,  $B\ 4: I\ a\ b \supset I\ a\ a$ ,  $B\ 5: I\ a\ a \vee A\ a\ b$ . Da diese Axiome im leeren wie nicht-leeren Bereich gelten, erübrigt sich ein eigenes  $A_2$  entsprechendes System  $B_2$ . Werden  $B\ 4$  und  $B\ 5$  durch das Axiom  $B\ 4'$  „ $I\ a\ a$ “ ersetzt, ergibt sich das System  $B_3$ , das leere Klassen ausschließt und sämtliche Syllogismen liefert. In diesem System ist allerdings nicht die Allklasse ausgeschlossen; dazu ist nach Verf. in einem  $B$ -System Quantifikation oder Komplementation nötig. Ergänzend sei darauf hinge-



wiesen, daß in  $B_3$  sich die Kontrapositions-, Inversions- und Äquipollenzgesetze nicht darstellen lassen, weswegen meines Erachtens ein  $A$ -System angemessener zur Formalisierung der klassischen Logik ist. Verf. löst in seiner ebenso inhaltsvollen wie komprimierten Arbeit am Rande noch etliche andere Probleme, z. B. daß die Frage, ob der  $I$ -Funktorkomplex in mehrwertigen Systemen als Valenzfunktorkomplex interpretierbar sei, für Systeme mit regulärer Implikation zu verneinen ist. *A. Menne.*

● **Anderson, Alan Ross:** The formal analysis of normative systems. (Technical Report No. 2.) New Haven: Interaction Laboratory, Sociology Department, Yale University 1956. 99p.

In this report the author presents a number of new systems of modal logic which correspond to the „normative systems“ used by social scientists. After explaining the basic ideas of the 2-valued propositional calculus he defines a „normal alethic modal logic“ as a system  $X$  such that: (a) Every theorem of the 2-valued propositional calculus is a theorem of  $X$  and the rules of substitution and modus ponens (with respect to material implication) are valid in  $X$ , (b) The rule of substitutivity of material equivalence is valid in  $X$ , (c) There are definable in  $X$  functors  $M$  and  $L$  such that the formulae  $CpMp$ ,  $EMApqAMpMq$ ,  $NMKpNp$  are theorems of  $X$  and such that the formula  $CMpp$  is not a theorem of  $X$ . The functors „ $M$ “ and „ $L$ “ denote „possibility“ and „necessity“ respectively. He then discusses the formalisation of a minimal system  $X^*$  of this type. — The system  $X^*$  is extended to a system  $X^*MNS$  by adding to the primitive symbols the logical constant  $S$  and taking the formula  $MNS$  as an additional axiom. The modal functors  $P, O, F, I$  are defined by  $P\alpha =_{df} MK\alpha NS$ ,  $O\alpha =_{df} NPN\alpha$ ,  $F\alpha =_{df} NP\alpha$ ,  $I\alpha =_{df} KP\alpha PN\alpha$  and it is shown that if  $S$  is interpreted as a „sanction“ then  $P, O, F, I$  may be interpreted as „permission“, „obligation“, „forbidding“, „indifference“ respectively. It is shown that if the axiom  $MNS$  is added to those of any normal alethic modal logic then the resulting system is a normal deontic modal logic, i. e. a system which satisfies (a) and (b) and in which the formulae  $COpPp$ ,  $EPApqAPpPq$ ,  $EOpNPNp$  are theorems but  $CPpp$  and  $CpPp$  are not theorems. It is then shown that if an uninterpreted logical constant  $B$  is added to the primitive symbols of a normal alethic modal logic  $X$ , then the symbol  $S$  and the axiom  $MNS$  may be omitted.  $S$  may now be replaced by the formula  $KMNBB$  and the formula  $MKNMNBB$  is provable. The resulting systems are referred to as the systems  $OX$ . — The systems  $OM, OM', OM''$  obtained in this way from von Wright's systems  $M, M', M''$  respectively are then discussed. It is shown that  $OM'$  contains at most 14 deontic modalities and that  $OM''$  contains 6. The system  $OM''$  does not distinguish between the modalities  $Op, MOp, LOp$ . Alternative modalities  $O'\alpha, F'\alpha, P'\alpha$ , denoting „obligation“, „forbidding“, „permission“ respectively are discussed. These formulae abbreviate  $KO\alpha MN\alpha$ ,  $KF\alpha M\alpha$ ,  $KP\alpha MN\alpha$  respectively. (The last  $K$  is accidentally omitted in the text.) The report concludes with a discussion of the adequacy of the systems  $OX$ .

*A. Rose.*

**Korobkov, V. K.:** Realization of symmetric functions in the class of  $\pi$ -circuits. Doklady Akad. Nauk SSSR 109, 260—263 (1956) [Russisch].

The author shows that any symmetrical Boolean function of  $x_1, \dots, x_n$  can be expressed by a formula built up from  $x_1, \dots, x_n, \bar{x}_1, \dots, \bar{x}_n$  by means of  $\&, \vee$ ; in about the total number of symbols  $x_1, \dots, x_n, \bar{x}_1, \dots, \bar{x}_n$  used is  $\leq C \cdot \log_2 n \cdot n^{\frac{1}{2} \log_2 n + \frac{1}{2}}$ .

*J. C. Shepherdson.*

**Henkin, Leon:** Some notes on nominalism. J. symbolic Logic 18, 19—29 (1953).

Anknüpfend an die Arbeiten von W. V. Quine, dies. Zbl. 35, 148 und N. Goodman und Quine, dies. Zbl. 41, 147 untersucht Verf., inwieweit eine „nominalistische“ Interpretation des reinen Prädikatenkalküls zweiter und höherer Stufe möglich ist. In einer solchen Interpretation soll — grosso modo — 1. nur auf endlich viele Individuen und 2. nicht auf Klassen (Prädikate) als Individuenbereich Bezug genom-



men werden. (Genaueres darüber in den zitierten Arbeiten.) — Es gelingt dem Verf. auch eine wesentliche Schwierigkeit für eine solche Interpretation der höheren Prädikatenkalküle, nämlich die Tatsache, daß nach dem Cantorsche Satz die Mächtigkeit des Bereiches der Prädikate größer als die des Bereichs der Individuen ist, zu überwinden. Dies geschieht durch Konstruktion eines „general models“, vgl. dazu Henkin, dies. Zbl. 39, 8, wobei von einer festen aber beliebigen Numerierung der Ausdrücke des betrachteten Kalküls Gebrauch gemacht wird. Bei diesem Verfahren kommt in einer gewissen Form die Unendlichkeit des Bereichs der Symbole eines Kalküls, der für die durchzuführende Konstruktion (Vervollständigungsprozeß) gebraucht wird, ins Spiel. Der Verf. bemerkt dazu mit Recht, daß wir ja auch in der Physik vom Unendlichen Gebrauch machen, obwohl wir es doch im wesentlichen nur mit endlich vielen Objekten zu tun haben, und ferner, daß wir gerade durch die Benutzung des Unendlichen ein bequemes Mittel zur Beherrschung endlicher Gesamtheiten in der Hand haben; er versucht damit die genannte Heranziehung des Unendlichen bei seiner Konstruktion zu rechtfertigen. Inwieweit damit ein (mehr oder weniger) strenger Nominalist einverstanden sein kann, ist eine offene Frage. Allerdings erscheint dem Ref. das ganze Programm des modernen Nominalismus für die Mathematik mit erheblichen Schwierigkeiten und noch offenbelassenen Fragen behaftet, so daß Argumentationen sowohl pro wie contra die Henkinsche Konstruktion, deren mathematischer Inhalt dadurch natürlich keineswegs betroffen wird, schwer zu beurteilen sind.

G. H. Müller.

**Henkin, Léon:** The nominalistic interpretation of mathematical language. Bull. Soc. math. Belgique 7, 137—142 (1956).

Vgl. vorstehendes Ref.: Kurze inhaltliche Erörterung des oben genannten Themas.

Gert H. Müller.

**Quine, W. V.:** On formulas with valid cases. J. symbolic Logic 21, 148 (1956).

Die Widerspruchsfreiheit einer prädikatenlogischen Formel  $\varphi$  kann in manchen Fällen dadurch gezeigt werden, daß eine allgemeingültige Formel  $\psi$  angegeben wird, welche aus  $\varphi$  durch Einsetzung entsteht. Verf. zeigt, daß diese Methode genau dann zum Ziele führt, wenn  $\varphi$  in einem einzahligen Individuenbereich erfüllbar ist.

H. Hermes.

**Henkin, Léon:** The algebraic structure of mathematical theories. Bull. Soc. math. Belgique 7, 131—136 (1956).

In diesem Vortrag berichtet der Verf. über die algebraische Betrachtung formalisierter Theorien, wie sie durch den Repräsentationssatz von M. H. Stone und durch die neueren Fassungen des K. Gödelschen Vollständigkeitssatzes ermöglicht wird. Vgl. dazu die ausführlichere Schrift des Verf. „La structure algébrique des théories mathématique“ (Paris 1957).

G. H. Müller.

**Monteiro, Antonio:** Axiomes indépendents pour les algèbres de Brouwer. Revista Un. mat. Argentina 17, 149—160 (1956).

After defining a Generalized Brouwerian algebra as a relatively pseudo-complemented lattice and a Brouwerian algebra as a Generalized Brouwerian algebra which contains a first element 0, Monteiro shows that a Generalized Brouwerian algebra is characterized by the following five postulates: A 1.  $a \rightarrow a = b \rightarrow b$ , A 2.  $(a \rightarrow b) \wedge b = b$ , A 3.  $a \wedge (a \rightarrow b) = a \wedge b$ , A 4.  $a \rightarrow (b \wedge c) = (a \rightarrow c) \wedge (a \rightarrow b)$ , A 5.  $(a \vee b) \rightarrow c = (a \rightarrow c) \wedge (b \rightarrow c)$ . He also shows that the postulates are independent. He then deduces that a Brouwerian algebra  $A$  is characterized by the above postulates together with the postulate: A 0. There exists an element 0 of  $A$  such that, for all  $a \in A$ ,  $0 \wedge a = a$ . The six postulates are shown to be independent. Finally it is shown that the independent postulates A 1., A 2., A 3., A 4. characterize the implicative systems of Curry [Leçons de logique algébrique (this Zbl. 48, 2), p. 66].

A. Rose.



## Algebra und Zahlentheorie.

● **Faculté des Sciences de Paris, Séminaire Albert Châtelet et Paul Dubreil: Algèbre et théorie des nombres. 7e année 1953/54. 2e tirage multigraphié. Paris: Secrétariat Mathématique 1956. Nr. 1—11.**

Es handelt sich um eine hektographierte Ausgabe von Vorträgen, die während des akademischen Jahres 1953/54 im Seminar „Algèbre et Théorie des Nombres“ der Professoren A. Châtelet und P. Dubreil gehalten wurden. Die Vorträge enthalten zum Teil bekannte Resultate, größtenteils aber berichten sie über neue (inzwischen schon erschienene) Forschungsergebnisse der Vortragenden. — Zwei Vorträge von **L. Lesieur** (Treillis géométriques, 10 u. 8 S.) bringen verschiedene Charakterisierungen und Untersuchungen von allgemeinen und gewissen speziellen Forderungen genügenden geometrischen Verbänden (wir verweisen auf den dritten Teil des Buches von Dubreil-Jacotin, Croisot und Lesieur, dies. Zbl. 51, 260). Es folgen zwei Vorträge desselben Verf. (Les treillis en topologie, 11 u. 10 S.); für die hier erörterten neuen Resultate s. dies. Zbl. 55, 161. **M. Lazard** (L'identité de Hall et les suites typiques, 13 S.) spricht über die Resultate von Chapitre II seiner Dissertation (dies. Zbl. 55, 251). Der nächste Vortrag von **J. Petresco** ist verschiedenen Eigenschaften der Kommutatoren in Gruppen gewidmet (Sur les commutateurs, 11 S., dies. Zbl. 56, 255). Für **G. Poitou**, Approximations diophantiennes et groupe modulaire (6 S.) können wir auf eine Publikation des Verf. (dies. Zbl. 64, 285) verweisen. Der darauffolgende Vortrag von **F. Châtelet** (Points rationnels sur les surfaces cubiques, 11 S.) stützt sich auf mehrere Arbeiten von B. Segre und L. J. Mordell. **P. Samuel** (Le lemme de Hensel, 5 S.) gibt einen Beweis des Henselschen Lemmas für den Fall von vollständigen Stellenringen. In seinem Vortrag (Sur les chaînes maximales d'idéaux dans les anneaux, 11 S.) untersucht **J. Guérindon** verschiedene Eigenschaften der Ideale in kommutativen Ringen mit Maximal- bzw. Minimalbedingung. Der Band schließt mit dem Vortrag von **P. Jaffard** (Extensions des groupes ordonnés, 10 S.); vgl. dies. Zbl. 65, 8. L. Fuchs.

### Lineare Algebra. Polynome. Formen. Invariantentheorie:

**Marathe, C. R.:** A note on quasi-idempotent matrices. Amer. math. Monthly 63, 632—635 (1956).

A square matrix is called q. i. p. (quasi-idempotent) if, for all positive integral  $r$ ,  $A^r = F(r)$  for some polynomial matrix  $F(x)$ . (See Huff, this Zbl. 64, 248.) It is shown that if  $A$  is q. i. p. of index  $n$  [i. e.  $A(A - I)^{n+1} = 0$  but  $A(A - I)^n \neq 0$ ] then so is  $H A H^{-1}$ . However, if  $H$  is singular but q. i. p. and  $H^r = G(r)$  and if  $G(0) A = A G(0)$  then  $G(1) A G(-1)$  is q. i. p. but may not have the same index as  $A$ . W. Ponting.

**Perfect, Hazel:** A remark about canonical forms. Edinburgh math. Notes Nr. 40, 15 (1956).

Die rationale und die klassische (Jordansche) Normalform einer nilpotenten Matrix mit komplexen Elementen sind gleich. Darauf beruht die von der Verf. beschriebene Methode, die klassische Normalform einer Matrix zu finden. H. Schneider.

**Easterfield, T. E.:** The characteristic roots of a matrix: A correction. Duke math. J. 23, 635—637 (1956).

In einer Arbeit von Leng (dies. Zbl. 46, 12) ist die in Theorem 5 behauptete Abschätzung des Wertevorrats (im genannten Referat: 3) falsch. Ebenfalls unrichtig sind die Angaben der Theoreme 8, 9 über die Gültigkeit des Gleichheitszeichens in der Abschätzung der Eigenwerte (im Referat: 4, 5). Der Fehler stammt von der Verwendung einer irrtümlichen Bedingung für das Eintreten des Gleichheitszeichens in der Ungleichung von Hölder. H. Wielandt.



**Cherubino, Salvatore:** Su un'equazione della teoria delle vibrazioni. Boll. Un. mat. Ital., III. Ser. 11, 133—136 (1956).

Sind  $A, B$  zwei Hermitesche Matrizen der Ordnung  $n$  und  $A$  positiv definit, so sind bekanntlich alle Wurzeln der Gleichung  $|Az + B| = 0$  reell. Der Verf. beweist, daß, damit alle diese Wurzeln positiv sind, notwendig ist, daß auch  $B$  positiv ist. Daß dies hinreichend ist, war schon bekannt. Im Anschluß daran gibt der Verf. Abschätzungen für diese Wurzeln durch die Eigenwerte von  $A$  und  $B$ , doch sind diese Abschätzungen nur unter der (nicht genannten) Voraussetzung allgemein richtig, daß auch  $B$  positiv ist.

*A. Ostrowski.*

**Freire, Rémy:** Eine Matrizenmethode zur Lösung gewisser Systeme von linearen Gleichungen. Soc. Paranaense Mat., Anuário 3, 54—59 (1956) [Portugiesisch].

**Cherubino, Salvatore:** Su una disuguaglianza in matrici. Boll. Un. mat. Ital., III. Ser. 11, 126—132 (1956).

Der Verf. versucht ein Verfahren zu entwickeln, um festzustellen, wann ein System von Ungleichungen  $a_{1s}x_1 + a_{2s}x_2 + \dots + a_{ns}x_n > 0$  ( $s = 1, 2, \dots, p$ ) durch positive  $x_k$  lösbar ist, und alle Lösungen dieses Systems anzugeben. Doch wird bei der Diskussion sehr bald stillschweigend auf die Feststellung aller Lösungen verzichtet, und die vom Verf. entwickelten Bedingungen werden sehr bald nur hinreichend, nicht aber notwendig (entgegen der Ansicht des Verf.). Man vergleiche zum Beispiel den Übergang von (4) zu (5). Klar formulierte Sätze finden sich in der Arbeit nicht.

*A. Ostrowski.*

**Parodi, Maurice:** Sur quelques propriétés des polynomes. Bull. Sci. math., II. Sér. 80, 76—81 (1956).

Für das Polynom  $f(z) = z^n + a_1z^{n-1} + \dots + a_{n-1}z + a_n$  ( $a_n \neq 0$ ),  $\sigma = \sum_{k=2}^n |a_k|$  gesetzt, beweist der Verf.: a) Ist  $\sigma > 1$  und  $|a_1| > 2\sqrt{\sigma}$ , so hat  $f(z)$  genau eine Wurzel im Kreise  $|z + a_1| \leq \sqrt{\sigma}$ . Ist aber darüber hinaus  $|a_1| > 1 + \sigma$ , so besitzt  $f(z)$  genau eine Wurzel im Kreise  $|z + a_1| \leq 1$ . b) Gilt  $\sigma > 1$  und  $|a_1| > \text{Max}(2n, 1 + \sigma)$ , so besitzt  $f^{(k)}(z)$  genau  $n - k - 1$  Wurzeln im Einheitskreis und eine Wurzel im Kreis mit dem Radius 1 um  $[k/n - 1]a_1$ . c) Hat  $f(z)$  ganze Koeffizienten und gilt für ein  $t$  mit  $|t| < 1$ :

$$|a_1 - t| > 1 + \sum_{k=2}^n |a_k - t a_{k-1}| + |t| |a_n|,$$

so ist  $f(z)$  irreduzibel.

*A. Ostrowski.*

**Rahman, Q. I.:** On the zeros of a class of polynomials. Proc. nat. Inst. Sci. India, Part A 22, 137—139 (1956).

The object of this note is to improve the results of Singh (this Zbl. 53, 206) concerning the location of the zeros of a real or complex polynomial with respect to certain circles.

*E. Frank.*

**Motzkin, T. S. and J. L. Walsh:** Least  $p$ th power polynomials on a finite point set. Trans. Amer. math. Soc. 83, 371—396 (1956).

$E: (z_1, \dots, z_m)$  sei eine endliche Punktmenge der  $z$ -Ebene und durch die positiven Gewichte  $\mu_k$  ( $k = 1, \dots, m$ ) sei eine Belegung von  $E$  gegeben. Es werden diejenigen Polynome  $T_n(z) = z^n + \dots$  ( $n < m$ ) untersucht, für welche die Norm  $\mu(T_n) = \sum_{k=1}^m \mu_k |T_n(z_k)|^p$ , ( $p > 0$ ) minimal ist. Die Fälle  $0 < p < 1$ ,  $p = 1$ ,  $p > 1$  zeigen wesentlich verschiedenes Verhalten.

*H. Tietz.*

**Ostrowski, Alexander:** Über die Darstellung von symmetrischen Funktionen durch Potenzsummen. Math. Ann. 132, 362—372 (1956).



Bildet man aus Größen  $x_1, x_2, \dots, x_n$  die elementarsymmetrischen Funktionen  $e_\nu = \sum x_1 x_2 \cdots x_\nu$  und die Potenzsummen  $s_\nu = \sum x_i^\nu$ , so bestehen bekanntlich Darstellungen  $e_\nu = \sum A(m) s_1^{m_1} s_2^{m_2} \cdots s_n^{m_n}$ ; für die Koeffizienten gilt  $\sum A(m) = 0$  und  $\sum |A(m)| = 1$ . Diese leicht beweisbare Aussage erweitert Verf. auf allgemeinere Typen symmetrischer Funktionen. Für beliebige Exponenten  $p_1, p_2, \dots, p_k$  bedeute  $[p_1, \dots, p_k] = \sum x_1^{p_1} \cdots x_k^{p_k}$  ( $k \leq n$ ) die Summe aller Terme, die aus dem angegebenen durch Variation der Größen  $x_1, x_2, \dots, x_n$  zur  $k$ -ten Klasse erhalten werden, dagegen  $(p_1, \dots, p_k)$  die Summe der untereinander verschiedenen Terme aus  $[p_1, \dots, p_k]$ . Es gilt dann  $[p_1, \dots, p_k] = k_1! k_2! \cdots k_i!$  ( $p_1, p_2, \dots, p_k$ ), wenn  $k_1, k_2, \dots, k_i$  bezüglich die einander gleichen Exponenten  $p_1, p_2, \dots, p_k$  zählen und  $i$  die Anzahl der verschiedenen Exponenten bedeutet. Für die Darstellungen (im Falle  $k > 1$ )  $[p_1, \dots, p_k] = \sum A(m) s_1^{m_1} \cdots s_n^{m_n}$ ;  $(p_1, \dots, p_k) = \sum B(m) s_1^{m_1} \cdots s_n^{m_n}$  gilt dann  $\sum A(m) = \sum B(m) = 0$ ;  $\sum |A(m)| = k_1! k_2! \cdots k_i!$ ;  $\sum |B(m)| = k!$ . Für die Umkehrung der Waringschen Formel:  $s_\nu = \sum D(m) e_1^{m_1} e_2^{m_2} \cdots e_n^{m_n}$  erhält man  $\sum D(m) = (-1)^{\nu+1}$ , (wenn  $n+1 \nmid \nu$ ),  $= (-1)^\nu n$ , (wenn  $n+1 \mid \nu$ ) und

$$\sum |D(m)| + 1 = \nu \sum_k \frac{(-1)^k}{\nu - k n} \binom{\nu - k n}{k} 2^{\nu - k(n+1)} \text{ über } 0 \leq k \leq (\nu - 1)/n.$$

*W. Specht.*

**Vivier, Marcel:** Sur quelques théorèmes d'algèbre extérieure. Ann. sci. Écol. norm. sup., III. Sér. **73**, 203—281 (1956).

Etude des annulateurs  $\alpha$  d'une forme  $\psi$  de l'algèbre extérieure  $\mathfrak{A}_n(K)$ , de degré  $n$  sur le corps des complexes  $K$ :  $\alpha \wedge \psi = 0$ . Si  $\psi$  est de degré 2, de rang  $n = 2m$ , tout annulateur  $\alpha$  est somme d'annulateurs simples (dont le rang et le degré, nécessairement  $\geq n$ , sont égaux). Il n'en est plus ainsi lorsque le degré de  $\psi$  dépasse 2, sauf lorsque  $\psi$  est somme de deux multivecteurs disjoints et aussi lorsque  $\psi$ , de degré  $2Nd$  est somme de  $N$   $2d$ -vecteurs disjoints. Dans ce dernier cas, l'A. étend, par l'emploi d'un algorithme, fondé sur la multiplication régressive de Grassmann, les résultats connus relatifs aux formes de degré 2.

*M. Lepage.*

**Howarth, J. C.:** On the real rotation group. Quart. J. Math., Oxford II. Ser. **7**, 241—243 (1956).

Beweis des folgenden, im wesentlichen von Hurwitz stammenden Satzes: Mit  $E_i(\varphi)$  werde die Matrix einer Rotation des Winkels um den Ursprung in der Ebene der Achsen  $x_i, x_{i+1}$  im  $R_m$  bezeichnet ( $i = 1, 2, \dots, m-1$ ). Ferner sei

$$P_r = E_{m-r}(\varphi_{r-1,r}) E_{m-r+1}(\varphi_{r-2,r}) \cdots E_{m-1}(\varphi_{0,r}),$$

wobei  $0 \leq \varphi_{r-1,r} < 2\pi$ ,  $0 \leq \varphi_{s,r} < \pi$  ( $0 \leq s < r-2$ ) und  $\varphi_{s-\sigma,r} = 0$  ( $\sigma = 1, 2, \dots, s$ ), falls  $\varphi_{s,r} = 0$  oder  $= \pi$  ( $0 \leq s \leq r-1$ ). Dann ist: (1) jede eigentlich orthogonale Matrix  $A$  darstellbar in der Form  $P_1 P_2 \cdots P_{m-1}$  und (2) jeder der  $\frac{1}{2} m(m-1)$  Rotationswinkel  $\varphi_{s,r}$  durch  $A$  eindeutig bestimmt. Beweis von (1): Falls die  $m-k$  letzten Elemente ( $k \geq 2$ ) der ersten Zeile von  $A$  verschwinden, so kann man ein  $\varphi$  bestimmen derart, daß die  $m-k+1$  letzten Elemente von  $A E_{k-1}(\varphi)$  verschwinden. Wiederholte Anwendung der Schlußweise führt zu einem Produkt  $A_1 = A E_{k-1} \cdots E_1$ , in dem die erste Zeile gleich  $(1, 0, \dots, 0)$  ist. Induktion. Eindeutigkeit ebenfalls durch Induktion.

*H. Schwerdtfeger.*

**Blij, F. van der:** A theorem on positive matrices. Nederl. Akad. Wet., Proc., Ser. A. **59**, 108—109 (1956).

Ein Satz vom Ref. (dies. Zbl. **38**, 175) über quadratische Formen, den M. Eichler im angegebenen Referat nach dem Vorgang von E. Witt (dies. Zbl. **15**, 57) als einen Satz über metrische Räume formulierte, wird bedeutend verallgemeinert und sehr elegant bewiesen. Es sei  $S$  eine symmetrische reelle positive  $n^2$ -Matrix. (Ref. bemerkt, daß Verf. die Symmetrie von  $S$  nicht ausdrücklich gefordert hat, obwohl diese Eigenschaft ausgenutzt wird. Auch wurde die Positivität von  $S$  nicht definiert,



soil aber bedeuten, daß die zugehörige quadratische Form positiv definit ist.) Ferner sei  $C$  eine primitive  $n \times m$ -Matrix ( $m \leq n$ ), wobei die Primitivität bedeutet, daß die Elemente ganz rational und die Unterdeterminanten  $m$ -ter Ordnung relativ prim sind. Theorem. Die Matrix  $G = S - SC \cdot (C' S C)^{-1} \cdot C' S$  ist vom Rang  $n - m$ , bezeichnet ferner  $P$  eine  $n \times (n - m)$ -Matrix mit ganzen rationalen Elementen so, daß die  $n^2$ -Matrix  $M = (P C)$  unimodular ist, so gilt  $M' G M = \begin{pmatrix} T & N_1 \\ N_2 & N_3 \end{pmatrix}$  mit einer positiven  $(n - m)^2$ -Matrix  $T$  und Nullmatrizen  $N_1, N_2, N_3$ , endlich besteht  $|T| = |S| |C' S C|^{-1}$ . ( $C', M'$  bezeichnen die Transponierte von  $C$  bzw.  $M$ ). Verf. bemerkt, daß in seinem Satz sich der rationale Zahlkörper und der Ring der ganzen rationalen Zahlen durch einen formal reellen Körper und einen in diesem enthaltenen Hauptidealring ersetzen lassen, die einzige Änderung ist dann, daß in der für  $|T|$  angegebenen Formel das Quadrat einer (näher nicht bestimmbarer) Einheit aus diesem Hauptidealring als Faktor auftritt. Hiervon bildet der Fall  $m = 1$  eben den angegebenen Satz vom Ref. Am Schluß von S. 108 ist  $C' S + \varrho E$  zu  $C' S C + \varrho E$  zu verbessern.

L. Rédei.

### Gruppentheorie:

Almeida Costa, A.: Über die Fastgruppentheorie. Univ. Lisboa, Revista Fac. Ci., II. Ser. A 5, 265—328 (1956).

Ce papier contient une importante étude des propriétés générales des quasi-groupes et un large exposé de quelques chapitres maîtres de la théorie des groupes, étendus aux quasigroupes. L'A. définit un quasigroupe comme un groupoïde  $G(*)$  dont les translations à droite,  $T_a$ , et à gauche,  $T'_a$ , satisfont à la condition  $x T_y = y T'_x$ , où les  $T$  sont des transformations de  $G$ , ce qui équivaut à la loi du quotient. On écrit  $x T_y$  pour  $x * y$ . Première partie. D'après R. Bruck [Trans. Amer. math. Soc. 54, 19—52 (1944)], un quasigroupe, sur un ensemble  $E$ , possède la propriété inverse (I. P.) s'il existe deux applications  $1 \rightarrow 1$  de  $E$  sur lui-même,  $L$  et  $R$ , telles que  $\forall a, b \in E, a^L(a b) = (b a) a^R = b$ . Alors, Th. 1, si  $Q$  est un I. P. quasigroupe, on a  $L = T_a R T'_a$  et  $R = T'_a L T_a$ . Th. 2, tout automorphisme du 2<sup>ème</sup> ordre d'un I. P. quasigroupe est permutable avec  $L$  et  $R$ . Les 3, 4 traitent de l'existence de quasigroupes des divers ordres. La preuve utilise un théorème d'Albert [Trans. Amer. math. Soc. 54, 507—519 (1943) p. 511, th. 2]. Dans la seconde partie, les 1, 2, 3 exposent l'homomorphisme, l'inclusion, le produit et l'intersection des partitions régulières dans les quasigroupes. Le 4 concerne la „commutabilité“, au sens de Ore, des partitions régulières cancellables dans les quasigroupes (cf. Trevisan, ce Zbl. 39, 15, Th. 2, p. 369 et Thurston, ce Zbl. 46, 247). Le 5 est consacré à l'intersection et au produit des diviseurs normaux, les 6, 7 aux théorèmes d'isomorphisme et le 8 au lemme de Zassenhaus (ce Zbl. 9, 154), dans le cas des quasigroupes. Le 1 de la 3<sup>ème</sup> partie étend à tout quasigroupe une proposition d'Albert (loc. cit. lemme 4, p. 511) relative aux loops. Le 2 fait voir la connexion entre les homomorphismes et les diviseurs invariants du groupe  $\{Q_d, Q_g\}$ , où  $Q_d$  et  $Q_g$  sont les complexes des translations à droite et à gauche de  $Q$ . La fin du paragraphe contient l'étude des diviseurs normaux unilatères d'un quasigroupe déjà introduits par Murdoch dans un cas particulier (ce Zbl. 20, 347, p. 514). On dit que  $P$  est un diviseur normal à droite du quasigroupe  $Q$  si, (1)  $P$  est un sous-quasigroupe de  $Q$ , (2) l'ensemble  $P, a P_r, b P_r, c P_r, \dots$ , ou  $a, b, c, \dots$  appartiennent à  $Q$  et où  $P_r$  est le sous groupe du groupe des transformations de  $Q$  engendré par les translations à droite  $x \rightarrow x p, p \in P$ , est un quasigroupe, avec la règle de composition  $(\cdot)$ ,  $a P_r \cdot b P_r = (a b) P_r$ . Les 3, 4 définissent les homomorphismes et isomorphismes qui correspondent à un diviseur normal à droite, les 5, 6 posent les conditions pour que  $P$  soit normal à droite, les 7, 8 étudient les diviseurs normaux à droite des sous-



quasigruppen, les 9 à 13 les propriétés des diviseurs normaux unilatères et développent la théorie de Jordan-Hölder-Schreier-Zassenhaus. Dans la 4<sup>ième</sup> partie, on revient, à la lumière de la précédente, sur les diviseurs normaux bilatères, leurs rapports avec les diviseurs normaux unilatères. Une application est faite, en particulier aux I. P. quasigruppen de Bruck. La 5<sup>ième</sup> partie est consacrée aux quasigruppen simples, au sens usuel (aucun diviseur normal autre que  $Q$  et l'unité si elle existe). Le 1 exprime la condition pour que  $Q$  soit simple, en termes de  $T_p$  et de  $T'_p$  (1<sup>ère</sup> partie). Les 2, 3 étudient les propriétés du centre  $Z(Q)$ , avec la définition restrictive suivante:  $c \in Z$  si (1),  $cx = xc$  pour tout  $x$  dans  $Q$ , (2),  $(xy)c = (xc)y = x(yc)$  pour tous  $x, y$  dans  $Q$ . Pour que le centre d'un quasigroupe ne soit pas vide il faut et il suffit que celui-ci soit un loop. La théorie de l'extension fait l'objet d'une étude approfondie au cours de la 6<sup>ième</sup> partie. La définition est la généralisation aux quasigruppen de celle d'Albert [Trans. Amer. math. Soc. 55, 401—419 (1944), p. 406] dans le cas des loops. Mais la théorie est repensée à nouveau, en faisant intervenir notamment la notion de diviseur normal à droite (3<sup>ième</sup> partie) et de famille associée interne. Application aux I. P. quasigruppen, connexion avec le produit direct. Page 270, ligne 1, lire  $q = a^j$  au lieu de  $a^i$ ; p. 273, ligne 9, lire von  $Q$  au lieu de von  $P$ ; p. 278, ligne 2, lire  $\bar{a}b$  au lieu de  $a\bar{b}$ ; p. 284, ligne 20, lire [1] au lieu de [6]; p. 287, ligne 1, lire 2) au lieu de 3).

A. Sade.

**Popova, Helen: Logarithmetics of finite quasigroups. II.** Proc. Edinburgh math. Soc., II. Ser. 9, 109—115 (1956).

Den Teil I dieser Arbeit (dies. Zbl. 56, 255) fortsetzend wird die Struktur der Logarithmetik  $L_Q$  einer endlichen Quasigruppe  $Q$  der Ordnung  $n$  und insbesondere die Ordnung  $N$  von  $L_Q$  untersucht. Es zeigt sich, daß  $N$  gemeinsames Vielfaches der Ordnungen aller von je einem Element erzeugten Unterquasigruppen ist. Ist  $Q$  einfach (d. h. ohne echtes homorphes Bild) und besitzt  $Q$  keine Unterquasigruppe  $\neq Q$ , so ist  $N$  eine Potenz von  $n$ .

G. Pickert.

● **Faculté des Sciences de Paris, Séminaire Albert Châtelet et Paul Dubreil: Partie complémentaire: Demi-groupes. 7e année 1953/54. 2e tirage multigraphié.** Paris: Secrétariat Mathématique 1956. Nr. 12—20.

Die Vorträge dieses zweiten Teiles (vgl. dies. Zbl. 72, 251) befassen sich mit Halbgruppen. Im einleitenden Vortrag legt G. Thierrin (Notions générales, 13 S.) die Grundlagen der Theorie einschließlich der regulären Äquivalenzrelationen dar. In den folgenden zwei Vorträgen (Groupes homomorphes à un demi-groupe, 10 u. 7 S.) charakterisiert R. Thibault u. a. die homomorphen Gruppen-Bilder von Halbgruppen mittels gewisser Unterhalbgruppen bzw. beweist einen Homomorphiesatz. Es folgen zwei Vorträge von R. Croisot (Demi-groupes inversifs, demi-groupes réunions de demigroupes simples, 9 S.; Automorphismes intérieurs d'un semi-groupe, 8 S.) mit einer Reihe von interessanten Resultaten (vgl. dies. Zbl. 53, 9; 56, 254 und 57, 14). M. Tessier bespricht in ihrem Vortrag (Demi-groupes complètement simples, 7 S.) mehrere Eigenschaften der im Titel angegebenen Halbgruppen. Nach dem Bericht von J. Rignuet (Travaux récents de Malcev, Vagner, Liapin sur la représentation des demi-groupes, 9 S.) folgt der Vortrag von G. Thierrin (Caractérisation des groupes par certaines propriétés des équivalences, 10 S.), in dem die Gruppeneigenschaft von Halbgruppen mit gewissen Äquivalenzrelationen gezeigt wird (vgl. dies. Zbl. 57, 13, 14). Zum Schluß referiert R. Thibault (Immersion d'un demi-groupe dans un groupe, 11 S.) über die Methode von Lambeck (dies. Zbl. 42, 17).

L. Fuchs.

**Vandiver, H. S. and M. W. Weaver: A development of associative algebra and an algebraic theory of numbers. III.** Math. Mag. 29, 135—151 (1956).

Nach den zwei vorausgehenden Arbeiten von Vandiver (dies. Zbl. 52, 253) behandeln Verff. in dieser Arbeit hauptsächlich Halbgruppen als ein Beispiel eines assoziativen algebraischen Systems mit einer einzigen Komposition. Zunächst werden als eine Verallgemeinerung von Permutationen Abbildungen einer endlichen Men-



ge in sich untersucht, weil jede endliche Halbgruppe als eine Halbgruppe solcher Abbildungen betrachtet werden kann. Dann werden die Definition und die elementare Theorie von Halbgruppen gegeben. Verff. geben mehrere Beispiele und Übungsaufgaben. *K. Asano.*

**Yamada, Miyuki:** Compositions of semigroups. *Kōdei math. Sem. Reports* 8, 107—111 (1956).

Cette Note est une contribution à l'étude des demi-groupes qui sont des demi-treillis de demi-groupes (cf. A. H. Clifford, ce Zbl. 55, 250). L'A. montre d'abord qu' étant donné un demi-treillis  $T$  et une famille de demi-groupes  $\{S_\alpha\}_{\alpha \in T}$  possédant tous un idempotent, il est possible de construire un demi-groupe qui soit réunion des demi-groupes  $S_\alpha$  et tel que  $T$  en soit image homomorphe, les classes d'équivalence étant les  $S_\alpha$ . Dans le cas où les  $S_\alpha$  possèdent tous un et un seul idempotent, l'A. détermine toutes les solutions du problème. *R. Croisot.*

**Tamura, Takayuki:** Correction to my paper: „Indecomposable completely simple semigroups except groups“. This volume, pp. 35—42. *Osaka math. J.* 8, 262 (1956).

Betrifft dies. Zbl. 70, 18.

**Preston, G. B.:** The structure of normal inverse semigroups. *Proc. Glasgow math. Assoc.* 3, 1—9 (1956).

L'A. caractérise les demi-groupes qui sont des demi-treillis de demi-groupes inversifs à idempotents permutables. Il montre en particulier qu'un tel demi-groupe  $D$  est un demi-groupe inversif à idempotents permutables et il établit que  $D$  est connu à un isomorphisme près si l'on se donne le demi-treillis, les demi-groupes composants et certaines translations à droite de  $D$ . *R. Croisot.*

**Iséki, Kiyoshi:** A characterisation of regular semi-group. *Proc. Japan Acad.* 32, 676—677 (1956).

Eine Halbgruppe  $S$  heiße regulär (im Sinne von J. von Neumann), falls es zu jedem  $a \in S$  ein  $x \in S$  gibt mit der Eigenschaft  $axa = a$ .  $S$  ist genau dann regulär, wenn  $AB = A \cap B$  gilt für jedes Rechtsideal  $A$  und jedes Linksideal  $B$  von  $S$ . (Für das entsprechende Resultat bez. Ringe s. L. Kovcs, dies. Zbl. 70, 265.) Eine kommutative Halbgruppe ist genau dann regulär, wenn alle ihre Ideale idempotent sind. *L. Fuchs.*

**Kemperman, J. H. B.:** On complexes in a semigroup. *Nederl. Akad. Wet., Proc., Ser. A* 59, 247—254 (1956).

Let  $G$  be an additive semi-group with cancellation, and call an element  $c \in G$  invertible if  $G$  can be imbedded in a semi-group with zero in which  $c$  has an inverse. Let  $[A]$  denote the number of elements of a subset  $A$  of  $G$ ,  $A + B = \{g | g = a + b, a \in A, b \in B\}$  and set  $k_0 = [A_1] + \dots + [A_n] - [A_1 + \dots + A_n]$ ,  $n \geq 2$ , where  $A_1, \dots, A_n$  are finite non-empty subsets of  $G$ . It is proved that an invertible element  $c \in A_1 + \dots + A_n$  has at least  $k_0 - n + 2$  representations  $c = a_1 + \dots + a_n$  with  $a_i \in A_i$ . When  $G$  is a group this result is of interest only when  $G$  contains a non-zero element of finite order, for otherwise  $k_0 \leq n - 1$ . In the case  $n = 2$ , the author conjectures that for an arbitrary group without non-zero elements of finite order at least two elements of  $A_1 + A_2$  admit exactly one representation, provided that  $[A_2] \geq 2$ . He proves a theorem which implies the truth of this conjecture under the assumption that elements of  $A_2$  commute with each other. *H. Schneider.*

**Gol'dina (Goldina), N. P.:** Free nilpotent groups. *Doklady Akad. Nauk SSSR* 111, 528—530 (1956) [Russisch].

Für die „Standard-Kommutatoren“ aus den freien Erzeugenden einer freien Gruppe wird wie bei M. Hall (dies. Zbl. 39, 263) ein Gewicht definiert und ohne Beweis werden unter anderem die folgenden Sätze angegeben: (1) in einer freien  $n$ -stufig nilpotenten Gruppe bilden die Standard-Kommutatoren vom Gewicht  $m$  ein



freies Erzeugendensystem einer freien nilpotenten Gruppe der Klasse  $[m^{-1}(n+m-1)]$ , deren normale Hülle in  $G$  das  $m$ -te Glied  ${}_mG$  der absteigenden Zentralreihe von  $G$  ist. (2) Es sei  $G$  eine freie  $n$ -stufig nilpotente Gruppe mit einer beliebigen Anzahl freier Erzeugender. Eine Teilmenge von  $G$  bildet genau dann ein freies Erzeugendensystem einer freien nilpotenten Gruppe einer Klasse  $k > 2$ , wenn sie in  ${}_mG$  enthalten und mod  ${}_{m+1}G$  linear unabhängig ist, wobei  $m$  durch die Beziehung  $k = [m^{-1}(n+m-1)]$  bestimmt ist. [Für  $m = 1$  ist hierin der Satz von A. I. Mal'cev (dies. Zbl. 66, 276) enthalten.] In den weiteren Sätzen wird eine Beschreibung der Untergruppen einer freien  $n$ -stufig nilpotenten Gruppe mit einer endlichen Erzeugendenzahl gegeben. *H. Salzmann.*

**Fridman (Friedman), M. A.:** On semi-commutative multiplications. Doklady Akad. Nauk SSSR 109, 710—712 (1956) [Russisch].

Verf. führt ein neues Produkt von Gruppen ein, das mehrere wichtige Grundeigenschaften des direkten und freien Produktes von Gruppen hat. Es sei  $\Omega$  eine Klasse von Gruppen, die hinsichtlich des Isomorphismus geschlossen ist. Es seien  $T_1$  und  $T_2$  zwei in  $\Omega$  erklärte Operationen, die die folgenden Bedingungen befriedigen: 1.  $T_1(G)$  und  $T_2(G)$  sind Normalteiler in  $G$ ,  $G \in \Omega$ . 2. Sind  $A, B \in \Omega$ , so hat  $A$  auf  $B$  eine isomorphe Abbildung  $\varphi$  mit  $\varphi[T_i(A)] = T_i(B)$  ( $i = 1, 2$ ). Man nennt eine Gruppe  $G$   $T$ -halbkommutatives Produkt von ihren Untergruppen  $A_\alpha$  (wo  $\alpha$  eine Indixmenge  $\Sigma$  durchläuft) und bezeichnet sie mit  $\prod_{\alpha \in \Sigma} A_\alpha$ , wenn die folgenden Bedingungen befriedigt sind: a)  $A_\alpha \in \Omega$  ( $\alpha \in \Sigma$ ), b)  $G = \{A_\alpha\}_{\alpha \in \Sigma}$ , c) Die Menge der Relationen  $\bigcup_{\alpha \in \Sigma} \psi(A_\alpha) \cup \psi$  — wo  $\psi(A_\alpha)$  die Menge sämtlicher Relationen

zwischen den Elementen von  $A_\alpha$  und  $\psi$  die Menge der Relationen der Form  $a^{-1}b^{-1}ab = 1$  ist ( $a \in T_i(A_\beta)$ ,  $b \in T_j(A_\gamma)$ ;  $\beta, \gamma \in \Sigma$ ,  $\beta \neq \gamma$ ;  $i, j = 1, 2$ ,  $i \neq j$ ) — ist das System der die Gruppe  $G$  definierenden Gleichungen im Vergleich zu den sämtlichen Elementen von  $A_\alpha$ . Verf. beweist dann einige Sätze in Verbindung mit der Assoziativität der halbkommutativen Produkte. *J. Szép.*

**McLain, D. H.:** Remarks on the upper central series of a group. Proc. Glasgow math. Assoc. 3, 38—44 (1956).

Ist  $F$  irgendein Funktor, der irgendeiner Gruppe  $G$  eine wohlbestimmte charakteristische Untergruppe  $F(G)$  von  $G$  zuordnet, so definiert man die aufsteigende  $F$ -Reihe  $F_\sigma(G)$  von  $G$  durch transfinite Induktion folgendermaßen.  $F_0(G) = 1$ ,  $F_{\sigma+1}(G)/F_\sigma(G) = F[G/F_\sigma(G)]$ ,  $F_\sigma(G)$  ist für Limesindex  $\sigma$  die Vereinigungsmenge aller  $F_\nu(G)$  mit  $\nu < \sigma$ . Das letzte Glied dieser Reihe heißt dann Hyper- $F$  von  $G$  und werde  $HF(G)$  genannt. Verf. vergleicht die beiden folgenden Spezialfälle dieser Konstruktion miteinander: wählt man für  $F$  das Zentrum  $Z(G)$  von  $G$ , so erhält man die aufsteigende Zentrenreihe  $Z_\sigma(G)$  von  $G$ ; wählt man für  $F(G)$  die Untergruppe  $E(G)$ , die genau aus den Elementen  $x$  von endlichem Index in  $G$  (= Elementen  $x$ , deren Konjugiertenmenge  $x^G$  endlich ist) besteht, so erhält man eine Reihe  $E_\sigma(G)$ , die sicher der Ungleichung  $Z_\sigma(G) \leq E_\sigma(G)$  für alle  $\sigma$  genügt. Ist  $Z(G)$  torsionsfrei, so zeigt Verf.  $Z_\sigma(G) = E_\sigma(G) \cap HZ(G)$  für alle  $\sigma$ . Ist nicht nur  $Z(G)$  torsionsfrei, sondern auch noch  $U = Z_n(U)$  mit geeignetem endlichen  $n$  für jede endlich erzeugbare Untergruppe  $U$  von  $G$  (d. h.  $U$  ist von endlicher Klasse), so gilt sogar  $Z_\sigma(G) = E_\sigma(G)$  für alle  $\sigma$ . Weiter zeigt Verf. die Äquivalenz der folgenden vier Eigenschaften von  $HE(G)$ : (a) die Maximalbedingung wird von den in  $HE(G)$  enthaltenen Normalteilern von  $G$  erfüllt; (b)  $HE(G)$  ist noethersch; (c)  $HE(G)$  ist endlich erzeugbar; (d)  $HE(G)$  ist eine Erweiterung einer endlich erzeugbaren Gruppe endlicher Klasse durch eine endliche Gruppe. — Wird die Minimalbedingung von den Normalteilern von  $G$  erfüllt, so zeigt Verf. sogar, daß die Minimalbedingung von den Untergruppen von  $HE(G)$  [und also a fortiori von denen von  $HZ(G)$ ] erfüllt wird. — Schließlich konstruiert Verf. Beispiele von Gruppen  $G$ , deren aufsteigende Zentrenreihe in  $G$  endet und eine vorgegebene Länge  $\sigma$  hat. *R. Baer.*

Hall, P.: Finite-by-nilpotent groups. Proc. Cambridge philos. Soc. 52, 611—616 (1956).

Es seien  $Z^i(G)$  bzw.  $Z_i(G)$  für  $i = 0, 1, \dots$  die Glieder der absteigenden bzw. aufsteigenden Zentralreihe der Gruppe  $G$ . Die Erweiterungen endlicher Gruppen durch nilpotente Gruppen sind genau diejenigen Gruppen  $G$ , für die gilt:  $Z^k(G)$  ist endlich für eine endliche Zahl  $k$ . Das Hauptergebnis dieser Arbeit besagt nun, daß diese Gruppenklasse auch durch die Forderung „ $G/Z_l(G)$  ist endlich für eine endliche Zahl  $l$ “ charakterisiert werden kann. Jeder Gruppe der Klasse läßt sich also ein Paar von Invarianten  $k = k(G)$  und  $l = l(G)$  zuordnen, die kleinsten Zahlen  $k$  und  $l$ , für die  $Z^k(G)$  und  $G/Z_l(G)$  endlich werden. Zwischen den Invarianten besteht die Beziehung  $k \leq l \leq 2k$  und zu jedem Paar von Zahlen  $k, l$  mit  $k \leq l \leq 2k$  gibt es Gruppen mit diesen Invarianten.

W. Kappe.

Baer, Reinhold: Noethersche Gruppen. Math. Z. 66, 269—288 (1956).

Als Noethersche Gruppe bezeichnet Verf. eine Gruppe  $\mathfrak{G}$ , die der Maximalbedingung genügt, deren Untergruppen also sämtlich endlich erzeugbar sind. Jedes homomorphe Bild  $\bar{U}$  einer jeden Untergruppe  $U$  einer Noetherschen Gruppe  $\mathfrak{G}$  ist eine Noethersche Gruppe; besitzt eine Gruppe  $\mathfrak{G}$  einen Noetherschen Normalteiler  $\mathfrak{N}$  mit Noetherscher Faktorgruppe  $\mathfrak{G}/\mathfrak{N}$ , so ist auch  $\mathfrak{G}$  eine Noethersche Gruppe. Ziel des Verf. ist es, Bedingungen anzugeben, unter denen eine endlich erzeugbare Gruppe  $\mathfrak{G}$  eine Noethersche Gruppe ist. So gilt der Satz: Eine endlich erzeugbare Gruppe  $\mathfrak{G}$  ist eine Noethersche Gruppe, wenn jedes von 1 verschiedene homomorphe Bild  $\bar{\mathfrak{G}}$  einen von 1 verschiedenen endlichen oder einen endlich erzeugbaren abelschen Normalteiler  $\bar{\mathfrak{N}}$  besitzt. Es ergibt sich dies aus allgemeinen interessanten Untersuchungen: Eine Gruppe  $\mathfrak{G}$  ist endlich definierbar, wenn sie isomorph ist der Faktorgruppe  $\mathfrak{F}/\mathfrak{N}$  einer freien Gruppe  $\mathfrak{F}$  endlichen Ranges nach einem von endlich vielen Ähnlichkeitsklassen aus  $\mathfrak{F}$  erzeugten Normalteiler  $\mathfrak{N}$  von  $\mathfrak{F}$ . Die Faktorgruppe  $\mathfrak{G}/\mathfrak{N}$  der Gruppe  $\mathfrak{G}$  nach einem Normalteiler  $\mathfrak{N}$  heißt bezüglich  $\mathfrak{G}$  endlich definierbar, wenn eine Untergruppe  $U \subseteq \mathfrak{G}$  existiert, derart daß  $\mathfrak{G} = \mathfrak{N}U$  ist und  $\mathfrak{N} \cap U$  von endlich vielen Ähnlichkeitsklassen aus  $U$  erzeugt wird. Ist  $\mathfrak{G}$  endlich erzeugbar und  $\mathfrak{G}/\mathfrak{N}$  bezüglich  $\mathfrak{G}$  endlich definierbar, so wird  $\mathfrak{N}$  von endlich vielen Ähnlichkeitsklassen aus  $\mathfrak{G}$  erzeugt. Daher sind folgende Eigenschaften gleichwertig: (1)  $\mathfrak{G}$  ist endlich definierbar. (2) Die Faktorgruppe  $\mathfrak{H}/\mathfrak{N} \cong \mathfrak{G}$  ist bezüglich  $\mathfrak{H}$  endlich definierbar. (3) Ist  $\mathfrak{H}$  endlich erzeugbar und  $\mathfrak{H}/\mathfrak{N} \cong \mathfrak{G}$ , so wird  $\mathfrak{N}$  von endlich vielen Ähnlichkeitsklassen aus  $\mathfrak{H}$  erzeugt. — Besitzt eine Gruppe  $\mathfrak{G}$  einen endlich definierbaren Normalteiler  $\mathfrak{N}$  mit endlich definierbarer Faktorgruppe  $\mathfrak{G}/\mathfrak{N}$ , so ist auch  $\mathfrak{G}$  endlich definierbar. Hauptergebnis: Folgende Aussagen sind gleichwertig: (1) Die Gruppe  $\mathfrak{G}$  ist eine Noethersche Gruppe. (2) Die Gruppe  $\mathfrak{G}$  ist endlich erzeugbar; zu jedem Normalteiler  $\mathfrak{N} \subset \mathfrak{G}$  existiert ein Zwischennormalteiler  $\mathfrak{M} \subset \mathfrak{N} \subseteq \mathfrak{G}$  von  $\mathfrak{G}$ , dessen Faktorgruppe  $\mathfrak{M}/\mathfrak{N}$  bezüglich  $\mathfrak{M}$  endlich definierbar ist. (3) Es existiert eine Automorphismengruppe  $\Gamma$  für  $\mathfrak{G}$  mit den Eigenschaften: Jeder  $\Gamma$ -zulässige Normalteiler  $\mathfrak{N}$  von  $\mathfrak{G}$  mit Noetherscher Faktorgruppe  $\mathfrak{G}/\mathfrak{N}$  wird durch endlich viele Klassen  $\Gamma$ -konjugierter Elemente erzeugt; zu jedem  $\Gamma$ -zulässigen Normalteiler  $\mathfrak{N} \subset \mathfrak{G}$  existiert ein  $\Gamma$ -zulässiger Zwischennormalteiler  $\mathfrak{M} \subset \mathfrak{N} \subseteq \mathfrak{G}$  von  $\mathfrak{G}$  mit Noetherscher Faktorgruppe  $\mathfrak{M}/\mathfrak{N}$ . Hieraus lassen sich Kriterien ableiten für endlich definierbare Noethersche Gruppen und vollständig endlich definierbare (Noethersche) Gruppen, d. h. solche Gruppen, deren Untergruppen sämtlich endlich definierbar sind. Jedes homomorphe Bild  $\bar{U}$  einer jeden Untergruppe  $U$  einer vollständig endlich definierbaren Gruppe  $\mathfrak{G}$  ist vollständig endlich definierbar. Besitzt eine Gruppe  $\mathfrak{G}$  einen vollständig endlich definierbaren Normalteiler  $\mathfrak{N}$  mit vollständig endlich definierbarer Faktorgruppe  $\mathfrak{G}/\mathfrak{N}$ , so ist auch  $\mathfrak{G}$  vollständig endlich definierbar. Eine Gruppe  $\mathfrak{G}$  heiße fast auflösbar, wenn jedes von 1 verschiedene homomorphe Bild  $\bar{\mathfrak{G}}$  einen von 1 verschiedenen Normalteiler  $\mathfrak{N}$  mit endlicher Kommutatorgruppe  $\mathfrak{N}'$  besitzt.



Eine Noethersche Gruppe  $\mathcal{G}$  ist genau dann fast auflösbar, wenn sie einen auflösbaren Normalteiler  $\mathcal{N}$  von endlichem Index besitzt. Daher ist jede fast auflösbare Noethersche Gruppe vollständig endlich definierbar. Ferner ist eine endlich erzeugbare Gruppe  $\mathcal{G}$  genau dann eine fast auflösbare Noethersche Gruppe, wenn jedes von 1 verschiedene homomorphe Bild  $\overline{\mathcal{G}}$  einen von 1 verschiedenen endlichen oder einen endlich erzeugbaren abelschen Normalteiler besitzt. Eine Gruppe  $\mathcal{G}$  heißt überauflösbar, wenn jedes von 1 verschiedene homomorphe Bild  $\overline{\mathcal{G}}$  einen von 1 verschiedenen zyklischen Normalteiler besitzt. Jede endlich erzeugbare überauflösbare Gruppe  $\mathcal{G}$  ist eine Noethersche Gruppe. Eine Gruppe  $\mathcal{G}$  ist von endlicher Klasse (nilpotent), wenn ihre absteigende Zentrenkette endlich ist und mit der Einheit endet. Eine endlich erzeugbare Gruppe  $\mathcal{G}$  ist genau dann eine Noethersche Gruppe endlicher Klasse, wenn jedes von 1 verschiedene homomorphe Bild  $\overline{\mathcal{G}}$  ein von 1 verschiedenes Zentrum besitzt. Durch Variation der Bedingungen werden noch weitere Kriterien für Noethersche Gruppen endlicher Klasse gewonnen. Eine Gruppe  $\mathcal{G}$  ist lokal-Noethersche Gruppe, wenn jede endlich erzeugbare Untergruppe eine Noethersche Gruppe ist. — Produkte Noetherscher Normalteiler einer Gruppe  $\mathcal{G}$  sind lokal-Noethersche Normalteiler. Eine Gruppe  $\mathcal{G}$  ist lokal-Noethersche Gruppe, wenn jedes von 1 verschiedene homomorphe Bild  $\overline{\mathcal{G}}$  einen von 1 verschiedenen endlich definierbaren Noetherschen Normalteiler besitzt.

*W. Specht.*

● **Klein, Felix:** *Lectures on the icosahedron and the solution of equations of the fifth degree.* Translated by George Gavin Morrice. 2nd. and rev. ed. New York: Dover Publications, Inc. 1956. IX, 289 p. Paper \$ 1,85.

Das vorliegende Buch ist ein unkommentierter, ungekürzter und ungeänderter Nachdruck der englischen Übersetzung der zweiten, revidierten Auflage des Kleinschen Ikosaederbuches aus dem Jahre 1913. Inhaltlich ist also nichts zu bemerken. Man kann nur fragen: Was bedeutet das Kleinsche Werk uns heute? Wäre die Beifügung eines Kommentars wünschenswert gewesen? Dazu sei gesagt: Es ist kaum anzunehmen, daß ein heutiger Student, der die einschlägige Materie nicht schon einigermaßen beherrscht, das Buch mit Erfolg als Lehrbuch benutzen könnte. Denn manche Probleme, die zu Kleins Zeiten im Vordergrund des Interesses standen, sind uns heute fremd, ja gleichgültig geworden und der Student wird heute von vornherein zu einer Beweisstrenge erzogen, die er bei Klein nirgends finden wird. Auch ein Kommentar könnte da nicht abhelfen, wenn er nicht geradezu ein neues Buch werden sollte. — Andererseits liegt der große Vorzug des Ikosaederbuches darin, daß hier nicht eine einzelne Frage systematisch behandelt wird, sondern, daß Klein die verschiedensten Anwendungsmöglichkeiten der Theorie der Polyedergruppen für die Geometrie, Funktionentheorie und Algebra diskutiert. So wird der, der die einschlägigen Probleme schon soweit übersieht, daß er in dem Kleinschen Werk ohne systematische Lektüre blättern kann, das immer wieder mit Genuß tun, etwa um sich auf Zusammenhänge aufmerksam machen zu lassen, an die er bisher nicht dachte, oder um neue Anregungen für ein Kolleg über die Polyedergruppen zu finden. — In diesem Sinn ist der Neudruck des Ikosaederbuches entschieden zu begrüßen, — ganz abgesehen von der historischen Bedeutung des Werks.

*W. Krull.*

**Yacoub, K. R.:** *On semi-special permutations. I.* Proc. Glasgow math. Assoc. 3, 18—35 (1956).

Im Anschluß an eine frühere Arbeit (dies. Zbl. 64, 252) untersucht Verf. semi-spezzielle Permutationen. Wegen der zahlreichen Einzelresultate und umfangreichen Rechnungen muß auf die Arbeit selbst verwiesen werden. Die Ergebnisse genügen, um alle semispezziellen Permutationen zu den Moduln  $n$  der Gestalt  $pq$  ( $p, q$  Primzahlen; evtl. auch  $p = q$ ) anzugeben. Für  $p \neq q$ ,  $p$  kein Teiler von  $q - 1$ , sind alle diese Permutationen linear. Nur für den Modul  $2p$  ( $p$  ungerade) lassen sich auch die nichtlinearen Permutationen leicht angeben:  $\pi(2x) = 2x$ ,  $\pi(2x + 1) \equiv$

$2x + 1 + 2\lambda(2p)$  mit  $(\lambda, p) = 1$ . Für den allgemeinen Fall  $n = pq$  bzw.  $n = p^2$  ergeben sich kompliziertere Ausdrücke. *B. Huppert.*

**Ono, Takashi:** On orthogonal groups over number fields. Proc. internat. Sympos. algebraic number theory, Tokyo & Nikko Sept. 1955, 253—256 (1956).

Siehe hierzu eine frühere Arbeit des Verf. (dies. Zbl. 65, 12; 66, 280). Über das dort Bewiesene hinaus wird hier gezeigt, daß für die halblineare Einbettbarkeit der orthogonalen Gruppe  $O(f)$  bezüglich einer quadratischen Form  $f$  in die orthogonale Gruppe  $O(g)$  für eine andere Form  $g$  die halbähnliche Darstellbarkeit von  $f$  durch  $g$  nicht nur hinreichend sondern auch notwendig ist. Hier kann  $O(f)$  auch durch die eigentlich orthogonale Gruppe  $O^+(f)$  wie deren Kommutatorgruppe  $\Omega(f)$  ersetzt werden. *M. Eichler.*

**Osima, Masaru:** Note on a paper by J. S. Frame and G. de B. Robinson. Math. J. Okayama Univ. 6, 77—79 (1956).

Let  $S_n$  be the symmetric group of degree  $n$  and  $p$  be a prime. A diagram of  $n$  nodes is called  $p$ -regular if not  $p$  of its rows are of equal length. The paper proves, by means of certain recursion formulas, the following theorems, previously proved by Frame-Robinson (this Zbl. 55, 255) and Robinson (this Zbl. 66, 19): The number of  $p$ -regular diagrams with  $n$  nodes is equal to the number of  $p$ -regular classes in  $S_n$ , hence to the number of modular irreducible representations of  $S_n$ ; more precisely, the number of  $p$ -regular diagrams, of  $n$  nodes, in a given  $p$ -block is equal to the number of modular irreducible representations in that block. *T. Nakayama.*

**Osima, Masaru:** On the representations of the generalized symmetric group. II. Math. J. Okayama Univ. 6, 81—97 (1956).

(Part I: this Zbl. 58, 21.) The generalized symmetric group  $S(n, m)$  consists of all permutations of  $m$   $n$  symbols  $i_j$  commutative with  $(1_1 2_1 \cdots m_1) (1_2 2_2 \cdots m_2) \cdots (1_n 2_n \cdots m_n)$ . The paper studies modular representations of  $S(n, m)$ , in continuation to the former paper this Zbl. 64, 254 in which ordinary representations of  $S(n, m)$  were studied. Thus, let  $p$  be a prime. Let  $(p, m) = 1$  firstly. Ordinary irreducible representations of  $S(n, m)$  are associated with star diagrams  $[\alpha]^* = [\alpha_0] \cdot [\alpha_1] \cdots [\alpha_{m-1}]$  of  $n$  nodes, and those associated with  $[\alpha]^*$ ,  $[\beta]^*$  belong to a same  $p$ -block if and only if for each  $i$  the component diagrams  $[\alpha_i]$ ,  $[\beta_i]$  have a same  $p$ -core and a same  $p$ -weight. The number of ordinary (resp. modular) irreducible representations of  $S(n, m)$  belonging to a  $p$ -block is the product of the numbers of ordinary (resp. modular) irreducible representations in the corresponding  $p$ -blocks of the component symmetric groups. Similarly the defect group of a  $p$ -block of  $S(n, m)$  is the direct product of the defect groups of the corresponding  $p$ -blocks of the component symmetric groups. In the case  $(p, m) \neq 1$ , the situation is more complicated (though rather similar). *T. Nakayama.*

**Ellis, J. W.:** Duality in products of groups with operators. Trans. Amer. math. Soc. 83, 301—312 (1956).

Roughly stated this paper is concerned with the question: What is the relationship between the dual of the cartesian product of an arbitrary collection of abelian groups, and the duals of individual groups? The author states a purely algebraic lemma by the aid of which he is able to get very neatly various known results in this direction on topological groups and topological linear spaces. *W. T. van Est.*

**Gluškov, V. M.:** Lokal bikompakte Gruppen mit Minimalbedingung für die abgeschlossenen Untergruppen. Ukrain. mat. Žurn. 8, 135—139 (1956) [Russisch].

It is shown first that a locally compact group  $G$  with descending chain condition for its closed subgroups, has a normal subgroup  $K$ , which is a compact connected Lie group, and such that  $G/K$  is discrete and satisfies also the chain condition. If in addition  $G$  is locally solvable or locally nilpotent, then  $K$  is abelian, and  $G/K$  is locally solvable or locally nilpotent and hence known descriptions of its structure are available (Kurosh: Theory of Groups, see this Zbl. 57, 18). *W. T. van Est.*



## Verbände. Ringe. Körper:

**Peremans, W.:** Free algebras with an empty set of generators. *Nederl. Akad. Wet., Proc., Ser. A* **59**, 565—570 (1956).

The author defines the free product of a family of algebras  $A_i$  ( $i \in I$ ) with a certain set  $V$  of operators and  $Q$  of axioms and shows that the natural mapping of each  $A_i$  into the free product is an isomorphism provided that (i) any axiom of  $Q$  has the form  $L_1 \vee L_2 \vee \dots \vee L_m$  ( $m \geq 1$ ), where at most one of the  $L_r$  is an identity and the rest are negations of identities (cf. Peremans, this Zbl. **47**, 15) and (ii) each  $A_i$  has a one-element subalgebra (this generalizes a theorem of Sikorski, this Zbl. **50**, 27). Moreover, the images of distinct  $A_i$  have at most one element in common. — Next, in order to define a general tensor product, the notion of a polyhomomorphism is introduced. This generalizes the idea of a multilinear mapping, and is a mapping from the direct product of the  $A_i$  to an algebra  $B$ , which is a homomorphism with respect to some of the operations of  $V$  while for the rest it is a homomorphism when all but one of the components are kept constant. Now the tensor product of a family of  $Q$ -algebras can be defined provided that  $Q$  satisfies (i) and that the algebra consisting of a single element satisfies  $Q$ . Finally a universal embedding theorem is proved (under similar conditions) giving a universal  $Q'$ -container of a  $Q$ -algebra, where  $Q'$  may have more axioms (and more operations) than  $Q$ , provided that there is at least one  $Q'$ -container. Taking  $Q$  and  $V$  to be empty one thus obtains some known results on the existence of free  $Q'$ -algebra (Peremans, l. c.). *P. M. Cohn.*

**Klein-Barmen, Fritz:** Zur Theorie der Strukturen und Algebren. *Math. Japonicae* **4**, 83—94 (1956).

L'A. introduit la notion de poids d'une structure et il en donne les principales propriétés. Il indique plusieurs applications, notamment aux algèbres.

*R. Croisot.*

**Matsushima, Yataro:** On the  $B$ -covers in lattices. *Proc. Japan Acad.* **32**, 549—553 (1956).

In Verallgemeinerung der Zwischenbeziehung in normierten Verbänden [Gliwkenko, dies. Zbl. **15**, 243; **17**, 339; ferner Blumenthal-Ellis, dies. Zbl. **35**, 301; Matsushima, Sci. Rep. Gumma Univ. **2** (1952); Kelly, dies. Zbl. **48**, 24] definiert Verf. ohne Bezug auf eine Metrik eine rein verbandstheoretische Zwischenbeziehung folgendermaßen:  $a x b$  ( $x$  zwischen  $a$  und  $b$ ) genau dann, wenn  $x = (a \wedge x) \vee (b \wedge x) = (a \vee x) \wedge (b \vee x)$ ; die Menge der zwischen  $a$  und  $b$  liegenden  $x$  heißt „ $B$ -cover“ von  $a$  und  $b$ ,  $B(a, b)$ . (In Verbänden mit  $0$  und  $e$  gilt: das Paar  $(a, b)$  entspricht dann und nur dann einer direkten Zerlegung des Verbandes, wenn  $a x b$  für jedes  $x$ .) Es werden, vor allem in Verallgemeinerung von Kelly, loc. cit., einige Eigenschaften dieser ternären Relation bzw. der „ $B$ -cover“ angegeben. Interessant ist die Charakterisierung der Distributivität durch die Äquivalenz:  $a x b$  genau dann, wenn  $a \wedge b \leq x \leq a \vee b$ . *J. Schmidt.*

**Andreoli, Giulio:** Le algebre dei livelli quali estensioni delle algebre di Boole; loro riduzione a queste. *Giorn. Mat. Battaglini* **84** (V. Ser. 4), 150—188 (1956).

Eine (endliche) Boolesche Algebra ist bekanntlich das direkte Produkt von Booleschen Algebren, die nur aus zwei Elementen  $0, 1$  bestehen. Verf. betrachtet folgende Verallgemeinerungen: a) An Stelle von  $\{0, 1\}$  nehme man eine linear geordnete Menge  $\varrho < \sigma < \dots < \tau < \omega$  und definiere die Operationen  $\cap, \cup$  durch  $\xi \cup \eta = \text{Max}(\xi, \eta)$ ,  $\xi \cap \eta = \text{min}(\xi, \eta)$ , ferner an Stelle des Komplements das „konjugierte“ Element durch  $\varrho^* = \omega$ ,  $\sigma^* = \tau$ ,  $\dots$ ,  $\tau^* = \sigma$ ,  $\omega^* = \varrho$ . — b) An Stelle von  $\{0, 1\}$  nehme man die Menge aller reellen oder aller rationalen Zahlen  $0 \leq x \leq 1$  mit den Operationen  $x^* = 1 - x$ ,  $x \cap y = xy$ ,  $x \cup y = (x^* y^*)^* = x + y - xy$ . (Hier gilt nicht  $x \cap x = x$ .) — Algebren dieser Typen sind aus einer gewöhnlichen Booleschen Algebra abzuleiten, indem man von dieser zu einer Be-

wertung (s. Birkhoff, Lattice Theory, dies. Zbl. 33, 101, S. 74) übergeht, wobei jedem Element  $E$  die Anzahl der in ihm enthaltenen Atome, d. i. die Länge einer maximalen Kette von 0 nach  $E$  zugeordnet wird. Verf. bezeichnet diesen Prozeß als *contrazione*. In der Menge der Werte wird dann noch eine gewisse Zusammenfassung zu Klassen vorgenommen (*attenuazione*). Die Algebra einer dreiwertigen Logik nach Reichenbach ist ein Beispiel einer solchen Algebra. Die Arbeit enthält leider keinerlei Literaturangaben. H. Gericke.

Ellis, David: Remarks on Boolean functions. II. J. math. Soc. Japan 8, 363—368 (1956).

[Teil I, s. dies. Zbl. 53, 215.] Verf. stellt die Koeffizientenbedingungen dafür fest, wann die Boolesche Funktion  $f(x, y) = \alpha xy + \beta x + \gamma y + \delta$  in der Booleschen Algebra  $B$ , betrachtet als 2-stellige Operation in  $B$ , assoziativ, kommutativ usw. ist, und gibt ein Kriterium für „Reduzibilität“, d. h. dafür, daß  $f(x, y) = g(x) \cdot h(y)$ , wo  $g$  und  $h$  Boolesche Funktionen in einer Variablen sind. J. Schmidt.

Kokoris, Louis A.: Simple power-associative algebras of degree two. Ann. of Math., II. Ser. 64, 544—550 (1956).

Es wird der (für den Fall eines Grades  $> 2$  bereits bekannte) Satz bewiesen: Jede einfache kommutative potenzassoziative Algebra der Charakteristik 0 ist eine Jordan-Algebra. G. Pickert.

Ree, Rimhak: On generalized Witt algebras. Trans. Amer. math. Soc. 83, 510—546 (1956).

Let  $F$  be a field of characteristic  $p \neq 0$ ,  $V$  a vector space over  $F$  and  $\mathfrak{G}$  a total subgroup of the dual  $V^*$  of  $V$ . Further let  $v_i$  ( $i \in I$ ) be a basis of  $V$ . Then the algebra  $\mathfrak{L}$  over  $F$  with the basis  $(v_i, \sigma)$  where  $i \in I$ ,  $\sigma \in \mathfrak{G}$ , and the multiplication  $(v_i, \sigma)(v_j, \tau) = \tau(v_i)(v_j, \sigma + \tau) - \sigma(v_j)(v_i, \sigma + \tau)$  is a Lie algebra, called a generalized Witt algebra [cf. Kaplansky, Bull. Amer. math. Soc. 60, 470—471 (1954)].  $\mathfrak{L}$  is simple except when  $p = 2$  and  $\dim V = 1$ . The author considers generalized Witt algebras of finite dimension (GWA for short). Let  $\mathfrak{A}$  be a commutative associative algebra over  $F$  and  $D_1, \dots, D_m$  any derivations of  $\mathfrak{A}$  (written on the left) such that  $D_i \circ D_j \equiv D_i D_j - D_j D_i = \sum a_{ijk} D_k$  (for  $a_{ijk} \in \mathfrak{A}$ ). Then the set  $\mathfrak{L}(\mathfrak{A}; D_1, \dots, D_m)$  of all derivations of  $\mathfrak{A}$  of the form  $\sum f_i D_i$  ( $f_i \in \mathfrak{A}$ ) is a Lie algebra, and every GWA can be expressed in this form. (This form is not unique and in fact  $D_1, \dots, D_m$  can be chosen so that  $D_i \circ D_j = 0$  for all  $i, j$ ). Conversely, if  $F$  is algebraically closed, every simple algebra of the form  $\mathfrak{L}(\mathfrak{A}; D_1, \dots, D_m)$  is a GWA; in this case  $\mathfrak{A}$  is the group algebra of an elementary  $p$ -group and the  $D$ 's may be chosen so that  $D_i \circ D_j = 0$ ,  $D_i^k = 0$  ( $i, j = 1, \dots, m$ ) for some  $k > 0$ . If  $x_1, \dots, x_n$  form a set of generators of the elementary  $p$ -group (multiplicative notation) then for  $m = 1$  the GWA is uniquely determined by its dimension; if  $m = n$ , the GWA has the form  $\mathfrak{L}(\mathfrak{A}; \partial/\partial x_1, \dots, \partial/\partial x_n)$ . For intermediate values of  $m$  forms of  $D_1, \dots, D_m$  in terms of  $\partial/\partial x_1, \dots, \partial/\partial x_n$  are given involving arbitrary parameters, but a classification is not attempted. Finally the author considers automorphisms of a GWA  $\mathfrak{L}$  and their relation to automorphisms of  $\mathfrak{A}$ . In particular he shows: If  $F$  is infinite, perfect and if  $p \neq 2, 3$ , then any automorphism  $\sigma$  of a GWA  $\mathfrak{L}(\mathfrak{A}; D_1, \dots, D_m)$  is induced by an automorphism of  $\mathfrak{A}$ . If  $D_i^\sigma = D_i$  for all  $i$ , then  $\sigma$  is the identity. Another result obtained is that the automorphism group of the GWA  $\mathfrak{L}(\mathfrak{A}; D)$  is soluble, when  $F$  is algebraically closed and  $p \neq 2, 3$ . P. M. Cohn.

Dieudonné, Jean: Groupes de Lie et hyperalgèbres de Lie sur un corps de caractéristique  $p > 0$ . V. Bull. Soc. math. France 84, 207—239 (1956).

[Parts I—IV cf. this Zbl. 55, 256; 64, 255, 256.] This paper, which is mainly concerned with an analysis of (non-abelian) „free“ hyperalgebras, begins with a comprehensive reformulation of the different concepts employed. Throughout  $K$  denotes a field of characteristic  $p \neq 0$ . Let  $N^{(I)}$  be the set of families  $\alpha = (\alpha_i)$  of non-negative integers, all 0 except for a finite number, indexed by



a set  $I$ . Write  $h(\alpha)$  for the least  $r$  satisfying  $\alpha_i \leq p^{r+1}$  ( $i \in I$ ). Now a hyperalgebra over  $K$  is an associative algebra  $\mathfrak{G}$  with a basis  $Z_\alpha$  indexed by  $N^{(I)}$  (a structural basis) such that (i)  $Z_0$  is the 1-element of  $\mathfrak{G}$ , and the  $Z_\alpha$  with  $\alpha \neq 0$  span a 2-sided ideal in  $\mathfrak{G}$ , (ii) for each  $r \geq 0$ , the  $Z_\alpha$  with  $h(\alpha) \leq r$  span a subalgebra  $\mathfrak{s}_r$  of  $\mathfrak{G}$  [called a bud (bourgeon) of height  $r$ ], and (iii) the mapping  $\mu$  of  $\mathfrak{G}$  into  $\mathfrak{G} \otimes \mathfrak{G}$  defined by  $\mu(Z_\alpha) = Z_\alpha^0 = \sum Z_\beta \otimes Z_\gamma$  (summed over all  $\beta, \gamma$  with  $\beta_i + \gamma_i = \alpha_i$  for  $i \in I$ ) is an isomorphism of  $\mathfrak{G}$  with a subalgebra  $\mathfrak{G}^0$  of  $\mathfrak{G} \otimes \mathfrak{G}$ . [In fact (ii) is shown to follow from (i) and (iii).] If  $\mathfrak{o}$  is the (vector space) dual of  $\mathfrak{G}$ , with coordinate forms  $x^\alpha$  such that  $\langle Z_\alpha, x^\beta \rangle = \delta_{\alpha\beta}$ , then the elements of  $\mathfrak{o}$  are just the formal power series in the  $x_i$  ( $i \in I$ ), where  $x^\alpha = \prod x_i^{\alpha_i}$ . Let the multiplication table in  $\mathfrak{G}$  be given by  $Z_\alpha Z_\beta = \sum d_{\alpha\beta\gamma} Z_\gamma$ , and let  $\varepsilon_i$  be the family with the  $i$ -th coordinate 1 and the rest 0, then  $\varphi_i(x, y) = \sum d_{\alpha\beta\varepsilon_i} x^\alpha y^\beta$  is the multiplication law for the formal Lie group associated with  $\mathfrak{G}$ . — Further, a positive integer  $\pi(i)$ , the „weight“ is associated with each  $i \in I$ ;  $\pi(\alpha)$  is defined as  $\sum \alpha_i \pi(i)$  and the multiplication is now required to be isobaric:  $d_{\alpha\beta\gamma} = 0$  unless  $\pi(\gamma) = \pi(\alpha) + \pi(\beta)$ . „The bud  $\mathfrak{s}_r$  truncated at weight  $m$ “ is defined as the quotient algebra of  $\mathfrak{s}_r$  by the ideal spanned by terms of weight  $> m$ . Using an abstract definition of bud (not necessarily embedded in a hyperalgebra) one obtains a bud truncated at weight  $m$ . Let  $\mathfrak{T}$  be the free associative algebra over  $F_p$ , the field of  $p$  elements, on the free generators  $U_{hi}$  ( $h = 0, 1, \dots$ ;  $i = 1, 2, \dots, n$ ) and define a weight  $\pi$  for each monomial of  $\mathfrak{T}$  by putting  $\pi(U_{hi}) = p^h$ ,  $\pi(XY) = \pi(X) + \pi(Y)$ . Then (Theorem 1) if the basic commutators in the generators  $U_{hi}$  are indexed by a set  $M$ , and  $N$  is the set of non-negative integers, then  $\mathfrak{T}$  is a hyperalgebra corresponding to the index set  $M \times N$ , with a structural basis formed of isobaric elements. The proof (5½ pp.) proceeds by constructing a basis of  $\mathfrak{T}$  (à la Birkhoff-Witt) from the basic commutators and then obtaining  $\mathfrak{T}$  as inverse limit of its truncated buds, defined inductively. The hyperalgebra so defined has a canonical composition law (Dieudonné, this Zbl. 66, 20); its structural basis is far from unique and this choice is further exploited. The hyperalgebra obtained in this way is denoted by  $\mathfrak{S}_n(F_p)$ . Now  $\mathfrak{S}_n(K)$ , the free hyperalgebra over  $K$  on  $n$  free generators  $U_i = (U_{hi})$  is defined as the extension of  $\mathfrak{S}_n(F_p)$  to  $K$ . Next a homomorphism of hyperalgebras is defined as an algebra homomorphism which respects the mapping  $\mu$ , and it is shown that every hyperalgebra  $\mathfrak{G}$  of dimension  $n$  is a homomorphic image of  $\mathfrak{S}_n(K)$ , more precisely,  $\mathfrak{G}$  is isomorphic to a hyperalgebra  $\overline{\mathfrak{G}}$  and there is a homomorphism of  $\mathfrak{S}_n(K)$  onto  $\overline{\mathfrak{G}}$  mapping the structural basis of  $\mathfrak{S}_n(K)$  onto that of  $\overline{\mathfrak{G}}$ . Moreover, a second free hyperalgebra  $\mathfrak{F}_n(K)$  on  $n$  generators, isomorphic to  $\mathfrak{S}_n(K)$ , but with a non-canonical composition law, can be defined such that every hyperalgebra  $\mathfrak{G}$  of dimension  $n$  is a homomorphic image of  $\mathfrak{F}_n(K)$  under a unique homomorphism mapping the structural basis of  $\mathfrak{F}_n(K)$  onto that of  $\mathfrak{G}$ . More generally, this still holds when  $\mathfrak{G}$  is replaced by any associative algebra with basis  $Z_\alpha$  indexed by  $N^J$ , where  $J = \{1, 2, \dots, n\}$ . By applying this result to a certain set of 1-dimensional subalgebras of  $\mathfrak{S}_n(K)$ , a formula is obtained which may be regarded as the analogue of the Baker-Hausdorff formula for characteristic  $p$ .

P. M. Cohn.

**Kohls, Carl W.:** On the embedding of a generalized regular ring in a ring with identity. Michigan math. J. 3, 165—168 (1956).

$A$  sei ein kommutativer Ring, der den kommutativen Ring  $S$  mit Einselement 1 als Operatorenbereich besitzt. Insbesondere kann für  $S$  der Ring  $I_n$  der ganzen Zahlen mod.  $n$  genommen werden, wenn  $n$  die Charakteristik von  $A$  ist. Die Paarung  $A \times S$  mit den durch  $(a, s) + (b, t) = (a + b, s + t)$ ,  $(a, s)(b, t) = (ab + sb + ta, st)$  definierten Verknüpfungen ist dann ein kommutativer Ring  $(A, S)$  mit dem Einselement  $(0, 1)$ , und  $a \rightarrow (a, 0)$  ist ein Isomorphismus von  $A$  in  $(A, S)$ . Sind  $A, S$  regulär (d. h. zu jedem  $a$  gibt es ein  $x$  mit  $a^2 x = a$ ), so auch  $(A, S)$ .

Ist  $A$   $m$ -regulär (d. h. zu jedem  $a$  gibt es ein  $x$  mit  $a^{2m}x = a^m$ ) und  $S$   $m'$ -regulär, so ist  $(A, S)$   $m m'$ -regulär. Sind  $A, S$   $\pi$ -regulär (d. h. zu jedem  $a$  gibt es ein  $x$  und ein  $m$  mit  $a^{2m}x = a^m$ ), so auch  $(A, S)$ . G. Pickert.

**Abhyankar, Shreeram:** On the compositum of algebraically closed subfields. Proc. Amer. math. Soc. **7**, 905—907 (1956).

Verf. löst ein Problem von Igusa, ob das Kompositum aller algebraisch abgeschlossenen Teilkörper von  $K$  selbst algebraisch abgeschlossen ist oder nicht. Verf. zeigt durch ein Beispiel, daß dies im allgemeinen nicht der Fall ist. Wenn  $K$  aber über einem algebraisch abgeschlossenen Teilkörper  $k$  von endlich vielen Elementen erzeugt wird, so beweist Verf. ferner, daß das oben genannte Kompositum algebraisch abgeschlossen und zwar gleich  $k$  ist. K. Asano.

**Robinson, Abraham:** Solution of a problem by Erdős-Gillman-Henriksen. Proc. Amer. math. Soc. **7**, 908—909 (1956); Errata. Ibid. **8**, 1160 (1957).

Es werden zwei ähnlich geordnete reell abgeschlossene nicht archimedisch und nicht abzählbar geordnete Körper  $R_1^*$  und  $R_2^*$  angegeben, zwischen denen es keinen die Anordnung erhaltenden Isomorphismus gibt. Dazu sei  $R$  der rationale Zahlkörper, ferner seien  $t_1$  und  $t_2$  zwei algebraisch unabhängige Transzendente und schließlich sei jeweils  $R_i$  (für  $i = 1, 2$ ) der reelle Abschluß von  $R(t_i)$ . Dann wird ein Beispiel der genannten Art durch die beiden Körper  $R_i^*$  gebildet, deren Elemente die Reihen

$$a = \sum_{j=-m}^{\infty} a_j x^{j/n} \text{ mit } a_j \text{ aus } R_i \text{ und } n = 1, 2, 3, \dots, m = 0, 1, 2, \dots \text{ sind.}$$

P. Wolf.

**Nagahara, Takasi:** On primitive elements of Galois extensions of division rings. Math. J. Okayama Univ. **6**, 23—28 (1956).

Wie Ref. gezeigt hat (dies. Zbl. **44**, 266), besitzt eine endliche, galoissche Schiefkörpererweiterung  $L/K$ , bei der das Zentrum des Zentralisators von  $K$  in  $L$  separabel über dem Zentrum von  $L$  ist, stets zwei bezüglich eines inneren Automorphismus konjugierte erzeugende Elemente über  $K$ :  $L = K(d, u du^{-1})$ . Unter der gleichen Separabilitätsvoraussetzung verallgemeinert Verf. dieses Ergebnis auf Zwischenkörper: Sei  $D$  ein Schiefkörper zwischen  $K$  und  $L$ , sei  $\mathfrak{S}$  die Gruppe der inneren Automorphismen von  $L/K$  und bezeichne  $\{x\}^{\mathfrak{S}}$  die Bildmenge von  $x \in L$  bei  $\mathfrak{S}$ . Liegen dann für jedes Element  $x \in D$  nur endlich viele Elemente aus  $\{x\}^{\mathfrak{S}}$  nicht in  $D$ , dann gilt:  $D = K(d, u du^{-1})$  mit  $u \in D$ . F. Kasch.

**Nagahara, Takasi:** On generating elements of Galois extensions of division rings. Math. J. Okayama Univ. **6**, 181—190 (1957).

Der im vorstehenden Referat angegebene Satz wird von der dort gemachten Separabilitätsvoraussetzung befreit. Ferner werden hinreichende Bedingungen für die Existenz eines erzeugenden Elementes angegeben. F. Kasch.

**Nagahara, Takasi and Hisao Tominaga:** On Galois theory of division rings. Math. J. Okayama Univ. **6**, 1—21 (1956).

Die Galoissche Theorie wurde bisher einerseits für beliebige galoissche Schiefkörpererweiterungen endlichen Ranges und andererseits für im kleinen endliche Schiefkörpererweiterungen unendlichen Ranges mit nur äußeren Automorphismen entwickelt (N. Jacobson, Structure of rings, New York 1956). Kürzlich zeigte dann N. Nobusawa (dies. Zbl. **64**, 273; **71**, 33), daß man im zweiten Falle in der Galoisgruppe noch endlich viele innere Automorphismen zulassen kann, wodurch jedoch der erste Fall noch nicht umfaßt wird. Den Verff. gelingt es durch weiteren Ausbau des Ansatzes von N. Nobusawa eine einheitliche Theorie zu entwickeln, die beide Fälle enthält. Es werden die beiden folgenden Voraussetzungen über die Galoisgruppe  $\mathfrak{G}$  einer galoisschen Schiefkörpererweiterung  $L/K$  gemacht: (1)  $\mathfrak{G}$  sei lokal endlichdimensional; d. h. für jede endliche Teilmenge  $M \subseteq L$  sei  $(K(M^{\mathfrak{G}}):K)_i < \infty$ , wobei  $M^{\mathfrak{G}}$  die Menge der Bilder von  $M$  bei  $\mathfrak{G}$  ist. (2)  $\mathfrak{G}$  sei lokal kompakt im Sinne der finiten Topologie. Die Bedeutung dieser Voraussetzungen wird durch



den Satz gekennzeichnet, daß (2) unter Voraussetzung von (1) zu der Endlichkeit des Ranges des Zentralisators von  $K$  in  $L$  über dem Zentrum von  $L$  äquivalent ist. Als Hauptsatz wird gezeigt, daß eine eindeutige galoissche Zuordnung zwischen den Schiefkörpern zwischen  $K$  und  $L$  einerseits und den topologisch und algebraisch abgeschlossenen Untergruppen von  $\mathfrak{G}$  andererseits besteht. Zum Schluß werden vier bemerkenswerte Beispiele für Erweiterungen unendlichen Ranges angegeben, die die Unabhängigkeit gewisser Eigenschaften aufzeigen. *F. Kasch.*

**Tominaga, Hisao:** Galois theory of simple rings. Math. J. Okayama Univ. 6, 29—48 (1956).

Es handelt sich um eine Ausdehnung der im vorhergehenden Referat besprochenen Galoisschen Theorie auf einfache Ringe  $S/R$ . Dabei werden die folgenden Voraussetzungen gemacht, die im Falle eines Schiefkörpers  $R$  mit (1) und (2) (siehe vorstehendes Referat) äquivalent sind: (I) Zu jeder endlichen Teilmenge  $F$  von  $S$  existiert ein einfacher, über  $R$  normaler und endlicher Unterring  $N$  von  $S$  mit  $F \subseteq N$ . (II) Der Zentralisator von  $R$  in  $S$  besitzt einen endlichen Rang über dem Zentrum von  $S$ . Ein Ring  $S'$  zwischen  $R$  und  $S$  heißt regulär, wenn sowohl  $S'$  als auch der Zentralisator von  $S'$  in  $S$  einfache Ringe sind. Eine Untergruppe  $\mathfrak{G}'$  der Galoisgruppe  $\mathfrak{G}$  von  $S/R$  heißt regulär, wenn der Fixring  $S'$  von  $\mathfrak{G}'$  regulär ist und  $\mathfrak{G}'$  alle inneren Automorphismen von  $S/S'$  enthält. Als Hauptsatz gilt jetzt, daß eine eindeutige galoissche Zuordnung zwischen den regulären Ringen zwischen  $R$  und  $S$  und den topologisch abgeschlossenen, regulären Untergruppen von  $\mathfrak{G}$  besteht. *F. Kasch.*

**Seidenberg, A.:** Contribution to the Picard-Vessiot theory of homogeneous linear differential equations. Amer. J. Math. 78, 808—818 (1956).

$F$  sei ein differenzierbarer Körper der Charakteristik 0 mit dem Konstantenkörper  $C$ . Ist dann  $\eta$  eine Lösung einer vorgegebenen linearen homogenen Differentialgleichung mit Koeffizienten aus  $F$ , so ist der Konstantenkörper  $D$  von  $F\langle\eta\rangle$  im allgemeinen eine echte Erweiterung von  $C$ . Nach einem Ergebnis von E. R. Kolchin (dies. Zbl. 37, 66) kann  $\eta$  stets so gewählt werden, daß  $D$  algebraisch über  $C$  ist. Weiter zeigte M. P. Epstein (dies. Zbl. 67, 17), daß man sogar ein Fundamentalsystem  $\eta_1, \dots, \eta_n$  gewinnen kann, bei dem der Konstantenkörper von  $F\langle\eta_1, \dots, \eta_n\rangle$  normal über  $C$  ist. Verf. gibt am Ende der Arbeit ein Beispiel für eine Differentialgleichung zweiter Ordnung, bei der tatsächlich  $D \neq C$  gilt, und behandelt allgemein die Frage, unter welchen Bedingungen  $D = C$  gilt. Hierbei beziehen sich alle Ergebnisse ausschließlich auf den Fall von Gleichungen der Ordnung 2. — Bei der Behandlung der Gleichung (1)  $y'' = q y' + p y$  kann man sich auf den Fall  $p \neq 0$  beschränken. Durch die Substitution  $u = y'/y$  erhält man (2)  $u' = p + q u - u^2$ , und (2) besitzt genau dann eine Lösung, die den Konstantenkörper nicht erweitert, wenn (1) eine solche (nicht-triviale) Lösung besitzt. Das Hauptergebnis lautet: Ist  $u$  eine Lösung von (2) und ist der Konstantenkörper von  $F\langle u \rangle$  eine einfache transzendente Erweiterung von  $C$ , so besitzt (1) eine nicht-triviale Lösung  $\eta_1$ , bei der  $C$  der Konstantenkörper von  $F\langle\eta_1\rangle$  ist. Diese Lösung kann sogar zu einem Fundamentalsystem  $\eta_1, \eta_2$  ergänzt werden, so daß  $C$  auch noch der Konstantenkörper von  $F\langle\eta_1, \eta_2\rangle$  ist. Umgekehrt gilt: Es sei  $u$  die allgemeine Lösung von (2), und  $C'$  sei der Konstantenkörper von  $F\langle u \rangle$ . Dann ist  $C' = C$  oder  $C'$  ist ein algebraischer Funktionenkörper in einer Variablen über  $C$  vom Geschlecht 0. Nur wenn im zweiten Fall  $C'$  eine einfache transzendente Erweiterung von  $C$  ist, besitzt (2) eine Lösung  $u_0$ , für die  $C$  der Konstantenkörper von  $F\langle u_0 \rangle$  ist. *H.-J. Kowalsky.*

## Zahlentheorie:

**Obláth, Richard:** Une propriété des puissances parfaites. Mathesis 65, 356—364 (1956).

Let in the decimal system the digit  $a$  be written  $k$  times in juxtaposition. The author proves that  $\underbrace{a a a \cdots a}_k$  is never a perfect  $n$ 'th power,  $n > 1$ ,  $k > 1$ , if  $a \neq 1$ .

This is easily seen for  $a = 2, 4, 5, 6$ , and a simple proof is given in case  $a = 9$ . In the remaining cases the proof is more involved and is based on some theorems, due to T. Nagell and the reviewer, concerning diophantine equations of the form  $(x^m - 1)/(x - 1) = c y^n$ . For  $a = 1$  only special results are obtained, e. g.  $\underbrace{11 \cdots 1}_k$

is never a power if  $k$  is even or divisible by 3. At last some results concerning other bases than 10 are given.

W. Ljunggren.

Schäffer, Juan Jorge: A result in elementary number theory. Nieuw Arch. Wiskunde, III. Ser. 4, 118—123 (1956).

The following theorem is proved: Let  $n$  be a positive integer. For  $p$  an odd prime, set  $n = \sum_{i=0}^{t(p)} n_{ip} \cdot p^i$ , where  $0 \leq n_{ip} \leq p - 1$ . Then the condition

$\sum_{i=0}^{t(p)} n_{ip} \leq p - 1$  is satisfied for all primes  $p$ , if and only if  $n$  is one of the numbers 1, 2, 3, 4, 6, 10, 12, 28, 30, 36. Indeed the result holds if  $p$  is restricted to the values 3, 5, 7, 11, 13. A modified form of this theorem was used as a lemma in an earlier paper of the author (this Zbl. 71, 27).

W. Ljunggren.

Bernhard, Herbert A.: On the infinitude of primitive  $k$ -nondeficients. Proc. Amer. math. Soc. 7, 468—471 (1956).

Sei  $\sigma(n) = \sum_{d|n} d$ . Verf. untersucht die natürlichen Zahlen  $n$ , welche  $\sigma(n)/n \geq k > \sigma(d)/d$  für  $d | n$ ,  $d < n$  bei gegebenem  $k$  erfüllen. Shapiro zeigte 1949 (dies.

Zbl. 33, 250), daß für  $k$  die Gestalt  $k = \prod_{i=1}^m \sigma(p_i^{\alpha_i}) p_i^{-\alpha_i} \cdot \prod_{i=m+1}^r \frac{p_i}{p_i - 1}$ ;

$0 \leq m \leq r$  mit paarweise verschiedenen Primzahlen  $p_i$  eine notwendige Bedingung dafür darstellt, daß es unendlich viele  $n$  mit genau  $s$  (fest) verschiedenen Primteilern gibt, welche die eingangs erwähnten Bedingungen erfüllen. Verf. zeigt, daß für jedes  $k$  der obigen Gestalt unendlich viele  $n$  mit höchstens  $r + 1$  verschiedenen Primteilern existieren. Die Arbeit enthält einige Ungenauigkeiten. Die Beweise sind elementar.

H. J. Kanold.

Carlitz, L.: A note on Gauss' sum. Proc. Amer. math. Soc. 7, 910—911 (1956).

Verf. gibt unter Benutzung einiger Sätze aus der Theorie der Kreisteilung einen einfachen Beweis für die wohlbekannte Formel:  $\sum_{n=0}^{p-1} e^{2\pi i n^2/p} = i^{[(p-1)/2]^2} p^{1/2}$  ( $p$  eine ungerade Primzahl).

H. W. Leopoldt.

Carlitz, L.: A note on Gauss' „Serierum singularium“. Portugaliae Math. 15, 9—12 (1956).

Es sei  $(x)_0 = 1$  und für  $m \geq 1$   $(x)_m = (1 - x)(1 - x^2) \cdots (1 - x^m)$  sowie  $\left[ \begin{smallmatrix} m \\ r \end{smallmatrix} \right] = \frac{(x)_m}{(x)_r (x)_{m-r}}$  gesetzt. Verf. zeigt, daß sich die folgende und ähnliche Identitäten von Gauß:  $\sum_{r=0}^{2m} (-1)^r \left[ \begin{smallmatrix} 2m \\ r \end{smallmatrix} \right] = \prod_{r=1}^{2m-1} (1 - x^r)$  einfacher als bisher üblich aus der

Identität von Euler:  $\sum_{m=0}^{\infty} \frac{t^m}{(x)_m} = \prod_{m=0}^{\infty} (1 - x^m t)^{-1}$  gewinnen lassen. Verallgemeinerungen werden gegeben und die erhaltenen Formeln auf die Bestimmung der Gaußschen Summe angewandt.

H. W. Leopoldt.

Carlitz, L.: An application of a theorem of Stickelberger. Simon Stevin 31, 27—30 (1956).



Es sei  $f(x) = x^n + a_1 x^{n-1} + \dots + a_n$  ( $n \geq 1$ ) ein Polynom mit ganzen rationalen Koeffizienten von der Diskriminante  $D (\neq 0)$  und  $p$  eine ungerade Primzahl mit  $p \nmid D$ . Nach Stickelberger ist  $\left(\frac{D}{p}\right) = (-1)^{n-s}$ , wobei  $s$  die Anzahl der mod  $p$  irreduziblen Faktoren von  $f(x)$  ist. Das läßt sich im Primkörper  $GF(p)$  von der Ordnung  $p$  als  $\psi(D) = (-1)^{n-s}$  aussprechen, wobei jetzt  $a_1, \dots, a_n$  in diesem Körper angenommen werden,  $D (\neq 0)$  wieder die Diskriminante von  $f(x)$ ,  $s$  die Anzahl der irreduziblen Faktoren von  $f(x)$  im Polynomring  $GF(p)[x]$  und  $\psi$  den quadratischen Charakter in  $GF(p)$  bezeichnet. In dieser Form gilt der Satz nach Ref. (dies. Zbl. 30, 195) allgemeiner für jeden endlichen Körper  $GF(q)$  von einer Ordnung  $q = p^t$  an Stelle von  $GF(p)$ . Hier wird derselbe Beweis wiederholt; ferner wird dem Satz die folgende äquivalente Form gegeben: Ist  $f(x, u)$  ein Polynom aus  $GF(q)[x, u]$  vom Grad  $n$  und von der Diskriminante  $D(u) (\neq 0)$  bezüglich  $x$ , ist ferner  $P(u)$  ein in  $D(u)$  nicht aufgehendes irreduzibles Polynom aus  $GF(q)[u]$ , so ist das in diesem Polynomring erklärte Legendresche Symbol  $(D(u)/P(u))$  gleich  $(-1)^{n-s}$ , wobei  $s$  die Anzahl der mod  $P(u)$  irreduziblen Faktoren von  $f(x, u)$  bezeichnet. Die Äquivalenz beider Sätze folgt aus der Isomorphie von  $GF(q)[u]/P(u)$  mit  $GF(q^{\text{Grad } P(u)})$ . Aus obigem (auf  $GF(q)$  bezüglichem) Satz selbst in Verbindung mit früheren Ergebnissen vom Verf. (dies. Zbl. 5, 387) gewinnt er als leichte Anwendung das folgende Theorem. Es sei  $D(a_1, \dots, a_n)$  die Diskriminante von  $f(x) = x^n + a_1 x^{n-1} + \dots + a_n (\in GF(q)[x])$  für ein ungerades  $q = p^t$ . Dann haben  $D(\xi_1, \dots, \xi_n) = \eta^2$  bzw.  $D(\xi_1, \dots, \xi_n) = 0$  genau  $q^n$  Lösungen  $\xi_1, \dots, \xi_n, \eta$  bzw. genau  $q^{n-1}$  Lösungen  $\xi_1, \dots, \xi_n$  in  $GF(q)$ . L. Rédei.

**Carlitz, L.:** Weighted quadratic partitions over  $GF[q, x]$ . Duke math. J. 23, 493—505 (1956).

Es sei  $q = p^n$ , wo  $p$  eine Primzahl  $> 2$  und  $n$  ganz  $\geq 1$  ist. Der Ring aller Polynome in  $x$  mit Koeffizienten in dem endlichen Körper  $GF(q)$  werde durch  $GF[q, x]$  und der Körper aller Potenzreihen  $\xi = \sum_{j=0}^{\infty} c_j x^j$  (ebenfalls mit Koeffizienten in  $GF(q)$ ) werde durch  $\Phi$  bezeichnet. Weiter seien  $r$  und  $k$  vorgegebene ganze Zahlen  $\geq 1$ ;  $a_1, a_2, \dots, a_r$  seien gegebene Elemente  $\neq 0$  aus  $GF(q)$ ;  $M$  sei ein gegebenes Polynom aus  $GF[q, x]$  mit Grad  $\leq 2k$ . Verf. betrachtet die Lösungen  $U_i \in GF[q, x]$  von (A)  $a_1 U_1^2 + \dots + a_r U_r^2 = M$  und die über gewisse dieser Lösungen erstreckte Summe (B)  $\sum e(2U_1 \xi_1 + \dots + 2U_r \xi_r)$ . Dabei sind die  $\xi_i$  gegebene Elemente von  $\Phi$  und für ein Element  $\xi \in \Phi$  ist  $e(\xi) = \exp 2\pi i t(c_{-1})/p$  definiert, wo  $t$  die Spur in  $GF(q)$  bedeutet. Über die Lösungen von (A) über die die Summe (B) zu erstrecken ist, wird noch vorausgesetzt, daß  $U_1, \dots, U_l$  Polynome mit höchstem Koeffizienten 1 und vom Grade  $k$  sind und daß  $U_{l+1}, \dots, U_r$  willkürliche Polynome von einem Grade  $< k$  sein dürfen. Dabei ist  $0 \leq l \leq r$ . Für  $l = 0$  haben deshalb alle  $U_i$  einen Grad  $< k$ . Als Verallgemeinerung von früher von ihm erhaltenen Resultaten (dies. Zbl. 52, 38) zeigt Verf. jetzt, daß die Summe (B) durch einfachere Summen ausgedrückt werden kann, und zwar durch verallgemeinerte Gaußsche Summen und die Summen

$$K(A, B, H) = \sum_{(U, H) = 1} e\left(\frac{AU + BU'}{H}\right).$$

Dabei sind  $A, B, H$  Elemente von  $GF[q, x]$ ;  $U$  durchläuft ein vollständiges Restsystem modulo  $H$  und  $U U' \equiv 1 \pmod{H}$ . Bei der Auswertung von (B) ist es notwendig, die Fälle  $l = 0$  und  $l > 0$  getrennt zu betrachten. H. D. Kloosterman.

**Hodges, John H.:** Weighted partitions for general matrices over a finite field. Duke math. J. 23, 545—552 (1956).

Es sei  $GF(q)$  der endliche Körper mit  $q = p^n$  Elementen, wo  $p$  eine Primzahl und  $n$  ganz  $\geq 1$  ist. Es sei  $t(\alpha)$  die Spur des Elementes  $\alpha$  von  $GF(q)$  und  $e(x) =$

$\exp \{2\pi i t(\alpha)/p\}$ . Es seien weiter  $W, R, A, B$  Matrizen mit Elementen in  $GF(q)$ , von denen  $A$  und  $B$  quadratisch mit Reihenzahl  $m$  bzw.  $t$ , während  $W$  als  $(m \times t)$ -Matrix und  $R$  als  $(t \times m)$ -Matrix vorausgesetzt wird. Die Matrix  $A$  sei nicht-singulär. Verf. betrachtet die Summe  $S = S(B, W, R, A) = \sum e\{\sigma(UW + RV)\}$ . Hier durchlaufen  $U$  und  $V$  alle  $(t \times m)$ - bzw.  $(m \times t)$ -Matrizen mit Elementen in  $GF(q)$  derart, daß  $UA = V = B$ , und  $\sigma$  bedeutet die Matrix-Spur. Verf. drückt die Summe  $S$  durch einfachere Summen  $K(A, B) = \sum e\{-\sigma(BC + C^{-1}A)\}$  aus, wo  $A, B$  jetzt quadratische  $(t \times t)$ -Matrizen sind und  $C$  alle nicht-singulären  $(t \times t)$ -Matrizen durchläuft. Überdies beweist er einige Eigenschaften dieser Summen  $K(A, B)$ .

H. D. Kloosterman.

**Costa, Newton Carneiro Affonso da:** Einige elementare Sätze über Teilbarkeit. Soc. Paranaense Mat., Anuário 3, 60—63 (1956) [Portugiesisch].

**Golomb, Solomon W.:** Properties of consecutive integers. Nordisk mat. Tidskrift 4, 24—29 (1956).

$k, M$  seien beliebig gegebene natürliche Zahlen. Verf. beweist die folgenden Sätze. 1. Es gibt eine natürliche Zahl  $c_1$  so, daß  $c_1 + \kappa \equiv b_\kappa \pmod{a_\kappa}$  gilt, wobei die  $b_\kappa$  beliebig vorgegeben und die  $a_\kappa$  paarweise teilerfremd sind ( $\kappa = 1, \dots, k$ ). 2. Es gibt eine natürliche Zahl  $c_2$  so, daß für die Möbius-Funktion  $\mu(c_2 + \kappa) = 0$  gilt ( $\kappa = 1, \dots, k$ ). 3. Es gibt  $c_3$  bzw.  $c_4$  so, daß für die Euler-Funktion bzw. die Summe aller Teiler  $\varphi(c_3 + \kappa) \equiv 0 \pmod{M}$  bzw.  $\sigma(c_4 + \kappa) \equiv 0 \pmod{M}$  gilt ( $\kappa = 1, \dots, k$ ). Die Beweise sind elementar. Bei 3. wird von dem Dirichletschen Satz über die Primzahlen in arithmetischen Folgen Gebrauch gemacht.

H. J. Kanold.

**Fjellstedt, Lars:** A theorem concerning the least quadratic residue and non-residue. Ark. Mat. 3, 287—291 (1956).

Verf. behauptet die Richtigkeit des folgenden Satzes: Ist  $\psi^*(p; 2)$  die kleinste ungerade Primzahl, welche quadratischer Nichtrest  $\pmod{p}$ , und  $\pi^*(p; 2)$  die kleinste ungerade Primzahl, welche quadratischer Rest  $\pmod{p}$  ist, wobei  $p$  eine ungerade Primzahl sein soll, dann ist für  $p > p_0$  sowohl  $\psi^*(p; 2) < 6 \log p$  als auch  $\pi^*(p; 2) < 6 \log p$ . Der Beweis macht wiederholt Gebrauch von dem Hauptsatz über simultane Kongruenzen. Dem Ref. scheint er aber nicht schlüssig zu sein, da man auf die gleiche Art beweisen könnte, daß bei hinreichend großem  $n$  für die  $(n+1)$ -te Primzahl  $p_{n+1}$  und die  $n$ -te Primzahl  $p_n$  die Ungleichung  $p_n < 6 \log p_{n+1}$  gilt, was sicher falsch ist.

H. J. Kanold.

**Lehmer, D. H.:** On the diophantine equation  $x^3 + y^3 + z^3 = 1$ . J. London math. Soc. 31, 275—280 (1956).

The following theorem is proved: If we define the sequence of triples of integers  $(x_k, y_k, z_k)$  by the initial values  $(x_0, y_0, z_0) = (9t^4, 3t - 9t^4, 1 - 9t^3)$ ,  $(x_1, y_1, z_1) = (9t^4, -3t - 9t^4, 1 + 9t^3)$  and by the recurrences  $x_{n+1} = 2ax_n - x_{n-1} - b$ ,  $y_{n+1} = 2ay_n - y_{n-1} - b$ ,  $z_{n+1} = 2az_n - z_{n-1} + a + 5$ , where  $a = 216t^5 - 1$ ,  $b = 108t^4$  and  $t$  is an integer parameter, then  $(x_k, y_k, z_k)$  is a solution of the diophantine equation (1)  $x^3 + y^3 + z^3 = 1$ . Noting that  $1 - z_0 = 3t^2(x_0 + y_0)$ , the author puts (2)  $1 - z = 3t^2(x + y)$ . Together (1) and (2) imply an indeterminate equation in  $x$  and  $y$  of the second degree, the solutions of which can be obtained from those of the Pell equation  $\xi^2 - (3/2)(a - 1)\eta^2 = 1$ , with the fundamental solution  $\xi_1 = a$ ,  $\eta_1 = 12t^3$ . Further is given an explicit expression for  $x_k, y_k$  and  $z_k$ . There are also other solutions of (1), not included in the parametric solutions given above. These are solutions  $(x, y, z)$  for which  $\alpha(x + y) = 1 - z$  for some integer  $\alpha$ ,  $\alpha \neq 3t^2$ . An unlimited number of solutions are obtained for  $\alpha = 4$ . The case  $\alpha = 7$  is remarkable because of the size of the derived solutions.

W. Ljunggren.

**Mordell, L. J.:** The diophantine equation  $x^3 + y^3 + z^3 + kxyz = 0$ . Centre Belge Rech. math., Colloque Théorie des Nombres, Bruxelles 19—21 déc. 1955, 67—76 (1956).

A. Hurwitz (this Zbl. 7, 195; pp. 465—468) has proved that the title equation



with  $k \neq 1, -5$  has either an infinity of integer solutions with  $(x, y, z) = 1$  or only three. In this paper the author proves that there are only six solutions when  $k = 1, -5$ , namely  $(1, 1, -1)$ ,  $(1, -1, 0)$ , etc. and  $(1, 1, 2)$ ,  $(1, -1, 0)$ , etc. respectively. In the proof the method of infinite descent is applied. *W. Ljunggren.*

**Buquet, A.: Démonstration élémentaire du théorème de Mordell-Weil pour l'équation diophantienne en nombres rationnels  $X(X^2 + CX + D) = Z^2$ .** Mathesis 65, 379—390 (1956).

Es seien  $A$  und  $B$  ganze rationale Zahlen und  $x^3 - Ax - B$  ein Polynom, dessen Nullstellen voneinander verschieden sind. Wenn auf der Kurve  $(1) y^2 = x^3 - Ax - B$  unendlich viele rationale Punkte  $(x, y)$  liegen, so erhält man alle diese Punkte dadurch, daß man von einer endlichen Anzahl von Basispunkten ausgeht und die Schnittpunkte zwischen  $(1)$  und den Geraden durch bekannte rationale Punkte von  $(1)$  bestimmt, siehe L. J. Mordell [Proc. Cambridge philos. Soc. 21, 179—192 (1922)]. Ein anderer Beweis ist von A. Weil [Bull. Sci. math., II. Sér. 54, 182—191 (1930)] angegeben. Die vorliegende Arbeit gibt einen elementaren Beweis des Satzes für den im Titel genannten Sonderfall von  $(1)$ , daß  $C$  und  $D$  ganz rational sind. Der Beweis verläuft wie bei Weil, benutzt aber einige Resultate von Rignaux über die Kurve  $X^4 + CX^2Y^2 + DY^4 = Z^2$ . *B. Stoll.*

**Ginatempo, Nicola: Sulla risoluzione in numeri interi della equazione  $x^4 - 8y^4 - 8y^2z = z^2$ .** Atti. Soc. Peloritana Sci. fis. mat. natur. 2, 13—25 (1956).

Sucht man alle rechtwinkligen Dreiecke mit ganzzahligen Seitenlängen, für die a) die Differenz aus der Hypotenuse und der Differenz der Katheten das doppelte eines Quadrates ist und b) die Summe der Katheten ein zweites Quadrat ist, so führt dies zur diophantischen Gleichung  $(1) x^4 - 8y^4 - 8y^2z - z^2 = 0$ . Die Arbeit ist fehlerhaft. So ist  $x = 1, y = 0, z = 0$  ein Gegenbeispiel zur Behauptung des Verf. auf Seite 14 oben, und  $(1)$  läßt sich nicht zerlegen in  $(x^2 - 2y^2)(x^2 + 2y^2) - (z + 2y^2)^2 = 0$ . *N. Hofreiter.*

**Postnikov, A. G.: Eigenschaften der Lösungen von diophantischen Ungleichungen im Körper der formalen Potenzreihen.** Mat. Sbornik, n. Ser. 40 (82), 295—302 (1956) [Russisch].

Proofs of the results already announced in the note reviewed in this Zbl. 70, 45.

*K. Mahler.*

**Meinardus, Günter: Zur additiven Zahlentheorie in mehreren Dimensionen. I.** Math. Ann. 132, 333—346 (1956).

Verf. bemerkt, daß viele Probleme aus der rationalen additiven Zahlentheorie, die in der letzten Zeit auf algebraische Zahlkörper verallgemeinert wurden (wie z. B. Partitionenprobleme), sich ausschließlich auf die additive Gruppe dieser Körper beziehen. Er macht deshalb einen Ansatz zur Behandlung solcher Probleme unter Verzicht auf das Vorhandensein von multiplikativen Gruppen, d. h. also für Gitter in linearen Vektorräumen. Er führt folgende Bezeichnungen ein. Reelle Spaltenvektoren  $\mathfrak{x}$  (bezeichnet durch kleine deutsche Buchstaben) heißen total-positiv (in Zeichen  $\mathfrak{x} > 0$ ), wenn alle Komponenten positiv sind. Die Norm  $N$   $\mathfrak{m}$  eines Vektors ist das Produkt aller Komponenten von  $\mathfrak{m}$ . Total-positive Vektoren  $\mathfrak{z}$  mit Komponenten  $z_1, z_2, \dots, z_n$ , die nach 0 oder  $\infty$  streben, sollen reduziert heißen, wenn es zwei positive von  $\mathfrak{z}$  unabhängige Konstanten  $c_0, c_1$  mit  $c_0(N \mathfrak{z})^{1/n} < z_v < c_1(N \mathfrak{z})^{1/n}$  ( $v = 1, 2, \dots, n$ ) gibt. Der Grenzübergang wird alsdann durch  $\mathfrak{z} \Rightarrow 0$  bzw.  $\mathfrak{z} \Rightarrow \infty$  angedeutet. Verf. beweist jetzt einen Tauberschen Satz folgender Art: Es sei  $A(\mathfrak{x})$  eine reelle Funktion des Vektors  $\mathfrak{x}$  mit den Komponenten  $x_1, x_2, \dots, x_n$  und mit den Eigenschaften:  $A(\mathfrak{x}) \leq A(\mathfrak{x}_1)$  für  $\mathfrak{x} \leq \mathfrak{x}_1$  und  $A(\mathfrak{x}) = 0$ , wenn mindestens eine der Komponenten von  $\mathfrak{z}$  kleiner oder gleich Null ist. Für  $\mathfrak{z} \Rightarrow 0$  habe die Funktion

$$f(\mathfrak{z}) = N \mathfrak{z} \int_0^\infty \dots \int_0^\infty A(\mathfrak{x}) e^{-\mathfrak{z}'\mathfrak{x}} dx_1 \dots dx_n$$

(das Integral wird für  $\mathfrak{z} > 0$  konvergent vorausgesetzt;  $\mathfrak{z}' \mathfrak{x}$  bedeutet das innere Produkt der Vektoren  $\mathfrak{z}$  und  $\mathfrak{x}$ ) das asymptotische Verhalten  $\log f(\mathfrak{z}) = \varphi(\mathfrak{z}) (1 + o(1))$ . Unter gewissen Bedingungen für die Funktion  $\varphi(\mathfrak{z})$  gilt dann für  $\mathfrak{x} \Rightarrow \infty$ : (A)  $\log A(\mathfrak{x}) = (\varphi(\mathfrak{z}) + \mathfrak{z}' \mathfrak{x}) (1 + o(1))$ . Die erwähnten Bedingungen für  $\varphi(\mathfrak{z})$  haben einen ziemlich komplizierten Wortlaut. Eine von diesen Bedingungen ist die Lösbarkeit des Gleichungssystems  $x_i = -\partial\varphi/\partial z_i$  ( $i = 1, 2, \dots, n$ ) durch einen total-positiven Vektor  $\mathfrak{z}$  derart, daß  $\mathfrak{z} \Rightarrow 0$  mit  $\mathfrak{x} \Rightarrow \infty$  gleichbedeutend ist. Diese Lösung ist eindeutig bestimmt und ist das in (A) auftretende  $\mathfrak{z}$ . Als Anwendung beweist Verf. folgenden Satz über Partitionen: Für ein  $n$ -dimensionales Gitter in einem  $n$ -dimensionalen euklidischen Raum sei  $P(g)$  die Anzahl der additiven Zerlegungen  $g = w_1 + w_2 + \dots$  des Gittervektors  $g$  in total-positive Gittervektoren  $w_1, w_2, \dots$ , wobei zwei Zerlegungen nur einmal gezählt werden, wenn sie durch eine Permutation der  $w_i$  auseinander hervorgehen. Für  $g \Rightarrow \infty$  gilt dann

$$\log P(g) = (n+1) \left\{ \frac{\zeta(n+1)}{\sqrt{d}} N g \right\}^{1/(n+1)} (1 + o(1)).$$

Hier ist  $d$  die Diskriminante des Gitters und  $\zeta$  ist die Riemannsche Zeta-Funktion. Als Spezialfall ist hierin natürlich ein Partitionssatz für algebraische Zahlkörper enthalten.

H. D. Kloosterman.

Vinogradov, A. I.: Über ein „fast binäres“ Problem. Izvestija Akad. Nauk SSSR, Ser. mat. 20, 713—750 (1956) [Russisch].

Die Resultate waren schon in einer früheren Note (dies. Zbl. 65, 29) angezeigt worden. Verf. zeigt: Die hinreichend große ganze Zahl  $N$  sei in der Form  $N = a_0 + a_1 p + a_2 p^2 + \dots + a_R p^R$  dargestellt. Dann genügt es, höchstens  $k$ , wobei  $k$  eine absolute Konstante bezeichnet, der Koeffizienten um  $\pm 1$  abzuändern, um eine Zahl zu erhalten, die als Summe von zwei Primzahlen darstellbar ist. Ein schöner Satz, daß es nämlich genügt, unter den ersten  $M (= \lceil (\log N / \log p)^{1/m} \rceil, m$  eine feste natürliche Zahl) Zahlen diese Abänderung vorzunehmen, wird unter der Annahme der erweiterten Riemannschen Vermutung für die Dirichletschen  $L$ -Reihen bewiesen. Der Beweis folgt der Methode von Linnik (dies. Zbl. 51, 34), der zuerst einen derartigen, etwas spezielleren „fast-Goldbachschen“ Satz bewies.

H.-E. Richert.

Petersson, Hans: Über Partitionenprobleme in Verbindung mit Potenzresten nach einem Primzahlmodul. Math. Z. 66, 241—268 (1956).

Es sei  $l$  eine ganze Zahl  $\geq 2$  und  $q$  eine Primzahl mit  $q \equiv 1 \pmod{2l}$ ,  $q > 2l + 1$ . Die Menge der nicht durch  $q$  teilbaren ganzen Zahlen wird so in  $l$  Klassen eingeteilt, daß zwei dieser Zahlen dann und nur dann zur selben Klasse gehören, falls sie sich modulo  $q$  um einen  $l$ -ten Potenzrest als Faktor unterscheiden. Die  $l$ -ten Potenzreste  $\not\equiv 0 \pmod{q}$  bilden dabei eine Klasse  $\mathfrak{P}$  und eine beliebige Klasse kann durch  $s\mathfrak{P}$  bezeichnet werden, wenn  $s$  irgendeine Zahl dieser Klasse ist. Jeder dieser  $l$  Klassen  $s\mathfrak{P}$  werde eine ganze Zahl  $k_s \geq 0$  zugeordnet (es ist also  $k_s = k_r$ , falls  $s$  und  $r$  derselben Klasse angehören), und es wird  $k = \sum_{s \in \mathfrak{P}} k_s > 0$  vorausgesetzt, wo  $\mathfrak{P}$  ein vollständiges Vertretersystem der Klassen ist. Verf. untersucht das folgende Partitionenproblem: Man denke sich die natürlichen Zahlen  $m$  der Klasse  $s\mathfrak{P}$  in  $k_s$  verschiedenen Farben realisiert. Bei festen  $q, l$  sei  $\pi_n(\mathfrak{f})$  ( $\mathfrak{f}$  symbolisiert den Vektor der  $l$  Zahlen  $k_s$ ) die Anzahl der Partitionen der natürlichen Zahl  $n$  in durch  $q$  nicht teilbare Summanden, wobei die Summanden aus  $s\mathfrak{P}$  in den  $k_s$  vorbestimmten Farben erscheinen. Zwei solche Partitionen gelten als gleich, wenn in beiden die gleichen Summanden auftreten und wenn jeder Summand in beiden in jeder der für ihn vorbestimmten Farben gleich oft auftritt. Das Verschwinden eines  $k_s$  besage, daß überhaupt keine Summanden aus  $s\mathfrak{P}$  verwendet werden. Es ist dann

$$\sum_{n=0}^{\infty} \pi_n(\mathfrak{f}) u^n = \prod_{s \in \mathfrak{P}} \Phi_s^{-k_s}(u), \quad \Phi_s(u) = \prod_{m=1}^{\infty} \binom{e}{m} (1 - u^m),$$



wo das (s) angeben soll, daß  $m$  nur die Zahlen von  $s\mathfrak{P}$  durchläuft. Verf. wendet jetzt die allgemeinen Methoden aus einer früheren Abhandlung an (dies. Zbl. 57, 68), die für das vorliegende spezielle Problem zu erheblich schärferen Ergebnissen weitergeführt werden können. Mit  $u = \exp 2\pi i \tau/q$  muß zunächst das Verhalten der obigen Funktionen bei Modulsstitutionen in  $\tau$  untersucht werden. Die Funktionen  $\Phi_s$  reproduzieren sich bis auf Multiplikatoren unter der Gruppe  $\Gamma^*$  aller Modulmatrizen  $\begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix}$  mit  $\alpha \in \mathfrak{P}$ ,  $\beta \equiv 0 \pmod{q}$ . Verf. bestimmt das Geschlecht dieser Gruppe (was allerdings für das vorliegende Problem nicht erforderlich ist). Als Resultat erhält er weiter Reihendarstellungen und asymptotische Formeln für  $\pi_n(\mathfrak{f})$ . Schließlich sei  $\pi_n^{(s)}$  die Anzahl der Partitionen von  $n$ , deren Summanden zu  $s\mathfrak{P}$  gehören. Verf. gewinnt dann eine asymptotische Formel

$$|\log [\pi_n^{(s^{-1})}/\pi_n^{(t^{-1})}]|_{s \neq 1 \neq t} = R h [1 + C_1(q)/\sqrt{n} + O(1/n)],$$

wo die linke Seite eine regulator-artige Determinante ist ( $s$  und  $t$  sind in einem Vertretersystem  $\mathfrak{P}$  zu wählen). Die Größen auf der rechten Seite haben folgende Bedeutung: Es sei  $K$  der durch  $\mathfrak{P}$  eindeutig bestimmte absolut-abelsche Körper (Klassenkörper: die Galoissche Gruppe ist isomorph mit der Faktorgruppe der Gruppe aller zu  $q$  primen ganzen und gebrochenen rationalen Zahlen nach  $\mathfrak{P}$ ). Dann ist  $R$  der Regulator der Grundeinheiten und  $h$  die Klassenzahl dieses Körpers  $K$ . Weiter ist  $C_1(q)$  ein komplizierter Ausdruck, der die Logarithmen der Kreiseinheiten enthält, sowie die mit  $l$ -ten Potenzen im Exponenten gebildeten Gaußschen Summen und überdies noch Koeffizienten von Polynomen, die man erhält, wenn man das Kreisteilungspolynom  $u^{q-1} + u^{q-2} + \dots + u + 1$  in irreduzible Faktoren über  $K$  mit höchstem Koeffizienten 1 zerlegt und diese Faktoren als Polynom in  $u - 1$  schreibt. Für  $l = 2$  hängt  $C_1(q)$ , wie Verf. früher gezeigt hat (dies. Zbl. 71, 41), mit der Anzahl der Darstellungen von  $q$  als Summe von fünf Quadraten zusammen.

H. D. Kloosterman.

**Errera, A.:** Sur le théorème fondamental des nombres premiers. Centre Belge Rech. math., Colloque Théorie des Nombres, Bruxelles 19—21 déc. 1955, 111—118 (1956).

A minor simplification is made in E. Landau's proof of the prime number theorem (this Zbl. 6, 253) based on a paper of N. Wiener. J. P. Tull.

**Corput, J. G. van der:** Sur le reste dans la démonstration élémentaire du théorème des nombres premiers. Centre Belge Rech. math., Colloque Théorie des Nombres, Bruxelles 19—21 déc. 1955, 163—182 (1956).

Der berühmte elementare Beweis (von A. Selberg) des Primzahlsatzes  $\lim \pi(x) x^{-1} \log x = 1$  besteht aus einem ersten (leichteren) Teil, nämlich der Herleitung der sog. Selbergschen Gleichung

$$(*) \quad \frac{\vartheta(x)}{x} + \frac{1}{x \log x} \sum_{p \leq x} \vartheta\left(\frac{x}{p}\right) \log p = 2 + O\left(\frac{1}{\log x}\right)$$

für die bekannte Tschebyscheffsche Funktion

$$\vartheta(x) = \sum_{p \leq x} \log p,$$

und einem zweiten (schwierigeren) Teil, der aus (\*) den Primzahlsatz in der Fassung  $\lim x^{-1} \vartheta(x) = 1$  erreicht. Für diesen zweiten Teil gibt Verf. zunächst eine neue Variante, die geeignet ist, darüber hinaus durch Verfeinerung der Methode aus (\*) eine Restabschätzung

$$\vartheta(x) = x + O(x(\log x)^{-\varepsilon})$$

mit dem Exponenten  $\varepsilon = 1/200$  zu gewinnen. Andernorts hat übrigens M. P. Kuhn (dies. Zbl. 66, 33) bereits den Exponenten  $\varepsilon = 1/10$  erhalten. Möglicherweise läßt sich aus (\*) sogar die (optimale) Restabschätzung mit dem Exponenten  $\varepsilon = 1$  erzielen. (Mündlich von P. Erdős.)

W. Specht.

Cellitti, Carlo: Sopra una costruzione di sistemi di rappresentanti di classi di forme quadratiche binarie, primitive di prima e di seconda specie rispettivamente, di determinate  $D \equiv 1 \pmod{8}$ . Atti Accad. naz. Lincei, Rend., Cl. Sci. fis. mat. natur., VIII. Ser. **21**, 57—60 (1956).

Verf. zeigt: es gibt gleich viele Klassen von eigentlich primitiven binären quadratischen Formen  $ax^2 + 2bxy + cy^2$  der Determinante  $D = b^2 - ac$  wie von uneigentlich primitiven Formen derselben Determinante, wenn  $D \equiv 1 \pmod{8}$  ist.

*M. Eichler.*

Mouette, L.: Sur la théorie des formes quadratiques binaires. Mathesis **65**, 364—371 (1956).

Die Arbeit enthält hauptsächlich Beispiele zu allgemeinen, hier nicht bewiesenen Sätzen, und zwar a) über die Darstellung von Zahlen und ihren Potenzen durch binäre quadratische Formen, b) über die Anzahl der reduzierten binären quadratischen Formen mit gegebener Diskriminante und c) über die Anzahl der Klassen in einem Geschlecht.

*N. Hofreiter.*

Reiner, Irma: On the two-adic density of representations by quadratic forms. Pacific J. Math. **6**, 753—762 (1956).

Für ganzrationale, symmetrische Matrizen  $S$  und  $T$  bezeichne man mit  $A_q(S, T)$  die Anzahl der ganzrationalen, mod  $q$  inkongruenten Matrizen  $X$ , die der Kongruenz  $X' S X \equiv T \pmod{q}$  genügen.  $A_q(S, T)$  wurde für  $(q, 2 \mid |S| \mid |T|) = 1$  von C. L. Siegel (dies. Zbl. **12**, 197) berechnet, die Werte wurden zum Beweis des Siegelschen Hauptsatzes verwendet. Verf. berechnet für ungerades  $|S| \mid |T|$  die Anzahlen  $A_2(S, T)$  und  $A_8(S, T)$ . Nach Siegel reicht in diesem Fall  $A_8(S, T)$  auch zur Bestimmung von  $A_q(S, T)$ ,  $q = 2^a$ ,  $a > 3$  aus. Verf. bestimmt  $A_2(S, T)$  kombinatorisch; für  $A_8(S, T)$  werden die Minkowskischen Normalformen und Gaußsche Summen verwendet.

*H. Braun.*

Jones, B. W. and G. L. Watson: On indefinite ternary quadratic forms. Canadian J. Math. **8**, 592—608 (1956).

Es sei  $f$  eine indefinite ternäre quadratische Form im rationalen Zahlkörper  $k$ . Mit  $Q$  sei die Gruppe der Quadratklassen in  $k$  bezeichnet, also  $Q = k^*/k^{*2}$ , wo  $k^*$  die Multiplikationsgruppe von  $k$  ist. Ferner sei  $Q(d)$  die durch alle Teiler der Diskriminante  $d$  von  $f$  erzeugte Untergruppe von  $Q$  und  $Q(f)$  die Gruppe der Spinornormen derjenigen eigentlichen Automorphismen von  $f$ , welche für alle  $d$  teilenden  $p$ - $p$ -adische Einheiten von  $f$  sind. Verff. beweisen in Übereinstimmung mit M. Kneser (dies. Zbl. **71**, 272), daß die Klassenzahl im Geschlecht von  $f$  durch  $h = [Q : Q(d) Q(f)]$  gegeben ist. Dieser Gruppenindex wird auch ohne Bezugnahme auf die Automorphismen von  $f$  allein mit elementar-zahlentheoretischen Hilfsmitteln beschrieben. Der Beweis beruht ebenso wie der von M. Kneser auf der durch Hermite angegebenen Parameterdarstellung der Automorphismen von  $f$ , welche die bekannte Deutung in der Cliffordschen Algebra zuläßt. Es ergibt sich ein bemerkenswertes Nebenresultat: wird die Zahl  $n$  durch einige aber nicht alle Formen des Geschlechts dargestellt, so gibt es gleich viele Klassen, welche  $n$  darstellen, wie solche, die  $n$  nicht darstellen. Außerdem lassen sich gewisse notwendige Bedingungen für die Existenz solcher  $n$  angeben.

*M. Eichler.*

Davenport, H.: Indefinite quadratic forms in many variables. Mathematika, London **3**, 81—101 (1956).

This paper makes a major step towards the proof of the old conjecture that every indefinite quadratic form in more than 5 variables represents arbitrarily small values. That a form with integral coefficients represents 0 if it is indefinite and is in more than five variables is a classical result of Meyer. Otherwise the only verifications of the conjecture are given for  $\sum_{j=1}^5 \lambda_j x_j^2$  by Davenport and Heilbronn



(this Zbl. 60, 119) and for  $\lambda_6 x_4 x_5 + \sum_1^5 \lambda_j x_j^2$  by G. L. Watson (this Zbl. 50, 47).

The author proves the conjecture for all quadratic forms of signature  $(r, n - r)$  where  $n \geq 185$  and  $\min(r, n - r) \geq 37$ . The intricate and ingenious proof assumes by homogeneity that the form  $f(x)$  does not represent any value in  $|f(x)| < 1$  and then deduces a contradiction by a modification of the Hardy-Littlewood technique. An interesting and novel feature is that some of the estimates are not universally valid but are only obtained on using again in a different way the assumption that there are no solutions of  $|f(x)| < 1$ . The reviewer understands that the conjecture has since been verified for a wider class of forms by the author and by B. J. Birch.

*J. W. S. Cassels.*

**Davenport, H.:** *Le recouvrement de l'espace par des sphères.* Centre Belge Rech. math., Colloque Théorie des Nombres, Bruxelles 19–21 déc. 1955, 139–145 (1956).

This article reproduces a lecture on packings and coverings by equal spheres in  $n$ -dimensional space. The author deals in particular with recent results on coverings. See Bambah and Davenport, this Zbl. 47, 51; Erdős and Rogers, this Zbl. 50, 389; and Watson, this Zbl. 71, 274..

*K. Mahler.*

**Few, L.:** *Covering space by spheres.* Mathematika, London 3, 136–139 (1956).

Überdeckt man den dreidimensionalen Raum lückenlos mit Kugeln vom Radius 1, deren Mittelpunkte in den Punkten eines Gitters gelegen sind, so muß  $d(A) \leq 32/5\sqrt{5}$  sein, wie zum ersten Male von R. B. Bambah bewiesen wurde; das Gleichheitszeichen tritt dann und nur dann auf, wenn  $A$  ein innenzentriertes kubisches Gitter mit der Kantenlänge  $4/\sqrt{5}$  ist. Der Autor gibt für diesen Satz einen fast elementargeometrischen Beweis, während die Beweise von R. B. Bambah und E. S. Barnes (vgl. dies. Zbl. 72, 37) auf der Reduktionstheorie ternärer quadratischer Formen aufbauen.

*H. Hejtmánek.*

**Tanaka, Minoru:** *On the number of prime factors of integers.* Japanese J. Math. 25, 1–20 (1956).

In Verallgemeinerung eines Satzes von Erdős-Kac (dies. Zbl. 24, 102) wird unter anderem folgendes Hauptresultat bewiesen: Seien  $f_i(x)$  ( $1 \leq i \leq k$ ) für  $x > 0$  positive, paarweise teilerfremde Polynome mit ganzzahligen Koeffizienten, und  $f_i$  möge genau  $r_i$  verschiedene irreduzible Faktoren enthalten. Sei  $\omega(n)$  die Anzahl der verschiedenen Primteiler von  $n$  und

$$u_i(n) = (\omega\{f_i(n)\} - r_i \log \log n) / (r_i \log \log n)^{1/2} \quad (1 \leq i \leq k).$$

Wenn dann  $E$  eine Jordan-meßbare Menge des  $R_k$  ist und  $A(x; E)$  die Anzahl der natürlichen Zahlen  $n \leq x$  bedeutet, für die  $(u_1(n), u_2(n), \dots, u_k(n))$  ein Punkt aus  $E$  ist, so gilt

$$\lim_{x \rightarrow \infty} A(x; E)/x = (2\pi)^{-k/2} \int_E \exp\left\{-\frac{1}{2} \sum_{i=1}^k u_i^2\right\} du_1 \cdots du_k.$$

Der Beweis benützt die Brunsche Siebmethode, jedoch keine Sätze der Wahrscheinlichkeitsrechnung. Verf. betrachtet noch verschiedene interessante Spezialfälle. (Vgl. auch Delange, dies. Zbl. 51, 35; Halberstam, dies. Zbl. 64, 42.)

*K. Prachar.*

**Postnikov, A. G.:** *On Dirichlet  $L$ -series with the character modulus equal to the power of a prime number.* J. Indian math. Soc., n. Ser. 20, 217–226 (1956).

$\chi$  sei ein eigentlicher (nicht-reeller) Charakter modulo  $D = p^n$ ,  $p$  eine Primzahl und mit positiven Konstanten  $Q$ ,  $C_2$  sei  $n^Q \geq \log p \geq C_2 n^4 (\log n)^3$ ,  $n \geq n_0$ . Verf. beweist für die zugehörigen Dirichletschen  $L$ -Reihen: In  $1 - \log^{-Q/(Q+1)} D \leq \sigma \leq 2$ ,  $|t| \leq C_3$  gilt  $L(s, \chi) \ll \log^{Q/(Q+1)} D$ , und folgert hieraus in üblicher Weise, daß  $L(s, \chi)$  in  $\sigma > 1 - C_5 \log^{-Q/(Q+1)} D (\log \log D)^{-1}$ ,  $|t| \leq C_6$  keine Nullstellen besitzt. Die Beweismethode beruht auf einer Darstellung für den Index einer Zahl, mit der die Abschätzung von Charaktersummen auf Abschätzungen von trigonometrischen

Summen zurückgeführt wird. Diese werden dann mittels der Vinogradovschen Methode behandelt. Zahlreiche Druckfehler. *H.-E. Richert.*

**Postnikov, A. G.:** Abschätzung einer trigonometrischen Exponentialsumme. *Izvestija Akad. Nauk SSSR, Ser. mat.* **20**, 661—666 (1956) [Russisch].

Let  $g \geq 2$ ,  $P, m, d < P$ ,  $l < P$  be positive integers,  $\varepsilon > 0$ , and  $0 \leq \alpha < 1$ . In analogy to the trigonometrical sums  $\sum_{x=1}^P e^{2\pi i \alpha x^n}$  occurring in Waring's problem, the author studies sums

$$S_m = \sum_{x=0}^{P-1} e^{2\pi i m \alpha g^x}.$$

He shows that the interval for  $\alpha$  can be divided into two subsets  $\mathfrak{M}_1$  and  $\mathfrak{M}_2$  such that  $\mathfrak{M}_1$  is of measure  $O(e^{-c(\log P)^s})$ , while

$$|S_1| \leq C(\varepsilon) P (\log P)^{\varepsilon-1/2} \text{ if } \alpha \in \mathfrak{M}_2.$$

Here  $C(\varepsilon)$  and  $c$  are positive constants. The proof depends on the inequality by the author (this *Zbl.* **47**, 52),

$$\left| \frac{S}{P} \right|^{2d} \leq K \left( \frac{r}{l^d P} \max_{0 \leq j \leq r-1} N_P(A_j) + \frac{g^{2dl}}{(lr)^{2d}} + \frac{l^{2d}}{P^{2d}} \right),$$

where  $N_P(A_j)$  denotes the number of fractions  $\{m \alpha g^x\}$  ( $x = 0, 1, \dots, P-1$ ) in the interval  $[j/r, (j+1)/r)$ , and  $K > 0$  depends only on  $m, d$ , and  $g$ . One chooses

$$l = \left[ \frac{\log r}{\log g} \right], \quad r = g^s, \quad \varepsilon = \frac{1}{2d}, \quad s = \left[ \frac{1}{2} \frac{\log(P \log^{-2} P)}{\log g} \right],$$

and defines  $\mathfrak{M}_1$  as the set of those  $\alpha$  for which

$$\max_j N_P(A_j) > s^2 f/g^s, \quad f = [P/s],$$

while  $\mathfrak{M}_2$  is the complementary set.

*K. Mahler.*

**Teghem, J.:** Sur des applications de certaines estimations de sommes trigonométriques. *Centre Belge Rech. math., Colloque Théorie des Nombres, Bruxelles* 19—21 déc. 1955, 193—204 (1956).

Verf. gibt einen Überblick über die Fortschritte, die bei der Abschätzung Weylscher Summen in zwei Jahrzehnten erzielt worden sind. Es handelt sich um Exponentialsummen der Form  $\sum_{x=\frac{P+X}{2}}^{P+X} e^{2\pi i f(x)}$ , wobei  $P$  eine ganze,  $X$  eine natürliche Zahl und  $f(x)$  ein reelles Polynom vom Grad  $k$  (oder approximativ ein solches) bezeichnen. Die nichttrivialen Abschätzungen dieser Summen sind von der Gestalt  $c(k) X^{1-\Lambda(k)}$ . Bei einigen zahlentheoretischen Problemen werden Abschätzungen für solche Summen benötigt, bei denen  $k$  mit  $X$  in gewisser Weise  $\rightarrow \infty$  strebt. Diese werden vom Verf. besonders betrachtet und hier die Größenordnung von  $c(k)$  neben derjenigen von  $\Lambda(k)$  diskutiert. Die Größenordnung von  $\Lambda(k)$  wurde seit H. Weyl durch I. M. Vinogradov von  $2^{-k}$  auf  $(k^2 \log k)^{-1}$  verbessert. Wegen der auch von einer Reihe weiterer Autoren hierbei behandelten speziellen Fragen, technischen Vereinfachungen und Verbesserungen sei auf das Literaturverzeichnis des Verf. verwiesen. Schließlich werden die Anwendungen der erwähnten Resultate für Systeme Diophantischer Ungleichungen, Abschätzungen der Riemannschen Zetafunktion in der Nähe von  $\operatorname{Re} s = 1$  und den Primzahlsatz diskutiert. *H.-E. Richert.*

**Rodosskij, K. A.:** Über eine exzeptionelle Nullstelle. *Izvestija Akad. Nauk SSSR, Ser. mat.* **20**, 667—672 (1956) [Russisch].

Verf. behandelt das Problem der Abschätzung von reellen Nullstellen  $\beta$  der Dirichletschen  $L$ -Reihen zu einem eigentlichen reellen Charakter modulo  $D$ . Er beweist: Sei  $D > 100$ ,  $0 < \varepsilon \leq 0,025$ . Dann gilt mit höchstens der Ausnahme einer Nullstelle einer exzeptionellen  $L$ -Reihe für diese Nullstellen die Abschätzung  $1 - \beta \geq \min\{\varepsilon; 0,015 \log^{-5} D \cdot D^{-26\varepsilon}\}$ . Hieraus wird der bekannte Satz von Siegel



(dies. Zbl. 11, 9) in der folgenden Form gefolgert: Für  $0 < \varepsilon \leq 0,025$  gilt ausnahmslos  $1 - \beta \geq C(\varepsilon) D^{-30\varepsilon}$ .

*H.-E. Richert.*

**Delange, Hubert:** Sur la distribution des entiers ayant certaines propriétés. Ann. sci. École norm. sup., III. Ser. 73, 15—74 (1956).

$n_j$  seien natürliche Zahlen, die eine gewisse vorgegebene Eigenschaft besitzen. Verf. behandelt das Problem einer asymptotischen Bestimmung von  $N(x) = \sum_{n_j \leq x} 1$  bei  $x \rightarrow \infty$ . Seine Methode ergibt zahlreiche neue und Verallgemeinerungen klassischer Resultate der asymptotischen Zahlentheorie.  $\omega(n)$  sei die Anzahl der verschiedenen,  $\Omega(n)$  die Anzahl aller Primteiler von  $n$ . Verf. bestimmt  $N(x)$  asymptotisch, falls die  $n_j$  eine oder mehrere der folgenden Eigenschaften besitzen:  $\omega(n_j) \equiv r \pmod{q}$ ;  $\omega(n_j) = q$ ;  $\Omega(n_j) \equiv r' \pmod{q'}$ ;  $\Omega(n_j) = q'$ ;  $n_j$  quadratfrei;  $n_j$  nicht quadratfrei;  $n_j \equiv l \pmod{k}$ . Als Beispiele seien erwähnt: ( $q$  sei eine natürliche Zahl) 1. Für  $\Omega(n_j) = q$  ist  $N(x) \sim x(\log \log x)^{q-1}/(q-1)! \log x$ . 2. Für  $\Omega(n_j) = q$ ,  $q \geq 3$ ,  $n_j$  nicht quadratfrei, ist  $N(x) \sim S'_1 x(\log \log x)^{q-3}/(q-3)! \log x$ , wo  $S'_1 = \sum p^{-2}$ . 3.  $k, l, r$  seien natürliche Zahlen. Für  $n_j \equiv l \pmod{k} \cup \Omega(n_j) \equiv r \pmod{q}$  ist  $N(x) \sim x/kq$ . Ein Teil dieser Ergebnisse war schon in einer früheren Arbeit (dies. Zbl. 65, 292) mitgeteilt worden. Abschließend werden diese Untersuchungen wie folgt verallgemeinert.  $E$  sei eine Menge von Primzahlen mit folgender Eigenschaft: es gibt ein  $\alpha > 0$  und eine für  $\operatorname{Re} s \geq 1$  holomorphe Funktion  $\delta(s)$ , so daß für  $\operatorname{Re} s > 1$  gilt  $\sum_{p \in E} p^{-s} = -\alpha \log(s-1) + \delta(s)$ .  $\omega_E(n)$  sei die Anzahl der verschiedenen,  $\Omega_E(n)$  die Anzahl aller Primteiler von  $n$ , die zu  $E$  gehören. Verf. studiert solche Mengen  $E$  und dehnt die oben genannten Resultate, die hierin als der Spezialfall, daß  $E$  die Menge aller Primzahlen bezeichnet, enthalten sind, auf die Funktionen  $\omega_E(n)$  und  $\Omega_E(n)$  aus. Die Methode besteht in der Anwendung des vom Verf. verallgemeinerten Ikeharaschen Satzes (dies. Zbl. 56, 331) auf die Dirichletschen Reihen  $\sum_{j=1}^{\infty} n_j^{-s}$ .

*H.-E. Richert.*

**Delange, Hubert:** Sur la distribution des valeurs de certaines fonctions arithmétiques. Centre Belge Rech. math., Colloque Théorie des Nombres, Bruxelles 19—21 déc. 1955, 147—161 (1956).

Es handelt sich um Ergebnisse, die zum größten Teil in der vorstehend besprochenen Arbeit des Verf. enthalten sind. Verf. vermutet, daß jene Resultate auch unter allgemeineren Voraussetzungen über die Menge  $E$  richtig bleiben.

*H.-E. Richert.*

**Erdős, P.:** On perfect and multiply perfect numbers. Ann. Mat. pura appl., IV. Ser. 42, 253—258 (1956).

Sei  $\sigma(n) = \sum_{d|n} d$ ,  $P(x)$  bzw.  $P_2(x)$  die Anzahl der  $n \leq x$ , welche  $n|\sigma(n)$  bzw.  $\sigma(n) = 2n$  genügen. Verf. beweist  $P(x) < x^{3/4+\varepsilon}$  für jedes  $\varepsilon > 0$  und  $x > x_0(\varepsilon)$ . Ferner zeigt er, daß es eine Konstante  $c_1 > 0$  so gibt, daß für  $x > x_0$  auch  $P_2(x) < x^{(1-c_1)/2}$  gilt. Er vermutet  $P(x) = o(x^\varepsilon)$  für jedes  $\varepsilon > 0$ . Diese Vermutung wurde inzwischen von B. Hornfeck und E. Wirsing [Math. Ann. 133, 431—438 (1957)] bewiesen. Beim Beweis macht Verf. Gebrauch davon, daß für alle genügend großen  $n$  die Abschätzung  $\sigma(n) < 2n \log \log n$  gilt. Ohne Beweis gibt Verf. schließlich zwei interessante Sätze an, welche Aussagen über die Anzahl der  $n < x$  enthalten, für die entweder  $(\sigma(n), n) > (\log x)^{c_2}$  oder  $(\sigma(n), n) < (\log \log n)^c$  gilt, wobei  $c_2$  eine geeignete positive Konstante bedeuten und  $0 < \alpha < \infty$  sein soll. Es wird erwähnt, daß man dabei  $\sigma(n)$  auch durch  $\varphi(n)$  ersetzen kann.

*H. J. Kanold.*

**Pan, Cheng-Tung:** On  $\sigma(n)$  and  $\varphi(n)$ . Bull. Acad. Polon Sci., Cl. III 4, 637—638 (1956).

**Pan, Cheng-Tung:** On  $\sigma(n)$  and  $\varphi(n)$ . Acta Sci. Naturalium Univ. Pekinensis 3, 303—322 (1956).

The author proves that

$$(1) \quad \sum_{u^2 + y^2 + z^2 + w^2 \leq x} 1 = \frac{1}{2} \pi^2 x^2 + O(x(\log x \log \log x)^{3/4}),$$

$$(2) \quad \begin{cases} \sum_{n \leq x} \frac{1}{n} \left( \sum_{m \leq n} \varphi(m) - \frac{3}{\pi^2} n^2 \right) = \frac{3}{\pi^2} x + O(x \exp(-A \log^{4/7-\varepsilon} x)), \\ \sum_{n \leq x} \varphi(n) \log \frac{x}{n} = \frac{3}{2\pi^2} x^2 - \frac{3}{\pi^2} (x - [x]) x + O(x \exp(-A \log^{4/7-\varepsilon} x)) \end{cases}$$

and

$$(3) \quad \sum_{n \leq x} \sum_{d|n} d = \frac{1}{12} \pi^2 x^2 + O(x(\log x \log \log x)^{3/4}).$$

The methods are that of Walfisz, Pillai, Chowla and Davenport with the new tool of Vinogradov on the estimation of trigonometrical sums. *L. K. Hua.*

**Klimov, N. I.:** Upper side estimates of some number-theoretical functions. *Doklady Akad. Nauk SSSR* **111**, 16—18 (1956) [Russisch].

The paper contains the following three results which can be obtained by applications of Selberg's method: (1) Let  $Z_h(k; u_i, x)$  be the number of primes  $\equiv h \pmod{k}$  in the interval  $(h, h+x)$  such that  $|p+u_1|, \dots, |p+u_{m-1}|$  are prime. Then, for  $m \geq 2$ ,  $k = O(x^\delta)$ ,  $\log u_i = O(\log^c x)$  ( $1 \leq i \leq m-1$ ) we have

$$Z_h(k; u_i; x) \leq \frac{m! x}{k \log^m(x/k)} \prod_p \left(1 - \frac{\omega(p)}{p}\right) \left(1 - \frac{1}{p}\right)^{-m} \left(1 + O\left(\frac{\log \log x}{\log x}\right)\right)$$

where  $\omega(p)$  denotes the number of solutions of the congruence

$$(ky + l) \prod_{i=1}^{m-1} (ky + l + u_i) \equiv 0 \pmod{p}.$$

(2) Let  $A_2(a, b; u)$  denote the number of solutions of  $u = ap + bp'$  with prime unknowns  $p$  and  $p'$ . Then, for  $1 \leq a, b = O(u^\delta)$ ,  $(a, b) = (a, u) = (b, u) = 1$ , we have

$$A_2(a, b; u) \leq 16 \prod_{p \geq 2} \frac{p(p-2)}{(p-1)^2} \prod_{p \geq 2, p|ab} \frac{p-1}{p-2} \frac{u}{ab \log^2(u/ab)} \left(1 + O\left(\frac{\log \log x}{\log x}\right)\right).$$

(3) Let  $\pi_2(x; D_0)$  denote the number of primes  $p$  of the form  $n^2 + D_0$ , not exceeding  $x$ ,  $-D_0$  not a perfect square. Then

$$\pi_2(x; D_0) \leq \frac{4}{2-\chi(2)} \prod_{p \geq 2} \frac{p(p-1-\chi(p))}{(p-1)(p-\chi(p))} \frac{1}{L(1, \chi)} \frac{\sqrt{x}}{\log \sqrt{x}} \left(1 + O\left(\frac{\log \log x}{\log x}\right)\right),$$

where  $\chi = \chi(n, k)$  is a real character mod  $k$  ( $k \leq 4|D_0|$ ).

*L. K. Hua.*

**Lehmer, Emma:** Number theory on the SWAC. *Proc. Sympos. appl. Math.* **6**, 103—108 (1956).

Bericht über zahlentheoretische Arbeiten auf dem SWAC. Es wurden drei Arten von zahlentheoretischen Aufgaben behandelt: 1. Spezielle konkrete Probleme, auf die der SWAC eine definitive Antwort in sehr kurzer Zeit geben kann, 2. Prüfung von Vermutungen und Hypothesen, 3. Experimente. In der ersten Gruppe wurde die Faktorisierung spezieller Zahlen bearbeitet, nämlich Zahlen der Form  $2^n - 1$  für etwa ein Dutzend Werte von  $n$  in der Umgebung von 100 und für  $n = 257$ , wobei Faktoren bis zu 100 Mill. verwendet aber keine neuen Faktoren gefunden wurden. Die Untersuchung der Fermatschen Zahlen  $F_n = 2^{2^n} + 1$  lieferte Faktoren von  $F_{16}$  und  $F_{16}$ , die der Mersenneschen Zahlen  $M_p = 2^p - 1$  ( $p$  Primzahl) ergab fünf neue Primzahlen für  $p = 521, 607, 1279, 2203$  und  $2281$ . Mit Hilfe eines Siebprogramms wurde die diophantische Gleichung  $x^3 + D = y^2$  für  $-100 < D < 100$  untersucht, jedoch ohne neue Lösungen zu erhalten. Ferner wurde die Bildung von Differenzmengen programmiert. In der zweiten Gruppe wurde die Polyasche Vermutung  $L(N) = \sum_{n=1}^N \lambda(n) \leq 0$ ,  $N > 1$ , (wobei  $\lambda(n)$  gleich 1 bzw.  $-1$  ist, falls  $n$  eine



gerade bzw. ungerade Anzahl von Primfaktoren enthält) für  $N < 800\,000$  und die Turansche Vermutung,  $\sum_{n=1}^N \frac{\lambda(n)}{n} > 0$ , für  $N < 50\,000$  nachgeprüft. Ferner wurden die Lage der ersten 5000 Nullstellen der Riemannschen Zetafunktionen untersucht und die Fermatsche Vermutung über  $x^n + y^n = z^n$  für alle Primzahlexponenten  $n < 2000$  als richtig nachgewiesen. (Während Vandiver für den Beweis des Theorems bis  $n = 619$  einige Jahre benötigte, schafft der SWAC diesen Bereich in weniger als einer halben Stunde.) Die dritte Gruppe enthält Untersuchungen über Jacobsthalsche Summen Legendrescher Symbole

$$\Phi(k) = \sum_{p=1}^{p-1} \left(\frac{p}{p}\right) \left(\frac{p^2+k}{p}\right);$$

für den Fall, daß  $k$  ein quadratischer Nichtrest von  $p$  ist, hatte Jacobsthal  $\Phi(k) = \pm 4y$  bewiesen, wobei das Vorzeichen unbestimmt blieb. Experimente mit dem SWAC für Primzahlen  $< 500$  zeigten, daß wenigstens für Primzahlen der Form  $8n + 5$

$$\Phi(k) = -4\beta \left(\frac{\sqrt{k/2}}{p}\right), \quad \beta \equiv 1 \pmod{4},$$

lauten muß, was dann von der Verf. zusammen mit einem etwas komplizierteren Ergebnis über Primzahlen der Form  $8n + 1$  bewiesen wurde. Das führte zu einer expliziten Formel für die Anzahl der Lösungen der Kongruenz  $x^3 + k \equiv y^2 \pmod{p}$ .  
J. Heinhold.

## Analysis.

### Mengenlehre:

Bagley, R. W.: A note on topologies on  $2^{\mathfrak{R}}$ . Michigan math. J. 3, 105—108 (1956).

Vergleich mehrerer durch Ordnungskonvergenz (von klassischen, transfiniten, Moore-Smith-Folgen) erzeugter Topologien in dem Booleschen Verband  $\mathfrak{B} \mathfrak{R} = 2^{\mathfrak{R}}$  (Potenzmenge der abstrakten Menge  $\mathfrak{R}$ ) mit der starken Produkttopologie von  $2^{\mathfrak{R}}$  ( $2 = \{0, 1\}$  als diskreter Raum verstanden); ein Korollar: für die Topologie des Würfels  $J^{\mathfrak{R}}$  sind bei Mächtigkeit  $|\mathfrak{R}| \geq c$  die transfiniten Folgen noch nicht adäquat.

J. Schmidt.

Engelking, R.: Sur l'impossibilité de définir la limite topologique inférieure à l'aide des opérations dénombrables de l'algèbre de Boole et de l'opération de fermeture. Bull. Acad. Polon. Sci., Cl. III 4, 659—662 (1956).

Pour une suite d'ensemble  $A_n$  extraits d'un espace métrique  $E$  les limites topologiques inférieure et supérieure  $\text{Li } A_n$ ,  $\text{Ls } A_n$  respectivement sont définis comme l'ensemble de tous les points  $x$  de  $E$  tels que chaque voisinage de  $x$  coupe presque chaque  $A_n$  (une infinité des  $A_n$ ). On sait (v. F. Hausdorff, Grundzüge der Mengenlehre, 1914, p. 237) que  $\text{Ls } A_n = \bigcap_{n=1}^{\infty} \bigcup_{m=1}^n A_{m+n}$ . Répondant à une question de C. Kuratowski [Colloquium math. 1, 29 (1947)] l'A. prouve qu'un fait analogue ne peut pas avoir lieu pour l'opérateur  $\text{Li}$ : celui-ci n'est pas réductible aux opérations dénombrables (finies ou non) de l'union, de l'intersection, de complémentation et de fermeture à partir des ensembles  $A_{f_1(n_1 \dots n_k)}, \dots, A_{f_v(n_1 \dots n_k)}$ ,  $f_j$  étant à valeurs naturelles. Dans la démonstration l'A. se sert du lemme suivant: Si  $X$  a  $\aleph_0$  points et si  $R$  est une famille de cardinalité  $\aleph_0$  d'ensembles de  $X$ , il existe un sousensemble infini  $E$  de  $X$  tel que pour chaque élément infini  $Z$  de  $R$  l'ensemble  $Z \setminus E$  soit infini.

G. Kurepa.

Viola, Tullio: Construction et propriétés de certains ensembles de points sur le plan hyperbolique ou sur la droite projective. C. r. Acad. Sci., Paris 243, 1819—1821 (1956).

La Note est la suite de deux travaux antérieurs de l'A. (ce Zbl. 71, 52). En particulier, l'A. précise que si les mouvements  $\varphi_n$  ( $n = 1, 2, \dots$ ) ne sont pas tous hyperboliques, l'ensemble  $E$  est partout dense dans le demi-plan; de plus si  $\lambda_1 > 1$ ,  $\lambda_n > \lambda_{n-1} + 2$ , chaque domaine borné du demi-plan contient  $< \aleph_0$  de points de  $E$ . De plus si  $z_1$  est supposé réel donc situé sur l'axe réel, les transformations sont des projectivités de cet axe en lui-même, elliptiques si  $\lambda_n < 1$ , hyperboliques si  $\lambda_n > 1$ . Si alors chaque  $\varphi_n$  n'est pas hyperbolique,  $E$  est dense partout sur l'axe des  $x$ . L'A. généralise la construction et prouve en particulier l'existence d'une suite biunivoque  $z_\zeta$  ( $\zeta < \omega^2$ ) extraite du demi-plan (de l'axe des  $x$ ) telle que pour chaque indice  $\alpha' < \omega^2$  l'on ait  $\{z_\zeta\}_{\zeta < \omega^2} \simeq \{z_{\zeta'}\}_{\alpha' \leq \zeta < \omega^2}$  (quant au plan euclidien v. Sierpinski, ce Zbl. 55. 282, th. 1).

G. Kurepa.

### **Differentiation und Integration reeller Funktionen. Maßtheorie:**

Aumann, Georg: Über Typen von Zerlegungsausrichtungen in der allgemeinen Integrationstheorie. J.-Ber. Deutsch. Math.-Verein. 59, 79—86 (1956).

Moore-Smith-Folgen werden ausgerichtete Systeme genannt. Verschiedene Ausrichtungen eines Systems von Zellenzerlegungen führen bei einer (reell- und im allgemeinen mehrwertigen) Zellenfunktion zu verschiedenen Definitionen von Ober- und Unter-Integralen. „Äquivalente“ Zellenausrichtungen liefern immer gleich Ober-Integrale. Dies läßt sich bei „zellenbestimmten“ Ausrichtungen umkehren. Stärkere Spezialisierung führt zu „normalen“ Ausrichtungen, zu welchen noch immer diejenigen mittels einer Zellennorm oder mittels Unterteilung gehören. Das Hauptresultat ist, daß für Zerlegungen von  $[0, 1]$  in endlich viele Teilintervalle  $[a_j, b_j]$  die normalen Ausrichtungen von infinitärem Charakter sich bis auf Äquivalenz festlegen lassen.

J. Ridder.

Reichelderfer, Paul V.: A covering theorem for transformations. Math. Japonicae 4, 13—19 (1956).

L'A. si occupa del seguente problema: dato un insieme  $X$  di uno spazio euclideo  $R^n$  ed una famiglia  $\mathfrak{X}$  che ricopra  $X$ , ottenere delle condizioni per  $\mathfrak{X}$  in base alle quali sia possibile estrarre da questa famiglia una sottofamiglia di insiemi disgiunti i quali ricoprano quasi tutto  $X$  in un certo senso che deve essere precisato. L'A. dapprima richiama alcune nozioni e definizioni di topologia. In particolare, indicati con  $D$  un dominio limitato di  $R^n$ , con  $T$  una trasformazione continua di  $D$  in una porzione limitata di  $R^n$ , con  $\mu(x, T, D)$  l'indice topologico del punto  $x$  rispetto alla trasformazione  $T$  ed al dominio  $D$ , dopo aver osservato che, se  $D$  è un „model domain“ (cioè esiste un dominio  $\Delta$  tale che  $D$  sia un componente di  $T^{-1}\Delta$ ) e se  $D$  contiene la propria chiusura, l'indice  $\mu(x, T, D)$  assume un valore costante in  $TD$  (che viene indicato con  $\iota(T, D)$ ), l'A. chiama „model indicator domain for  $T$ “ ogni dominio  $D$  che goda di queste proprietà: 1°)  $TD$  sia aperto, 2°)  $D$  sia un componente di  $T^{-1}TD$ , 3°) contenga la propria chiusura, 4°) sia tale che  $\iota(T, D) \neq 0$ . Ogni componente chiuso di  $T^{-1}x$  tale che in ogni insieme aperto che lo contiene sia contenuto un dominio  $D$  per cui  $\mu(x, T, D) = 0$ , venga indicato con  $C$  e  $X_\infty$  sia l'insieme dei punti di  $R^n$  in corrispondenza ad ognuno dei quali è infinito il numero degli insiemi  $C$  contenuti in  $D$ . Inoltre, dicendo che la famiglia  $\mathfrak{X}$  ricopre l'insieme  $U$  „in the  $T$  sense of Vitali“, l'A. intende che per ogni punto  $u$  di  $U$  esista una successione di insiemi  $X_j$  di  $\mathfrak{X}$  contenenti  $u$  e tale che  $TX_j$  converga a  $Tu$  in modo che il parametro di regolarità abbia minimo limite maggiore di zero. Ciò posto l'A. dimostra che, se  $\mathcal{D}_0$  è una famiglia di domini  $D$  ognuno dei quali è un „model indicator domain for  $T$ “ ed è tale che sia nulla la misura esterna di Lebesgue del trasformato del contorno di  $D$ , e se  $U_0$  è un insieme contenuto in  $D$  e che è ricoperto da  $\mathcal{D}_0$  „in the  $T$  sense of Vitali“, allora esistono tre insiemi a due a due disgiunti  $U, U', U''$  la riunione dei quali è  $U_0$  ed una successione di domini  $D_k$  di  $\mathcal{D}_0$ , a due a due disgiunti,



tali che: 1°)  $TU \subset X_\infty$ , 2°)  $U' \subset \cup D_k$ , 3°) la misura esterna di Lebesgue di  $TU''$  è nulla.

*L. de Vito.*

**Cafiero, Federico:** Teoremi di prolungamento per le misure relative in particolare reticoli d'insieme. *Ricerche Mat.* 5, 273—312 (1956).

Soit  $S$  un ensemble,  $\mathfrak{R}$  un ensemble de parties de  $S$  et  $E$  la réunion des ensembles appartenant à  $\mathfrak{R}$ . Supposons: i)  $\emptyset \in \mathfrak{R}$ ,  $E \in \mathfrak{R}$ ; ii)  $A \cup B \in \mathfrak{R}$ ,  $A \cap B \in \mathfrak{R}$  si  $A, B \in \mathfrak{R}$ ; iii) pour tout  $A \in \mathfrak{R}$  il existe deux suites  $(B_n)_{1 \leq n < \infty}$ ,  $(C_n)_{1 \leq n < \infty}$  d'ensembles appartenant à  $\mathfrak{R}$  telles que  $\lim_{n \rightarrow \infty} C_n = A$  et  $E \cap (S - B_n) \subset C_n \subset E \cap (S - B_{n+1})$  pour  $1 \leq n < \infty$ .

Une fonction réelle  $\mu$  définie sur  $\mathfrak{R}$  (où bien sur un ensemble  $E$  de parties de  $S$  tel que, pour toute  $A \in E$ ,  $E_A$  vérifie les conditions i) et ii)) est une mesure relative si: j)  $\mu(\emptyset) = 0$ ; jj)  $\mu(A \cup B) = \mu(A) + \mu(B) - \mu(A \cap B)$  pour  $A, B \in \mathfrak{R}$ ; jjj)  $\mu\left(\lim_{n \rightarrow \infty} A_n\right) = \lim_{n \rightarrow \infty} \mu(A_n)$  pour toute suite croissante  $(A_n)_{1 \leq n < \infty}$  d'ensembles de  $\mathfrak{R}$  dont la réunion appartient à  $\mathfrak{R}$ . Dans cet article l'A. donne un grand nombre de résultats sur les mesures relatives, et sur une notion duale. Nous mentionnons, en particulier, la généralisation du théorème de décomposition de Jordan et les résultats concernant l'extension d'une mesure relative définie sur  $\mathfrak{R}$ . *C. Ionescu Tulcea.*

**Davies, Roy O.:** Non  $\sigma$ -finite closed subsets of analytic sets. *Proc. Cambridge philos. Soc.* 52, 174—177 (1956).

Given any set  $X$  let  $A^s$  denote as usual the measure defined by  $A^s X = \lim A_t^s X$  as  $t \rightarrow 0+$ , and  $A_t^s X = \inf \sum (dU)^s$  for all possible coverings of  $X$  by a sequence  $[U]$  of closed convex sets  $U$  with diameters  $dU \leq t$ . The set  $X$  is said to be  $\sigma$ -finite (with respect to  $A^s$ ) if it can be expressed as a countable sum of sets of finite  $A^s$  measure. In the present paper the author proves the following statement: Every non  $\sigma$ -finite analytic set  $E$  has a non  $\sigma$ -finite closed subset. A previous theorem of the same author assured only the existence of a closed subset of infinite measure (this Zbl. 48, 37). For  $s = 0$  the statement proved in the present paper reduces to the known result that every noncountable analytic set contains a noncountable closed set. *L. Cesari.*

**Lipiński, J. S.:** Sur les ensembles  $\{f(x) > a\}$ , où  $f(x)$  sont des fonctions intégrables au sens de Riemann. *Fundamenta Math.* 43, 202—229 (1956).

L'A. donne des conditions nécessaires et suffisantes: 1° pour qu'un ensemble d'un espace euclidien  $E^n$  soit de la forme  $\{f(x) > a\}$ , où  $f(x)$  est une fonction intégrable (R) sur tout intervalle de  $E^n$ ; 2° [2b] pour qu'un ensemble de  $E^1$  soit de la forme  $\{f(x) > a\}$ , où  $f(x)$  est une dérivée [une fonction approximativement continue] intégrable (R) sur tout intervalle de  $E^1$ . En outre il donne plusieurs conditions nécessaires et suffisantes pour l'intégrabilité (R) de  $f(x)$  sur tout intervalle de  $E^1$ , dans lesquelles interviennent les ensembles  $\{f(x) > a\}$ . Les démonstrations reposent partiellement sur deux travaux de Z. Zahorski [*Tôhoku math. J.* 48, 321—330 (1941) et ce Zbl. 38, 206]. *J. Ridder.*

**Austin, D. G.:** A Lipschitzian characterization of approximately differentiable functions. *Portugaliae Math.* 15, 19—29 (1956).

Si indichi con  $E_n$  lo spazio euclideo ad  $n$  dimensioni, con  $x = (x_1, \dots, x_n)$  e  $s = (s_1, \dots, s_n)$  punti di  $E_n$ , con  $f(x)$  una funzione reale definita in tutti i punti di  $E_n$  ed ivi misurabile; l'A. definisce come massimo (minimo) limite approssimato di  $f(x)$  in un punto  $s$  di  $E_n$  l'estremo inferiore (superiore) della classe dei numeri reali  $u$  per ognuno dei quali l'insieme  $K[f(x) > u]$  (costituito dai punti  $x$  di  $E_n$  in cui  $f(x) > u$ ) ha densità nulla in  $s$ . Se tali massimo e minimo limite coincidono, si dice che  $f(x)$  ammette limite approssimato in  $s$  e questo coincide con il comune valore del massimo e minimo limite di  $f(x)$  in  $s$ . Se  $n = 1$  si può definire in modo analogo, limitandosi a considerare i punti  $x$  per i quali  $x \geq s$  (per i quali  $x \leq s$ ) un massimo ed un minimo limite approssimato destro (sinistro). Pertanto una funzione misurabile  $f(x)$  ammette in ogni punto  $s$  ed in corrispondenza all'intero  $i$  ( $1 \leq i \leq n$ ) quattro derivate parziali

rispetto ad  $x_i$  approssimate in corrispondenza ai quattro limiti approssimati (massimo destro e sinistro, minimo destro e sinistro) del rapporto incrementale di  $f$  rispetto ad  $x_i$  in  $s$ . Se tali quattro derivate coincidono, la funzione  $f(x)$  dicesi dotata di derivata parziale rispetto ad  $x_i$  approssimata:  $D_i f$ . Una funzione misurabile  $f(x)$  dicesi differenziabile in modo approssimato in  $s$  se esistono  $n$  costanti  $A_1, \dots, A_n$  tali che la funzione  $F(x) = [f(x) - f(s) - \sum_{i=1}^n A_i (x_i - s_i)] / \sum_{i=1}^n |x_i - s_i|$  abbia limite approssimato nullo in  $s$ . Dopo aver dimostrato che, se  $f$  è una funzione misurabile in un insieme misurabile  $K$  ognuna delle sue quattro derivate parziali approssimate rispetto ad  $x_i$  è misurabile in  $K$ , l'A. fa vedere che ogni funzione definita in un insieme limitato e misurabile  $K$  le cui derivate approssimate siano limitate in modulo da una costante  $P$ , soddisfa la seguente condizione (1): in corrispondenza ad un numero positivo  $\varepsilon$  è possibile costruire  $p$  insiemi disgiunti  $S_1, \dots, S_p$  contenuti in  $K$ , in ognuno dei quali la funzione  $f(x)$  sia lipschitziana (con coefficiente di Lipschitz eguale a  $P$ ) e tali inoltre che la misura di Lebesgue dell'insieme  $K - \sum_{i=1}^p S_i$  sia minore di  $\varepsilon$ . L'A. inoltre dimostra che, viceversa, se  $f(x)$  è misurabile in un insieme misurabile  $K$  e soddisfa la condizione (1), allora, per ogni  $i$  ( $1 \leq i \leq n$ ), la funzione  $f(x)$  ammette quasi ovunque in  $K$  derivata parziale approssimata  $D_i f$  ed è inoltre quasi ovunque differenziabile in modo approssimato. Come conseguenza di questi due risultati si ha che se  $f(x)$  è una funzione misurabile in un insieme misurabile  $K$  ed è tale che, per ogni  $i$ , le sue quattro derivate parziali approssimate rispetto ad  $x_i$  siano quasi ovunque finite, la funzione  $f(x)$  ammette quasi ovunque in  $K$  derivata parziale approssimata  $D_i f$  finita. L'A. infine dimostra che, se  $f(x)$  è continua in un intervallo  $I$  di  $E_1$  e se una delle sue quattro derivate approssimate è limitata in modulo da una costante  $M$  in tutti i punti di  $I$  eccettuati quelli di un insieme  $E$  in cui  $f$  è sempre nulla, allora  $f(x)$  è lipschitziana in  $I$  con coefficiente di Lipschitz eguale ad  $M$ . L. de Vito.

**Newns, W. F.:** A note on rectifiable curves. *Edinburgh math. Notes* Nr. 40, 12—14 (1956).

This is a variant of the proof of the known remark concerning Tonelli's theorem on rectifiable curves  $C: x = f(u)$ ,  $a \leq u \leq b$ , that  $s'(u) = |f'(u)|$  whenever  $f'$  exists and  $|f'|$  is upper semicontinuous ( $s$  arc length). The author seems to be unaware that the proof of the preliminary lemma can be traced in Tonelli's paper where the statement is also proved that  $s' = |f'|$  a. e. in  $[a, b]$ . [L. Tonelli, *Atti Accad. Sci. Torino, Cl. Sci. fis. mat. natur.* 43, 783—800 (1907), and 47, 1067—1075 (1912); particularly this second paper pag. 1070.] No bibliography is given. L. Cesari.

**Leach, E. B.:** Functions with preassigned derivatives. *Amer. math. Monthly* 63, 653—655 (1956).

Sia  $\{a_k(u)\}$  (con  $k = 0, 1, 2, \dots$ ) una successione di funzioni della variabile  $u = (u_1, u_2, \dots, u_m) \in U$ , ove  $U$  è un insieme aperto dello spazio reale euclideo  $R^m$ . Le  $a_k(u)$  sono supposte tutte della classe  $C^\infty$  in  $U$ . Si dimostra che, in tali condizioni, esiste sempre una funzione  $f(x, u)$  della variabile  $x \in R^1$  e della stessa variabile  $u \in U$ , anch'essa della classe  $C^\infty$  in  $U$ , tale che  $\partial^k f(0, u) / \partial x^k = a_k(u)$  ( $k = 0, 1, 2, \dots$ ). Questa proposizione viene generalizzata al caso in cui la funzione  $f$  dipenda da più variabili reali  $x_1, x_2, \dots, x_n$  (invece che da una sola variabile  $x$ ). T. Viola.

**Potts, D. H.:** Elementary integrals. *Amer. math. Monthly* 63, 545—554 (1956).

Ogni polinomio in  $y$  irriducibile del tipo  $a_0 y^m + a_1 y^{m-1} + \dots + a_n$ , in cui gli  $a_i$  sono polinomi in  $x$  e  $a_0 \not\equiv 0$ , eguagliato a zero, definisce, com'è noto, una funzione algebrica  $y = f(x)$ . Qui si considerano soltanto le funzioni algebriche „elementari“, a cui corrispondono cioè  $f(x)$  costruite con le tre operazioni: algebriche, esponenziali, logaritmiche. Per algebriche è da intendersi le estrazioni di radici e le



comuni operazioni razionali. Per la costruzione di una funzione elementare si adopera il metodo di Ostrowski, per l'estensione di un campo Ritt (questo Zbl. **31**, 206). Se  $F$  è un campo differenziabile [i] contiene le costanti; ii)  $\alpha \in F$ ,  $\beta \in F$ , allora  $\alpha + \beta \in F$ ,  $\alpha \cdot \beta \in F$ ; iii)  $\alpha \in F$  allora  $\alpha' \in F$ ; iv)  $\alpha \in F$ , allora  $1/\alpha \in F$  purchè  $\alpha \neq 0$ ] e  $\theta$  è una funzione a pezzi differenziabile non  $\in F$ , allora la classe delle funzioni razionali di  $\theta$  con i coefficienti in  $F$  è un campo. Se è poi un campo differenziabile, si dirà che è una semplice estensione di  $F$  e si indica con  $F(\theta)$ . Una semplice estensione di  $F(\theta_1, \theta_2, \dots, \theta_{n-1})$  si indica con  $F(\theta_1, \theta_2, \dots, \theta_n)$  e si dice un'estensione di  $F$ . L'A. prova vari teoremi. Ci limitiamo a riportare il seguente: Teorema 7. Se  $\alpha \in F$ ,  $\int \alpha \in F(\theta_1, \theta_2, \dots, \theta_n)$ , ogni  $\theta_i$  è un'esponenziale oppure un logaritmo, allora esistono  $\beta_0, \dots, \beta_n \in F$  e le costanti  $c_1, \dots, c_n$  tali che  $\int \alpha = \beta_0 + c_1 \log \beta_1 + \dots + c_n \log \beta_n$ . Come applicazione, l'A. prova il seguente Teorema 8: Se  $\alpha, \beta \in F$ ,  $e^{n\alpha} \notin F$ ,  $n = 1, 2, \dots$ ,  $\gamma = \int e^\alpha \beta$  è elementare rispetto a  $F$ , cioè  $\gamma$  è contenuta in una estensione di  $F$  allora esiste  $\delta \in F$ , tale che  $\gamma = e^\alpha \delta + \text{costante}$ . *L. Giuliano.*

### Allgemeine Reihenlehre:

Walsh, C. E.: A note on convergence factors. Proc. Edinburgh math. Soc., II. Ser. **9**, 154—156 (1956).

Fest gegeben seien die Folgen  $\{u_n\}$  mit  $u_n \geq u_{n+1} > 0$  ( $n = 1, 2, \dots$ ),  $\{a_r\}$  mit  $a_r > 0$ ,  $\sum_{r=1}^{\infty} a_r = \infty$ ,  $A_{n+1} \equiv \sum_{r=1}^{n+1} a_r = O(A_n)$  ( $n \rightarrow \infty$ ), sowie  $\{k_n\}$  mit  $k_n > 0$ . Weiter werde für jede Folge  $\{e_n\}$  gesetzt:  $S_n = \sum_{r=1}^{n-1} e_r u_r$  und  $E_n =$

$A_n^{-1} \sum_{r=1}^n e_r$ . Frage: Unter welchen Annahmen über die  $u_n, a_r, k_n$  folgt für jede Folge  $\{e_n\}$  mit  $S_n = S + o(k_n)$  [bzw.  $S_n = S + O(k_n)$ ] stets  $E_n = o(1)$ ? Als notwendige und hinreichende Bedingung hierfür liefert der Satz von Toeplitz-Schur sofort

$$\frac{1}{A_n} \sum_{r=1}^{n-1} \left( \frac{1}{u_{r+1}} - \frac{1}{u_r} \right) k_{r+1} + \frac{k_{n+1}}{A_n u_n} = O(1) \quad [\text{bzw. } = o(1)].$$

Spezielle hinreichende Aussagen von Fuchs [Proc. Edinburgh math. Soc., II. Ser. **7**, 27—30 (1942)] und Karamata (dies. Zbl. **60**, 155) sind darin enthalten. *D. Gaier.*

Guha, U.: The "Second theorem of consistency" for absolute Riesz summability. J. London math. Soc. **31**, 300—311 (1956).

The "second theorem of consistency" for Riesz means, proved by G. H. Hardy [Proc. London math. Soc., II. Ser. **15**, 72—88 (1916)] states that if  $\mu(x)$  is a logarithmico-exponential function of  $x$ , and  $\mu(x) = O(x^\lambda)$ , where  $\lambda$  is a positive constant, however large, then  $(R, \lambda, k) \sum a_n = A$  implies  $(R, \varphi, k) \sum a_n = A$ , where  $\varphi(x) = \mu\{\lambda(x)\}$ . K. A. Hirst (this Zbl. **3**, 393) gave a generalization of this theorem in which the condition that  $\mu$  be a logarithmico-exponential function was replaced by order-conditions on  $\mu$  and its derivatives. Hirst's conditions when  $k$  is integral are simpler than when  $k$  is non-integral. B. Kuttner gave a further simplification and extension of Hirst's theorem (this Zbl. **42**, 66; **43**, 63). In particular he showed that if  $k$  is integral, then the single condition  $\int_0^t x^k |\mu^{(k+1)}(x)| dx = O\{\mu(t)\}$  was not only sufficient but necessary for the proposition that  $(R, \lambda, k) \sum a_n = A$  implies  $(R, \varphi, k) \sum a_n = A$ . The author considers the analogues of the above results for absolute Riesz summability. The analogue of Hardy's theorem was first considered by the reviewer [J. Indian math. Soc., n. Ser. **6**, 168—180 (1942)], and no analogues have so far existed for Hirst's and Kuttner's theorems. In the case of integral  $k$ , the author

here obtains a refinement of the reviewer's result, and in fact with a condition on  $\mu$  which is less stringent than Kuttner's. In the case of non-integral  $k$  (the reviewer's proof of the analogue of Hardy's theorem requires modification as was observed by K. Chandrasekharan and S. Minakshisundaram, *Typical means*, p. 50, this Zbl. 47, 299) he proves an analogue of Kuttner's theorem under somewhat different conditions.

K. Chandrasekharan.

**Guha, U.: Convergence factors for Riesz summability.** J. London math. Soc. 31, 311—319 (1956).

The author proves the following result. Let  $\sum a_n$  be summable  $(R, \lambda, k)$ ,  $k \geq 0$ , and let  $\varphi(x) = \mu\{\lambda(x)\}$ ,  $\varepsilon(x) = \gamma\{\lambda(x)\}$ , where (i)  $\mu(x)$  is a logarithmico-exponential function, (ii)  $1/x < \mu'(x)/\mu(x) < 1$ , and (iii)  $\gamma(x) = \{\mu(x)/x \mu'(x)\}^k$ . Then  $\sum a_n \varepsilon_n$  is summable  $(R, \varphi, k)$ , where  $\varepsilon_n = \varepsilon(n)$ . He next extends the result to the case in which (ii) is replaced by  $1/x \leq \mu'(x)/\mu(x)$ . With the latter condition, he states the analogue for absolute Riesz summability.

K. Chandrasekharan.

**Borwein, D.: A theorem on Riesz summability.** J. London math. Soc. 31, 319—324 (1956).

Let  $k$  be a positive integer, and let  $\varphi, \psi$  be functions defined in  $[0, \infty)$ ,  $\varphi$  being nonnegative and unboundedly increasing, and both  $\varphi$  and  $\psi$  having absolutely continuous  $k^{\text{th}}$  derivatives in every interval to the right of the origin. Let  $\{\lambda_n\}$  be an unboundedly increasing sequence of positive numbers. The author gives sufficient conditions for the validity of the proposition that  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$  is summable  $(R, \lambda_n, k)$

implies  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n \psi(\lambda_n)$  is summable  $(R, \varphi(\lambda_n), k)$ . His result includes a theorem of Hardy and Riesz [General Theory of Dirichlet Series, Cambridge Tract, No. 18 (1915)] and a theorem of Hirst (this Zbl. 3, 393).

K. Chandrasekharan.

**Jurkat, Wolfgang B.: Ein funktionentheoretischer Beweis für O-Taubersätze bei den Verfahren von Borel und Euler-Knopp.** Arch. der Math. 7, 278—283 (1956).

Verf. interessiert sich für die Weiterentwicklung der Beweismethoden, die er in seiner früheren Arbeit (dies. Zbl. 70, 70) für die Verfahren von Abel und Cesàro aufstellte. Ausgangspunkt bildet folgendes Analogon zum abelschen Stetigkeitsatz: Wenn eine reelle oder komplexe Zahlenfolge  $s_n$  gegen Null strebt oder allgemeiner für ein  $q \geq 1$   $(E, q)$   $\sigma_n^q = \frac{1}{q^n} \sum_{\nu=0}^n \binom{n}{\nu} (q-1)^{n-\nu} s_\nu = o(1)$  für  $n \rightarrow \infty$  ist, so gilt

$$(B) \quad \begin{cases} f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} s_n \frac{z^n}{n!} & \text{konvergiert für alle } z \\ f(z) = o(e^z) & \text{für reelle } z \rightarrow +\infty. \end{cases}$$

Die Umkehrung  $(B) \Rightarrow (E, q)$  für alle  $q$  ist nur unter einer zusätzlichen Tauberbedingung (T) richtig und Verf. beweist in diesem Zusammenhang, daß für  $q > 1$  dann  $(B) \Rightarrow (E, q)$  gilt, falls  $f(z) = O(e^{|z|})$  für alle  $z$  erfüllt ist und weiter wird nachgewiesen, daß für  $q > \alpha \geq 1$  die Umkehrung  $(B) \Rightarrow (E, q)$  gilt, falls  $e^{-z} f(z) = O(1) e^{\alpha(|z| - \Re z)}$  für alle  $z$ .

H. P. Künzi.

**Davydov, N. A.: Über die Umkehrung des Abelschen Theorems.** Mat. Sbornik, n. Ser. 39 (81), 401—404 (1956) [Russisch].

Verf. gibt einen Lückensatz für Potenzreihen, der Anwendungen auf das Abelverfahren gestattet. Hauptsatz: Ist  $f(z) = \sum a_n z^n$  regulär in  $|z| < 1$  sowie stetig in  $|z - x_0| \leq 1 - x_0$  (wo  $0 < x_0 < 1$ ), liegen ferner die  $S_n = a_0 + \dots + a_n$  für  $n \in I_k$  in einem konvexen abgeschlossenen Bereich  $G$  (wo  $I_k = \langle n_k, m_k \rangle$  mit  $m_k/n_k > \gamma > 1$  und  $n_k \rightarrow \infty$ ), so liegt auch  $f(1)$  in  $G$ . Hier ist  $f(1)$  natürlich durch stetige Fortsetzung gewonnen. Davydov formuliert den Satz scheinbar allgemeiner mit einem Parameter  $\varepsilon$  und  $\varepsilon$ -Umgebungen von  $G$ . Beim Beweis zieht er die  $T_\alpha$ -



Transformation (Taylorverfahren, mit  $\alpha = x_0$ ) der Reihe  $\sum a_n$  heran, die wegen der Stetigkeitsvoraussetzung  $C_1$ -summierbar ist, und stützt sich auf seine frühere Arbeit über Cesaro-Verfahren (dies. Zbl. 70, 288). Wesentlich ist dabei, daß das Taylorverfahren „gröber“ als das Abelsche ist. Aus dem Hauptsatz folgen verschiedene Umkehrsätze für das Abelverfahren, bei denen Bedingungen wie  $a_n = O(1/n)$  nur für  $n \in I_k$  gefordert werden und nur die Konvergenz einer Teilfolge der  $\delta_n$  erschlossen wird (vgl. Meyer-König, dies. Zbl. 21, 219 und 24, 29; Evgrafov, dies. Zbl. 47, 311). Ein Beispiel von Evgrafov (l. c.) zeigt, daß man bei diesen Sätzen auf die Stetigkeitsvoraussetzung nicht verzichten darf.

K. Zeller.

Ogieveckij (Ogieveckii), I. E.: Some tauberian theorems for double series. Doklady Akad. Nauk SSSR 110, 330—333 (1956) [Russisch].

In Fortsetzung früherer Arbeiten (dies. Zbl. 53, 37 und 55, 293) untersucht Verf. Beziehungen zwischen Cesàro-Verfahren für Doppelfolgen, vor allem das Analogon zum Konvexitätssatz für gewöhnliche Cesàro-Mittel. Er arbeitet hauptsächlich mit einer Verallgemeinerung der restringierten Limitierbarkeit: Eine Folge  $s_{mn}$  heißt  $(C, \alpha, \beta)$ -limitierbar in diesem Sinn, falls die Cesàro-Transformierte  $\sigma_{m,n}^{\alpha,\beta}$  gegen  $s$  strebt, wenn  $m, n$  gegen  $\infty$  gehen unter der Nebenbedingung  $\lambda n^{\delta/(\alpha+1)} < m < \lambda^{-1} n^{(\beta+1)/\gamma}$  (für beliebiges  $\lambda$  mit  $0 < \lambda < 1$ ; dabei sind  $\gamma > 0$ ,  $\delta > 0$  gewisse Zahlen mit  $\gamma \delta \leq (\alpha + 1)(\beta + 1)$ ). Für  $\gamma = \beta + 1$  und  $\delta = \alpha + 1$  erhält man die gewöhnliche restringierte Limitierbarkeit. Entsprechend definiert man eine verallgemeinerte restringierte Limitierbarkeit (in Abhängigkeit der Parameter  $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ ) für das Abel-Verfahren. Von seinen Ergebnissen sei Satz 4 genannt: Ist die Reihe  $\sum \sum u_{\mu\nu}$  restringiert (im erweiterten Sinn) Abel-summierbar zum Werte  $s$  und ist ihre  $(C, \alpha, \beta)$ -Transformierte (wo  $\alpha > -1, \beta > -1$ ) beschränkt, so ist die Reihe für beliebige  $\eta_1 > 0, \eta_2 > 0$  auch  $(C, \alpha + \eta_1, \beta + \eta_2)$ -summierbar zum selben Wert im Sinne der gewöhnlichen restringierten Summierbarkeit. — Die Sätze 5—8 geben gewisse Erweiterungen von Satz 4 für den Fall, daß die  $(C, \alpha, \beta)$ -Transformierte nur schließlich beschränkt ist, während die Sätze 1—3 der Vorbereitung von Satz 4 dienen und unter anderem mit Schwankungs-Umkehrbedingungen arbeiten.

K. Zeller.

Petersen, G. M.: „Almost convergence“ and uniformly distributed sequences. Quart. J. Math., Oxford II. Ser. 7, 188—191 (1956).

Eine Zahlenfolge  $\{s_n\}$  ( $n = 1, 2, 3, \dots$ ) heißt nach Lorentz (dies. Zbl. 31, 295) fast-konvergent („almost convergent“) falls  $\lim_{n \rightarrow \infty} m^{-1}(s_n + s_{n+1} + \dots + s_{n+m})$  gleichmäßig in  $m$  existiert. Eine Zahlenfolge  $\{s_n\}$  mit  $0 \leq s_n \leq 1$  für alle  $n$  heiße weiter „wohlverteilt“ („well-distributed“) falls  $\lim_{p \rightarrow \infty} p^{-1} \sum_{k=n}^{n+p} I(s_k) = b - a$  gleichmäßig in  $n$  für jedes Intervall  $a \leq x \leq b$  in  $0 \leq x \leq 1$  gilt. Hier ist  $I(x)$  die charakteristische Funktion des Intervalls  $a \leq x \leq b$ . Verf. beweist: Die Folge  $\{s_n\}$  ist wohlverteilt, falls für jedes positive ganze  $k$  die Folge  $\{\exp 2\pi i k s_n\}$  fast-konvergent ist mit Grenzwert 0.

H. D. Kloosterman.

Evans, Arwel: A theorem on general regular transformations of series. Proc. Edinburgh math. Soc., II. Ser. 9, 105—108 (1956).

Für eine Folge von reellen Funktionen  $f_m(s_1, \dots, s_m)$ ,  $m = 1, 2, \dots$  (wo jedes  $f_m$  definiert sei für  $a < s_\nu < b$ ,  $\nu = 1, 2, \dots, m$ ) folgt aus  $s_n \rightarrow s$ ,  $a < s_n$ ,  $s < b$  stets  $f_m(s_1, \dots, s_m) \rightarrow s$ , falls die folgenden Bedingungen erfüllt sind: (1)  $f_m(s_1, \dots, s_k, x, \dots, x) \rightarrow x$  für  $m \rightarrow \infty$ ,  $a < x < b$  und beliebige Zahlen  $a < s_\nu < b$ ,  $\nu = 1, 2, \dots, k$ . (2) Es gibt ein  $N$ , so daß  $f_m(s_1, \dots, s_m)$  für jedes feste  $m \geq N$  monoton wachsend ist, falls  $s_\nu$ ,  $\nu \geq N$  wächst.

A. Peyerimhoff.

Parker, R. V.: Stirling's numbers as polynomials. Tôhoku math. J., II. Ser. 8, 181—182 (1956).

Bei der Berechnung der Stirlingschen Zahlen

$$S(r, n) = (-1)^{n+r} \sum_{s=0}^{n-r-1} C(s, n-r) \binom{n+s}{2n-2r}$$

benötigt man die Koeffizienten  $C(s, m)$ , die durch das Rekursionssystem:  $C(s, m) = (2m-s-1)C(s-1, m-1) + (s+1)C(s, m-1)$  mit den Randbedingungen  $C(0, k) = 1$ ,  $C(k, 1) = 0$  ( $k = 1, 2, \dots$ ) festgelegt sind. Zur Kontrolle wendet man die Formel  $\sum_{s=0}^{m-1} C(s, m) = 1 \cdot 3 \cdot 5 \cdots (2m-1)$  an. Tabelle der  $C(s, m)$ .

H. Töpfer.

Kazarinoff, Donat K.: On Wallis' formula. Edinburgh math. Notes Nr. 40, 19—21 (1956).

Es wird gezeigt, daß in der Formel von Wallis  $1 \cdot 3 \cdot 5 \cdots (2n-1)/2 \cdot 4 \cdot 6 \cdots 2n = [\pi(n+\theta)]^{-1/2}$  ( $n = 1, 2, \dots$ ) die Zahl  $\theta$  nicht nur der Ungleichung  $0 < \theta < \frac{1}{2}$ , sondern der besseren  $\frac{1}{4} < \theta < \frac{1}{2}$  genügt.

L. Fuchs.

Jadraque, V. Martin: Über einige Kettenbruchformeln. Gac. mat., Madrid 8, 148—154 (1956) [Spanisch].

### Approximation und Reihendarstellung reeller Funktionen:

● Achieser, N. I.: Theory of approximation. Translated from the russian 1947 edition by Charles J. Hyman. New York: Frederick Ungar Publishing Co. 1956. X, 307 p. \$ 8,50.

Vgl. dies. Zbl. 31, 157.

Sendov, Blagovest: On a certain class of regular monotonic functions. Doklady Akad. Nauk SSSR 110, 27—30 (1956) [Russisch].

Genügt die im Intervall  $0 < x < 1$  unendlich oft differenzierbare Funktion  $f(x)$  den Bedingungen

$\varepsilon_n f^{(n)}(x) \geq 0$ ,  $\varepsilon_n = \pm 1$ ,  $\varepsilon_{n+q} = \varepsilon_n$ , ( $n = 0, 1, 2, \dots$ ;  $q > 0$ ),  $\varepsilon_0 = 1$ , so läßt sie sich in der Gestalt

$$f(x) = \sum_{v=0}^{\infty} a_v P_v(x) + A R(x), \quad a_v \geq 0, \quad A \geq 0$$

darstellen, wobei

$$P_0(x) = 1, \quad P_v(x) = \int_{x_0}^x \tau_0 dt_1 \int_{x_1}^{t_1} \tau_1 dt_2 \cdots \int_{x_{v-1}}^{t_{v-1}} \tau_{v-1} dt_v, \quad (v = 1, 2, \dots)$$

$$\tau_k = \varepsilon_k \varepsilon_{k+1}, \quad x_k = \frac{1}{2} |\varepsilon_k - \varepsilon_{k+1}|, \quad (k = 0, 1, 2, \dots)$$

$$R^{(q)}(x) = B R(x), \quad B \geq 0, \quad \varepsilon_n R^{(n)}(x) \geq 0, \quad R^{(n)}(x_n) = 0, \quad (n = 0, 1, 2, \dots)$$

ist. Setzt man  $q = 1, 2, 4$ , so gewinnt man als Spezialfälle die bekannten Sätze von S. Bernstein über die vollmonotonen und die zyklischmonotonen Funktionen.

J. Tagamlizki.

Csibi, S.: Note on de la Vallée Poussin's approximation theorem. Acta math. Acad. Sci. Hungar. 7, 435—438, russ. Zusammenfassg. 439 (1956).

Let  $f(x)$  be a continuous and real function, let  $E_n$  be its best approximation by trigonometric polynomials of  $n$ -th degree in the Chebyshev sense, and let be (1)  $E_n \leq \Omega(n)/n^p$  in the closed interval  $[a, b]$ , where  $p$  may be zero or any positive integer, and  $\Omega(x)$  satisfies appropriate conditions. Then it is well known, that  $f^{(p)}(x)$  exists, and its modulus of continuity has

$$(2) \quad \omega^{(p)}(\delta) = \left( \delta \int_c^{c/\delta} \Omega(\xi) d\xi + \int_{1/\delta}^{\infty} \frac{\Omega(\xi)}{\xi} d\xi \right)$$

in any closed subinterval of  $(a, b)$ ,  $c > 1$  being a fixed positive integer. (C. de la Vallée Poussin, Leçons sur l'approximation des fonctions d'une variable réelle,



Paris 1919, Chap. IV.) The aim of this paper is to show that throughout the whole approximation interval  $[a, b]$   $f^{(p)}(x)$  exists and  $\omega^{(p)}(\delta)$  may be estimated by (2), if (1) is replaced by (3)  $E_n \leq \Omega(n^2)/n^{2p}$  in the closed interval  $[a, b]$ . *G. Sunouchi*.

**Quilghini, Demore:** *Interpolazione di una funzione  $F(P)$  continua nei punti  $P$  di una superficie sferica.* Boll. Un. mat. Ital., III. Ser. 11, 40—45 (1956).

Auf einer Kugelfläche sei eine stetige Funktion  $F(\varphi, \vartheta)$  gegeben; dabei bedeute  $0 \leq \varphi \leq \pi$  die Breiten- und  $0 \leq \lambda < 2\pi$  die Längenkoordinate. Um  $F(\varphi, \vartheta)$  durch eine Doppelfolge trigonometrischer Polynome  $H_{n,m}(\varphi, \vartheta)$  zu approximieren, die in  $\varphi$  von der Ordnung  $2n$ , in  $\vartheta$  von der Ordnung  $2m$  sind, werden als Interpolationsknoten die  $(n+1)(m+1)$  Punkte mit den Koordinaten  $\varphi_\nu, \vartheta_\mu$  gewählt, die durch

$$\vartheta_\mu = \mu 2\pi/(m+1), \quad \mu = 0, 1, \dots, m \quad P_{n+1}(\cos \varphi_\nu) = 0, \quad \nu = 0, 1, \dots, n$$

bestimmt sind, wobei  $P_{n+1}$  das  $(n+1)$ -te Legendre-Polynom bedeutet. Es zeigt sich, daß dann überall auf der Kugel die Beziehung  $\lim_{n \rightarrow \infty, m \rightarrow \infty} H_{n,m}(\varphi, \vartheta) = F(\varphi, \vartheta)$

gilt, ausgenommen höchstens die beiden Pole des Koordinatensystems. Die Konvergenz ist gleichmäßig, wenn man zwei die Pole enthaltenden Kalotten ausschließt. Unterwirft man  $F(\varphi, \vartheta)$  noch der Lipschitzbedingung

$$|F(\varphi_1, \vartheta_1) - F(\varphi_2, \vartheta_2)| \leq L(|\cos \varphi_1 - \cos \varphi_2|^\alpha + |\vartheta_1 - \vartheta_2|^\beta),$$

wobei  $L$  eine positive Konstante und  $\frac{4}{5} < \alpha \leq 1, \quad 0 < \beta \leq 1$  ist, so findet Konvergenz auf der ganzen Kugel statt, und es gilt die Fehlerabschätzung

$$|F(\varphi, \vartheta) - H_{n,n}(\varphi, \vartheta)| \leq k \left\{ \frac{[\log(n+1)]^{2-\alpha}}{(n+1)^{5\alpha/2-2}} + \frac{\log(m+1)}{(m+1)^\beta} \right\},$$

wobei  $k$  eine Konstante ist.

*K. Bögel.*

**Tricomi, Francesco G.:** *Sulla chiusura dei sistemi ortonormali di funzioni.* Revista Un. mat. Argentina 17, 299—303 (1956).

Dalzell has given a necessary and sufficient condition for an orthonormal system to be complete [see Tricomi: Vorlesungen über Orthogonalreihen (this Zbl. 65, 296) p. 29]. The author observes that the proof yields the following more general theorem. Let  $p(x)$  be a weight-function and let  $L_p^2$  be the space of those  $f(x)$  for which

$\int_a^b |f(x)|^2 p(x) dx < \infty$ . Let  $\varphi_n$  ( $n = 1, 2, \dots$ ) be an orthonormal system in  $L_p^2$ .  $\varphi_n$  is complete if and only if for some  $g(x) \in L_p^2$  and some  $q(x) > 0$  we have

$$\int_a^b q(\xi) d\xi \int_a^\xi p(x) g^2(x) dx = \sum_{n=1}^{\infty} \int_a^b q(\xi) \left[ \int_a^\xi p(x) g(x) \varphi_n(x) dx \right]^2 d\xi$$

(for  $p \equiv g \equiv q \equiv 1$  we get Dalzell's condition). As an application the author proves that the Laguerre polynomials  $L_n^{(\alpha)}(x)$  form a complete system in  $(0, \infty)$  with respect to the weight-function  $p(x) = x^\alpha e^{-x}$  (loc. cit. p. 212). *J. Horváth.*

• **Jeffery, R. L.:** *Trigonometric series.* (Canadian Mathematical Congress Lecture Series. Nr. 2.) Toronto: University of Toronto Press; London: Oxford University Press; 1956, IV, 39 p. 20 s net. \$ 2,50.

Dieser vor einem nicht rein mathematischen Publikum gehaltene Vortrag entwickelt in dem ersten Teil die Problemgeschichte der Fourierschen Reihen von den Anfängen bis zur Gegenwart. Sodann werden in dem zweiten Teil die Beweise für die im geschichtlichen Überblick vorgetragenen Ergebnisse nachgeholt. Es wird sogar auf die Integralbegriffe von Denjoy und Perron und die Arbeiten von Marcinkiewicz und Zygmund, Burkil und James eingegangen. *V. Garten.*

**James, R. D.:** *Summable trigonometric series.* Pacific J. Math. 6, 99—110 (1956).

If a trigonometric series is everywhere summable  $(C, k)$ , and its conjugate series is subject to a suitable condition, then the original series is proved to be a Fourier-

like series by means of the generalized  $P^{k+2}$ -integral (James, this. Zbl. 55,52).

*K. Chandrasekharan.*

Izumi, Shin-ichi and Masako Satô: Fourier Series I. Parseval relation. Proc. Japan Acad. 32, 446—450 (1956).

Verff. geben hinreichende Bedingungen für das Bestehen der Parsevalschen Gleichung

$$(1) \quad \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(x) g(x) dx = \frac{1}{4} a_0 a'_0 + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n a'_n + b_n b'_n)$$

in der folgenden Form: 1.  $g(t)$  sei  $L$ -integrabel und  $f(t)$  sei eine beschränkt meßbare Funktion derart, daß

$$N \int_x^{x+\pi/N} \left| \sum_{k=1}^{[N/2]} \frac{f(t \pm (2k-1)\pi/N) - f(t \pm 2k\pi/N)}{k} \right| dt$$

in  $x$  gleichmäßig beschränkt ist und fast überall (nicht notwendig gleichmäßig in  $x$ ) gegen Null strebt; dann gilt (1). 2.  $g(t)$  sei beschränkt meßbar und  $f(t)$  sei eine integrierbare Funktion derart, daß

$$\int_0^{2\pi} \left| \sum_{k=1}^{[N/2]} \frac{f(t \pm 2k\pi/N) - f(t \pm (2k-1)\pi/N)}{k} \right| dt$$

für  $N \rightarrow \infty$  gegen Null strebt; dann gilt (1). Drei weitere Bedingungen werden ohne Beweis mitgeteilt.

*V. Garten.*

Tsuchikura, Tamotsu: Some theorems on Fourier series. Tôhoku math. J., II. Ser. 8, 188—200 (1956).

Die Funktion  $f(x)$  besitze die Periode  $2\pi$ , und  $s_m(x)$  bezeichne die  $m$ -te Teilsumme der Fourierreihe von  $f(x)$ . Ein bekanntes Problem von Zalcwasser lautet:  $\{p_k\}$  sei eine im engeren Sinne wachsende Folge positiver ganzer Zahlen. Gilt dann für eine über dem Periodenintervall quadratisch integrierbare Funktion  $f(x)$  für fast alle  $x$  die Beziehung (1)  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n |s_{p_k}(x) - f(x)| = 0$ ? Auf diese Frage wurden verschiedene Antworten gegeben, einerseits unter gewissen zusätzlichen Bedingungen für die Folge  $\{p_k\}$  (A. Zygmund, dies. Zbl. 19, 16), andererseits unter gewissen zusätzlichen Bedingungen für die Funktion  $f(x)$ ; insbesondere wurde vom Verf. (dies. Zbl. 53, 40) die Behauptung (1) für stetige Funktionen vom Stetigkeitsmodul  $o(1/\log \log(1/|h|))$  für  $h \rightarrow 0$  bewiesen. In der vorliegenden Arbeit wird dieser Satz in zweierlei Richtung verbessert: erstens wird die Funktion integrierbar (statt stetig) vorausgesetzt und zweitens wird ein positiver Exponent  $\alpha$  an den Summanden von (1) hinzugefügt. Der Hauptsatz lautet dann:  $f(x)$  sei eine über  $(0, 2\pi)$  integrierbare Funktion und  $\{p_k\}$  sei eine im engeren Sinne wachsende Folge positiver Zahlen. Ist dann die Bedingung (2)  $\int_0^h \{f(x+t) - f(x-t)\} dt = o(|h|/\log \log(1/|h|))$  für  $h \rightarrow 0$  gleichmäßig in  $x$  ( $0 \leq a \leq x \leq b \leq 2\pi$ ) erfüllt, so gilt für jede beliebige positive Zahl  $\alpha$  und für fast alle  $x$  in  $(a, b)$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n |s_{p_k}(x) - f(x)|^\alpha = 0 \quad \text{und} \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n |\bar{s}_{p_k}(x) - \bar{f}(x)|^\alpha = 0,$$

wobei  $f(x)$  zu  $f(x)$  und  $\bar{s}_n(x)$  zu  $s_n(x)$  konjugiert ist. — Nebenbei ergibt sich mit derselben Methode ein Beweis für ein Konvergenzkriterium von R. Salem (dies. Zbl. 57, 52): Genügt eine über  $(0, 2\pi)$  integrierbare Funktion  $f(x)$  der Bedingung (2) gleichmäßig in  $x$  ( $0 \leq a \leq x \leq b \leq 2\pi$ ), so konvergiert die Fourierreihe von  $f(x)$  fast überall in  $(a, b)$ . Die Überlegungen werden auf gewisse Interpolationsprobleme angewandt und führen so zu Verallgemeinerungen einiger Resultate von Erdős (dies. Zbl. 37, 177).

*V. Garten.*



**Kinukawa, Masakiti: On the convergence character of Fourier series. II.** Proc. Japan Acad. **32**, 24—26 (1956).

In Verallgemeinerung früherer Ergebnisse von S. Izumi (dies. Zbl. **65**, 56) und von M. Kinukawa (dies. Zbl. **67**, 42) beweist Verf. den Satz 1: Es sei  $0 < \alpha \leq 1$  und  $k > 0$ . Sobald  $f(x)$  zur Klasse  $\text{Lip } \alpha$  gehört, konvergiert die Reihe  $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{|s_n(x) - f(x)|^k}{n^\delta (\log n)^\gamma}$  gleichmäßig, wenn  $\delta = 1 - k\alpha$  und  $\gamma > 1$  ist. In ähnlicher Weise beweist er den Satz 2: Es sei  $0 < \alpha < 1$  und  $k > 0$ . Ist die Bedingung

$$|f(x+t) - f(x)| \leq A |t|^\alpha / \{\log(1/|t|)\}^\gamma$$

gleichmäßig erfüllt, so konvergiert die Reihe  $\sum_{n=1}^{\infty} |s_n(x) - f(x)|^k / n^\delta$  gleichmäßig, wenn  $\delta = 1 - k\alpha$  und  $\gamma > 1/k$  ist.

V. Garten.

**Izumi, Shin-ichi: Some trigonometrical series. XIX.** Proc. Japan Acad. **32**, 90—92 (1956).

Verf. beweist den folgenden Satz:  $f(x)$  sei fast überall differenzierbar und genüge der Bedingung (1)  $\left( \int_0^{2\pi} |f'(x+t) - f'(x-t)|^p dx \right)^{1/p} \leq \frac{A}{(\log 1/t)^\beta}$  mit  $p > 1$ ,  $\beta > 1$ . Dann konvergiert die Reihe (2)  $\sum |s_n(x) - f(x)|$  fast überall, wobei  $s_n(x)$  die  $n$ -te Teilsumme der Fourierreihe von  $f(x)$  bezeichnet. Allgemeiner kann sogar die Bedingung (1) durch die Bedingung  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \omega_p' \left( \frac{1}{n} \right) < \infty$  ersetzt werden, wobei

$\omega_p'(t) = \max_{0 \leq h \leq t} \left( \int_0^{2\pi} |f'(x+h) - f'(x-h)|^p dx \right)^{1/p}$  gesetzt ist. Unter Heranziehung der  $\alpha$ -ten Ableitung  $f^\alpha(t)$  ( $0 < \alpha < 1$ ) von  $f(t)$  folgt die Behauptung (2) auch unter der Voraussetzung

$$\left( \int_0^{2\pi} |f^\alpha(x+t) - f^\alpha(x-t)|^p dt \right)^{1/p} \leq A \frac{t^{1-\alpha}}{(\log 1/t)^\beta}$$

mit  $p > 1$ ,  $\beta > 1$ .

V. Garten.

**Koizumi, Sumiyuki: Correction and remark on the paper: On integral inequalities and certain of its applications to Fourier series.** This Journal Vol. 7 (1955), No. 1—2, pp. 119—127. Tôhoku math. J., II. Ser. **8**, 235—243 (1956).

In the author's previous paper (S. Koizumi, this Zbl. **66**, 50), there is an essential error which was pointed out by the above Zbl.-review. In this note he corrects his Theorem D in the following form: Let  $\varphi(z) \in H^p$  ( $p > 1$ ), then for  $2 \leq q < 2p$ ,

$$\int_{-\pi}^{\pi} \{g_q^*(\theta)\}^p d\theta \leq A_{pq} \int_{-\pi}^{\pi} |\varphi(e^{i\theta})|^p d\theta,$$

where

$$g_q^*(\theta) = \left\{ \frac{1}{2\pi} \int_0^1 (1-\varrho)^{q-1} d\varrho \int_{-\pi}^{\pi} |\varphi'(\varrho e^{i(\theta+\varphi)})|^q P(\varrho, t) dt \right\}^{1/q}.$$

Consequently, the reviewer's theorem on Strong summability (G. Sunouchi, this Zbl. **40**, 182) cannot be proved by this method completely. There are some remarks on strong summability theorems, but these problems are investigated thoroughly by T. M. Flett [Proc. London math. Soc., III. Ser. **7**, 113—141 (1957)] independently.

G. Sunouchi.

### Spezielle Funktionen:

**Feldmann, L.: On a characterization of the classical orthogonal polynomials.** Acta Sci. math. **17**, 129—133 (1956).

Es wird der Beweis für folgenden Satz gegeben: Seien  $p_0, p_1, p_2, \dots$  Polynome der genauen Grade  $0, 1, 2, \dots$  mit verschiedenen reellen Nullstellen, derart, daß die Nullstellen von  $p_{n+1}$  jeweils durch die von  $p_n$  getrennt werden. (Diese Eigenschaften sind speziell erfüllt für orthogonale Polynomsysteme mit nicht-negativer Gewichtsfunktion.) Sind dann diese Polynome Lösungen einer Differentialgleichung  $a(x) y''(x) + b(x) y'(x) = \lambda y(x)$  für entsprechende Werte  $\lambda = \lambda_0, \lambda_1, \lambda_2, \dots$ , so handelt es sich notwendig um ein klassisches orthogonales Polynomsystem, d. h. abgesehen von linearer Transformation der Variablen um eines der Systeme von Jacobi bzw. Laguerre bzw. Hermite.

F. W. Schäfke.

Arscott, F. M.: Recurrence formulae for Lamé polynomials. J. London math. Soc. **31**, 360—364 (1956).

Sei  $E_n^m(z)$  ein Lamésches Polynom vom Grad  $n$  ( $n = 0, 1, 2, \dots$ ), d. h. eine Lösung von  $w''(z) + (h - n(n+1)k^2 \operatorname{sn}^2 z) w(z) = 0$ , die ein mit  $1, \operatorname{sn} z, \operatorname{cn} z, \operatorname{dn} z, \operatorname{sn} z \operatorname{cn} z, \operatorname{sn} z \operatorname{dn} z, \operatorname{cn} z \operatorname{dn} z$  oder  $\operatorname{sn} z \operatorname{cn} z \operatorname{dn} z$  multipliziertes Polynom in  $\operatorname{sn}^2 z$  ist. Sei mit demselben  $E_n^m$  gesetzt:  $E_n^m p(\alpha, \beta) = E_n^m(\alpha) E_n^m(\beta)$ . Für sie bestehen nach Hobson gewisse Orthogonalitäts- und Normierungsrelationen. Diese werden zusammen mit der Eigenschaft der linearen Unabhängigkeit und mit Konstantenabzählungen bei den entstehenden Polynomen in  $U = \operatorname{sn}^2 \alpha + \operatorname{sn}^2 \beta$  und  $V = \operatorname{sn}^2 \alpha \operatorname{sn}^2 \beta$  benutzt, um z. B. eine Funktion  $\operatorname{sn} \alpha \operatorname{sn} \beta E_{2n}^m p(\alpha, \beta)$  mit einem  $E$  erster Art (Faktor 1) als Linearkombination der  $E_{2n-1}^{m'} p$  und  $E_{2n+1}^{m'} p$  zweiter Art (Faktor  $\operatorname{sn}$ ) darzustellen. Die Koeffizienten erscheinen — entsprechend den Orthogonalitäts- und Normierungsrelationen — in Integralform und enthalten die verknüpften Funktionen. Daher erscheint dem Ref. die Bezeichnung „Rekursionsformeln“ nicht angebracht und irreführend.

F. W. Schäfke.

Meligy, A. S.: The wave functions in coulomb fields. Nuclear Phys. **1**, 610—618 (1956).

Als Coulombsche Wellenfunktion führt der Verf. die beiden Funktionen  $J_{k,m}(\zeta)$  und  $Y_{k,m}(\zeta)$  ein. Sie stellen zwei linear unabhängige Lösungen der bekannten Whittakerschen Differentialgleichung  $W'' + [\frac{1}{4} - k/\zeta + (k^2 - m^2)/\zeta^2] W = 0$  dar. Dabei hängt die Funktion  $J_{k,m}(\zeta)$  wiederum über die Gleichung  $J_{k,m}(\zeta) = i^{-(m+1/2)} \cdot M_{i k, m}(i \zeta) / \Gamma(1 + 2m)$  mit der bekannten Funktion  $M_{k,\mu}$  zusammen. Die Funktion  $Y_{k,m}(\zeta)$ ,  $m$  ganzzahlig, ist gleich dem Grenzwert des Ausdrucks

$$\left\{ \Gamma\left(\frac{1}{2} + \mu + i k\right) \Gamma\left(\frac{1}{2} + \mu - i k\right) (e^{+\pi k} + e^{-\pi k} \cdot \cos 2\pi \mu) \cdot J_{k,\mu}(\zeta) - 2\pi \cdot J_{k,-\mu}(\zeta) \right\} / 2\pi \sin 2\pi \mu$$

für  $\mu \rightarrow m$ . Für beide Funktionen werden Neumannsche Reihen angegeben. An fremder Literatur werden nur zwei Aufsätze berücksichtigt.

H. Buchholz.

Mohr, Ernst: Nachtrag zu meiner Note „Die Maxwellsche Erzeugung der Kugelfunktionen“. Math. Nachr. **15**, 122 (1956).

Betrifft dies. Zbl. **57**, 53.

Bhonsle, B. R. and C. B. L. Varma: On some integrals involving Legendre function, associated Legendre function and Jacobi polynomials. Bull. Calcutta math. Soc. **48**, 103—108 (1956).

Verf. wertet Integrale der Form  $\int_{-1}^{+1} (1 - x^2)^{\pm m/2} (1 + x)^p P_n^m(x) dx$ ,  $\int_{-1}^{+1} (1 - x)^\alpha (1 + x)^p P_n^{\alpha,\beta}(x) dx$ ,  $\int_{-1}^{+1} (1 + x)^p P_m(x) P_n(x) dx$ ,  $\int_{-1}^{+1} (1 \pm x)^p P_n(x) dx$ ,  $\int_{-1}^{+1} (1 - x^2)^p P_n(x) dx$ ,  $\int_{-1}^{+1} f(x) P_{p+m}^m(x) P_{q+m}^m(x) dx$ ,  $f(x) = \begin{cases} x^{p-q} \\ (1+x)^{p-q} \end{cases}$  aus. Leider haben sich Druckfehler eingeschlichen; z. B. muß es in der Formel (2.2)



heißen:  $\Gamma(p+1)$ ,  $\Gamma(p+m+n+2)$ ,  $p > -m-1$  statt  $\Gamma(m+1)$ ,  $\Gamma(p+n+2)$ ,  $p > -m-1$ ; in Formel (4. 2) im Nenner  $\Gamma(p-\beta-n+1)$  statt  $\Gamma(p-\beta+n+1)$ . In Formel (3. 1) ist  $m=1, 2, 3, \dots$  auszuschließen.

O. Volk.

**Tricomi, Francesco G.:** Cosa sono e a che servono le funzioni ipergeometriche confluenti. Rend. Sem. mat. fis. Milano 25, 3—14 (1956).

Die Arbeit bringt einen kurzen Überblick über die verschiedenen Lösungen der Kummerschen Differentialgleichung, die bekanntlich sehr nahe verwandt ist mit der Differentialgleichung der konfluenten hypergeometrischen Funktion. Es werden die Integraldarstellungen, die Reihenentwicklungen und die asymptotischen Entwicklungen ihrer beiden linear voneinander unabhängigen Lösungsfunktionen angegeben, wobei die besondere, von Tricomi eingeführte Bezeichnungsweise dieser Funktionen bevorzugt wird. Zum Schluß werden die Sonderfälle dieser Funktion aufgestellt.

H. Buchholz.

**MacRobert, T. M.:** On recurrence formulae. Proc. Glasgow math. Assoc. 3, 36—37 (1956).

Verf. geht von vier dreigliedrigen Gaußschen Rekursionen der hypergeometrischen Funktion  $F(a, b; c; z)$  aus, die er in die  $E$ -Funktion überschreibt, und erhält durch Verallgemeinerung Rekursionen, die als Spezialfälle die Rekursionsformeln für die Legendreschen, die Besselschen, die hypergeometrischen Funktionen u. a. enthalten.

O. Volk.

**Singh, V. N.:** A note on the partial sums of certain basic bilateral hypergeometric series. Proc. Cambridge philos. Soc. 52, 756—758 (1956).

Aus der von R. P. Agarwal (dies. Zbl. 50, 295) für Teilsummen von hypergeometrischen Basisreihen gegebenen Beziehung wird die entsprechende für bilateral hypergeometrische Reihen abgeleitet.

O. Volk.

**Slater, L. J. and A. Lakin:** Two proofs of the  ${}_6\Psi_6$  summation theorem. Proc. Edinburgh math. Soc., II. Ser. 9, 116—121 (1956).

Es werden zwei neue Beweise eines Resultates von Bailey (dies. Zbl. 14, 160) über die verallgemeinerte hypergeometrische Funktion  ${}_6\Psi_6$  gegeben. (Man vgl. auch Slater, dies. Zbl. 44, 61; 46, 272).

K. Prachar.

**Fabian, William:** A generalised hypergeometric function. Proc. Edinburgh math. Soc., II. Ser. 9, 151—153 (1956).

Verf. untersucht das Verhalten der Funktionen

$$\frac{\Gamma(c)\Gamma(\lambda+1)}{\Gamma(a)\Gamma(b)} \sum_{n=\begin{cases} 0 \\ -\infty \end{cases}}^{+\infty} \frac{\Gamma(a+n)\Gamma(b+n)}{\Gamma(c+n)\Gamma(\lambda-n+1)} z^{\lambda+n},$$

$a, b, c, \lambda$  nicht ganzzahlig unter Anwendung von „fractional integrals“. (Vgl. dies. Zbl. 16, 124) insbesondere auch für  $|z|=1$ .

O. Volk.

**Heselden, G. P. M.:** Some inequalities satisfied by incomplete beta functions. Skand. Aktuarietidskr. 1955, 192—200 (1956).

Es sei  $a = n^{-1/2}(n-1)$  und  $T(x, n) = xR(x, n) + S(x, n)$  mit

$$R(x, n) = \frac{\Gamma(n-2)}{\Gamma^2(n/2-1)} \int_0^1 u^{n/2-2} (1-u)^{n/2-2} du \quad (x \geq -a),$$

$$S(x, n) = \frac{1}{2^{n-1} n^{1/2}} \frac{\Gamma(n)}{\Gamma^2(n/2)} (1 - nx^2(n-1)^{-2})^{n/2-1} \quad (-a \leq x < a)$$

bzw.

$$S(x, n) = 0 \quad (x \geq a).$$

Für ganzzahliges  $n \geq 3$  und reelles  $x \geq -a$  gilt dann  $T(x, n) \leq T(x, n+1)$ .

$S(x, n) \leq S(x, n+1)$  und ferner  $\lim_{n \rightarrow \infty} T(x, n) = (2\pi)^{-1/2} x \int_{-x}^{\infty} \exp(-w^2/2) dw +$

$(2\pi)^{-1/2}$ .

E. Kreyszig.

## Funktionentheorie:

**Delange, Hubert:** Sur la forme forte du théorème de Cauchy relatif à l'intégrale d'une fonction de variable complexe. *Bull. Sci. math.*, II. Sér. **80**, 156—160 (1956).

L'A. donne une nouvelle démonstration du théorème de Cauchy, lorsque la fonction  $f(z)$  est continue à l'intérieur d'une courbe fermée, sans point double, rectifiable  $C$  et sur  $C$ , et holomorphe (dérivable en chaque point) à l'intérieur de  $C$ .

C. Uluçay.

**Grau, A. A. and B. T. Goldbeck jr.:** Algebraic properties of classes of functions. *Amer. math. Monthly* **63**, 636—638 (1956).

Es sei  $n$  eine natürliche Zahl,  $\omega$  eine primitive  $n$ -te Einheitswurzel und  ${}_k\mathfrak{F}_n$  die Gesamtheit der Funktionen mit  $f(\omega x) = \omega^k f(x)$ . Die Verf. bemerken, daß sich jede Funktion  $f(x)$  eindeutig in der Form  $f(x) = f_0(x) + \dots + f_{n-1}(x)$  mit  $f_k(x) \in {}_k\mathfrak{F}_n$  darstellen läßt und daß die Klassen  ${}_k\mathfrak{F}_n$  bei geeigneten Definitionen vermöge  ${}_k\mathfrak{F}_n \rightarrow {}_h\mathfrak{F}_n \bmod n$  einen zum Restklassenring  $\bmod n$  isomorphen Ring bilden. *H. W. Leopoldt.*

**Walsh, J. L.:** Note on degree of approximation to analytic functions by rational functions with preassigned poles. *Proc. nat. Acad. Sci. USA* **42**, 927—930 (1956)

Results due to Sewell [*Revista Ci.* **41**, 435—451 (1939)] and Elliott (this *Zbl.* **50**, 76) are generalized. Theorem 1. Let  $E$  be a bounded (i) open point set of the  $z$ -plane whose boundary  $J$  consists of a finite number of mutually disjoint analytic Jordan curves  $J_j$ ,  $J = \sum J_j$ . Let  $f(z)$  be analytic on (ii)  $E$ , continuous on (iii)  $E + J$ , and (iv) of class  $L(p, \alpha)$  on  $J$ ,  $0 < \alpha < 1$ . In the extended plane, let the set complementary to (v)  $E + J$  consist of the mutually disjoint regions  $E_1, E_2, \dots, E_\nu$ , and for each  $k$  and  $n$  let points (1)  $a_{n1}^{(k)}, a_{n2}^{(k)}, \dots, a_{nm_{nk}}^{(k)}$  in  $E_k$  be given;  $k = 1, 2, \dots, \nu$ ;  $n = \nu, \nu + 1, \nu + 2, \dots$ ;  $\sum_{k=1}^{\nu} m_{nk} = n$ . Suppose that the points

(1) have no limit points on  $J$  and that the numbers  $n/m_{nk}$  are bounded for all  $k$  and  $n$ . Then there exist rational functions  $R_n(z)$  of respective degrees  $n$  with poles lying in the points (1) and satisfying  $|f(z) - R_n(z)| \leq A/n^{p+\alpha}$ ,  $z$  on  $E + J$ . ((iv) means the class of functions each having a one-dimensional  $p^{\text{th}}$  derivative on  $J$  which satisfies there a Lipschitz condition of order  $\alpha$ .) An extension is also proved: Theorem 2: We can replace (i), (ii), (iii), (v) by „closed“, „the interior points of  $E$ “,  $E, E$  respectively.

N. A. Bowen.

**Evgrafov, M. A.:** Die Methode der nahe beieinander liegenden Systeme im Raum der analytischen Funktionen und ihre Anwendungen auf die Interpolation. *Trudy Moskovsk. mat. Obsč.* **5**, 89—201 (1956) [Russisch].

Die beiden ersten Kapitel beziehen sich auf Vollständigkeitsbedingungen und verwandte Fragen für Systeme von analytischen Funktionen, sowie auf Abschätzungen von Abel-Gontscharoffschen Polynomen. Die Betrachtungen stützen sich im wesentlichen auf die Untersuchungen von A. Markuševič [*Mat. Sbornik*, n. Ser. **17**, 211—252 (1945)] und sind z. T. vorbereitend. Als Beispiel sei erwähnt:

ist  $\lim_{k \rightarrow \infty} \sum_{k=0}^{\infty} |\varepsilon_{nk}| r^k < 1$ , so bilden die Funktionen  $z^n + z^{n+1} \sum_{k=0}^{\infty} \varepsilon_{nk} z^k$  eine Basis im Kreise  $|z| < r$ . Die beiden übrigen Kapitel handeln von den Abel-Gontscharoffschen Reihen. Die Darstellbarkeitsbedingungen lauten folgendermaßen: 1. Läßt sich eine ganze Funktion  $F(z)$  in der Form

$$(1) \quad F(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_C \Phi(z \zeta) f(\zeta) d\zeta$$

darstellen, wobei  $\Phi(z)$  eine verallgemeinerte Mittag-Lefflersche Funktion ist, die Funktion  $f(z)$  regulär analytisch außerhalb des durch die Bedingungen

$$|\omega(z) e^{\omega(z)/\varrho}| < e^{-1/\varrho}, \quad z = \varrho^{-1/\varrho} \omega(1 + \omega)^{1/\varrho - 1}, \quad \omega(0) = 0, \quad \varrho > 1$$

definierten Gebiets  $G_\varrho$  der  $z$ -Ebene ist und die Kurve  $C$  das Gebiet  $G_\varrho$  umschließt,



so läßt sich  $F(z)$  in die den Interpolationsstellen  $\lambda_n = n^{1/\varrho} l(n)$ ,  $n l'(n)/l(n) \rightarrow 0$  entsprechende Abel-Gontscharoffsche Reihe entwickeln; 2. Konvergiert die den Interpolationsstellen  $\lambda_n = n^{1/\varrho}$  entsprechende Abel-Gontscharoffsche in irgendeinem Kreis so rasch wie die geometrische Reihe, so läßt sich die Summe in der Form (1)

mit  $\Phi(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{\Gamma(n/\varrho + 1)}$  darstellen. Weitere Untersuchungen über gewisse

Integralgleichungen, Abschätzungen von Derivierten und vollständige Systeme.

*J. Tagamlizki.*

**Džrbašjan (Džrbašyan), M. M. and I. O. Chačatryan (Khatchatryan):** On the completeness of a system of  $\{z^{\lambda_n}\}$  functions in the complex domain for weighed square approximation. Doklady Akad. Nauk SSSR 110, 914—917 (1956) [Russisch].

Les AA. donnent des conditions permettant d'affirmer que le système  $\{z^{\lambda_n}\}$  est complet dans les espaces de fonctions suivants, normés par la racine carrée de l'intégrale indiquée: fonctions  $f$  holomorphes dans  $|\arg z| < \pi/2\alpha$ , avec  $\iint f(z)^2 \exp[-P(|z|)] dx dy$  finie; fonctions  $\varphi$  vérifiant sur le contour de cet angle  $\int |\varphi(z)|^2 \exp[-P(|z|)] d|z|$  finie,  $P(r)$  désignant le poids choisi. *G. Bourion.*

**Džrbašjan (Džrbašyan), M. M.:** On asymptotic approximation by integral functions in the half-plane. Doklady Akad. Nauk SSSR 111, 749—752 (1956) [Russisch].

Soit  $P(r)$  continue, non-décroissante pour  $r \geq 0$ ,  $P(r)/r \rightarrow 0$ ,  $\int_0^{\infty} P(r) r^{-2} dr$  convergente; pour toute  $f(z)$  holomorphe dans  $\text{Im } z > 0$  et continue (à distance finie) sur l'axe réel, et pour tout  $\varepsilon$ , on peut trouver une fonction entière vérifiant  $|f(z) - G_\varepsilon(z)| \exp P(|z|) < \varepsilon$  dans  $\text{Im } z > 0$ . Si par contre  $\int_0^{\infty} P(r) r^{-2} dr$  diverge, l'existence d'une telle approximation pour un  $\varepsilon$  au moins entraîne que  $f(z)$  est entière. *G. Bourion.*

**Akutowicz, Edwin J.:** A qualitative characterization of Blaschke products in a halfplane. Amer. J. Math. 78, 677—684 (1956).

The author proves that if  $b(z)$  is a Blaschke product in the upper half-plane,  $\text{Im } z = \text{Im } (x + i y) = y > 0$ , then  $\int_{-\infty}^{\infty} (1 + x^2)^{-1} \log |b(z)| dx \rightarrow 0$  as  $y \rightarrow 0 +$ . Conversely if  $F(z)$  is analytic for  $\text{Im } z = \text{Im } (x + i y) = y > 0$ , such that  $|F(z)| < 1$  and  $\int_{-\infty}^{\infty} (1 + x^2)^{-1} \log |F(z)| dx \rightarrow 0$  as  $y \rightarrow 0 +$ , then  $F(z) = e^{ikz+ic} b(z)$ , where  $k \geq 0$ ,  $c$  are real constants and  $b(z)$  is the Blaschke product formed with the zeros of  $F(z)$ . *C. Uluçay.*

**Rubel, L. A.:** Necessary and sufficient conditions for Carlson's theorem on entire functions. Trans. Amer. math. Soc. 83, 417—429 (1956).

Let  $A$  be a set of positive integers  $n$ . Let  $A(t) = \text{number of } n \text{ (in } A) \leq t$ . Define  $\Delta_\delta = \lim_{t \rightarrow \infty} t^{-1} A(t)$ . Theorem 1. In order that each entire function  $f(z)$  satisfying (i)  $f(z) = O(1) \exp(\tau|z|)$  for some  $\tau < \infty$ , (ii)  $f(iy) = O(1) \exp(c|y|)$  for some  $c < \pi$ , (iii)  $f(n) = 0$  for each  $n$  in  $A$ , shall vanish identically, it is necessary and sufficient, that (iv)  $\Delta(A) = 1$ . Hence Theorem 2. In order that a nonconstant function  $g(z)$  whose region of regularity includes the axis  $-\infty \leq z \leq 0$  shall exist, with a power series  $g(z) = \sum^* a_n z^n$ , it is necessary and sufficient that  $\delta(A) > 0$ . (The \* indicates that the  $n$  lie in  $A$ .) It is shown that  $\Delta(A) = 1$  if and only if (v)  $L(A) = 1$ , and that theorem 1 holds with (v) in place of (iv); where  $L(A) = \inf_{\lambda > 1} \lim_{t \rightarrow \infty} (\log \lambda)^{-1} \sum_{t \leq n \leq \lambda t}^* n^{-1}$ . Theorem 1 extends Carlson's theorem that the only entire function  $f(z)$  satisfying (i), (ii), and (iii) for every positive integer  $n$ , is  $f(z) \equiv 0$ .

Let  $A$  be a set of positive numbers  $\lambda_n$  satisfying  $\lambda_{n+1} - \lambda_n \geq \gamma > 0$ , ( $n = 1, 2, 3, \dots$ ). The author conjectures that Theorem 1 still holds with  $K, \lambda_n, A, L(A) \geq K/\pi$  in place of  $\pi, n, A, (iv)$  respectively, points out that the „sufficiently“ part follows as before, and discusses difficulties arising in the „necessity“ parts, where he finds a comparison of various upper densities useful. An analogous theorem for functions regular in  $R(z) \geq 0$  has been given by Fuchs (see Boas, Entire Functions, p. 157; this Zbl. 58, 302).

N. A. Bowen.

**Clunie, J.:** The behaviour of integral functions determined from their Taylor series. Quart. J. Math., Oxford II. Ser. 7, 175—182 (1956).

In dieser Arbeit werden die ganzen Funktionen  $f(z) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n z^n$  untersucht, deren Koeffizienten  $a_n$  folgende Bedingung befriedigen: Es gibt eine positive Zahl  $\alpha$ , so daß  $[(n+1)/n]^x \cdot |a_n/a_{n+1}|$  für hinreichend großes  $n$  eine zunehmende Funktion von  $n$  ist. Der Verf. beweist, daß für solche ganze Funktionen

$$(1) \quad M(r, f) < \{1 + O(1)\} A_f,$$

wo  $A_f = \alpha^{-\alpha-1} \cdot \Gamma(1+\alpha) \cdot e^\alpha \cdot \nu(r, f) \cdot \mu(r, f)$  ist, und daß

$$(2) \quad \limsup_{r \rightarrow \infty} \log M(r, f) / \log \mu(r, f) \leq 1 + \alpha^{-1}.$$

Er bildet eine ganze Funktion  $g_\alpha(z)$  mit den Eigenschaften:  $M(r, g_\alpha) > \{1 - O(1)\} A_{g_\alpha}$  für eine unendliche Folge von  $r$  und  $\limsup_{r \rightarrow \infty} \log M(r, g_\alpha) / \log \mu(r, g_\alpha) = 1 + \alpha^{-1}$ .

Daraus folgt, daß im allgemeinen die Ergebnisse (1) und (2) für den Fall  $\alpha = 0$  nicht gelten. Mit Hilfe von (2) wird ein Resultat von Shah und Singh (dies. Zbl. 55, 306) präzisiert.

C. Andreian Cazacu.

**Linden, C. N.:** The minimum modulus of functions regular and of finite order in the unit circle. Quart. J. Math., Oxford II. Ser. 7, 196—216 (1956).

Es sei  $g(z)$  regulär in  $|z| < 1$  und von der Wachstumsordnung  $\beta > 1$ . Sind  $M(r)$  und  $\mu(r)$  Maximalmodul und Minimalmodul von  $g$  auf  $|z| = r$ , dann gilt

$$-K(\beta) \leq \limsup_{r=1} \frac{\ln \mu(r)}{\ln M(r) \ln \ln M(r)} \leq 0.$$

Diesen Satz beweist Verf. in Analogie zu Aussagen entsprechender Art von Hayman (dies. Zbl. 48, 55) über ganze Funktionen. Der Beweis schließt sich teilweise dem Haymanschen methodisch an. Als Hilfsmittel wird ferner die Lindelöfsche variable Ordnung (proximate order) benutzt. Verf. konstruiert als die Sache beleuchtendes Beispiel zu jedem  $\beta \geq 1$  eine Funktion mit spiralgestellten Nullstellen unbeschränkt wachsender Multiplizität, die sich gegen die Peripherie  $|z| = 1$  häufen, und zwar so, daß der oben erwähnte  $\limsup < 0$  ausfällt.

G. af Hällström.

**Rahman, Qazi Ibadur:** On entire functions of infinite order. Tôhoku math. J., II. Ser. 8, 165—169 (1956).

Let  $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$  be an entire function of  $\infty$  order, let  $\mu(r)$  be the modulus of the maximum term when  $|z| = r$ , let  $\nu(r, f)$  be its rank, and let  $M(r)$ ,  $M(r, f^{(p)})$  denote  $\max_{|z|=r} |f(z)|$ ,  $\max_{|z|=r} |f^{(p)}(z)|$  respectively. Then it is known [Shah, Math. Student 10, 80—82 (1942); Shah, this Zbl. 37, 180; Shah and Khanna, this Zbl. 51, 59; Clunie, this Zbl. 64, 72; respectively] that  $\lim_{r \rightarrow \infty} (i, ii, iii, iv) = 0$ , where

(i)  $= [\nu(r)]^{-1} \log \mu(r)$ , (ii)  $= [\nu(r)]^{-1} \log M(r)$ , (iii)  $= [\nu(r, f)]^{-1} \log \{r M(r, f^{(1)})\}$ , (iv)  $= [\nu(r, f)]^{-1} \log \{r^s M(r, f^{(s)})\}$ , each result being better than the previous one. In (iv),  $s = s(r) = o(\nu/\log \nu)$ . An alternative proof of (iv) is given here, which allows the author to replace  $r^s$  by  $r^S$  where  $S = S(r) = O(\nu/\log \nu)$ . He further states that (in Math. Student to appear) he has proved that  $\nu(r, f) \leq \nu(r, f^{(1)}) \leq \dots$  for any function of finite or infinite order, and so can replace  $\nu(r, f)$  in (iv) by



$\nu(r, f^{(u)})$  where  $u$  is any integer  $> 0$ . He also gives another result better than (i).

N. A. Bowen.

**Schubart, Hans:** Zur Wertverteilung der Painlevéschen Transzendenten. Arch. der Math. 7, 284—290 (1956).

Im Zusammenhang mit Arbeiten von H. Wittich (dies. Zbl. 50, 90) wird die Differentialgleichung  $w'' = P(z, w)$  untersucht und deren Lösungen unter bestimmten Voraussetzungen mit der Weierstraßschen  $\wp$ -Funktion, bzw. den Painlevéschen Transzendenten identifiziert. Verf. interessiert sich für die Funktionen  $w_1(z)$  bzw.  $w_2(z)$ , die den Differentialgleichungen  $w'' = 6w^2 - 6z$  bzw.  $w'' = 2w^3 + zw + C$  genügen. Für diese Lösungen werden Ergebnisse in Richtung der Wertverteilung im Sinne Nevanlinnas angegeben, so u. a. daß  $w_1$  und  $w_2$  die genaue Defektrelation erfüllen, wobei höchstens für  $C = 0$   $w_2$  eine Ausnahme bilden kann, und daß  $w_1$  außer  $w = \infty$  keinen vollständig verzweigten Wert besitzt.

H. P. Küinzi.

**Goodman, A. W.:** Functions typically-real and meromorphic in the unit circle. Trans. Amer. math. Soc. 81, 92—105 (1956).

Betrachtet werden in  $E: |z| < 1$  eindeutige analytische Funktionen  $f(z)$ , die der Bedingung  $\Im f(z) \cdot \Im z \geq 0$  genügen.  $f(z)$  gehört zur Klasse  $TM$ , wenn  $f(z)$  meromorph in  $E$  ist, zur Klasse  $TM^* \subset TM$ , wenn in der Umgebung von  $z = 0$

$f(z) = -\frac{1}{z} + \sum_{n=2}^{\infty} a_n z^n$  gilt. Jedes  $f(z) \in TM$  hat einfache reelle Polstellen  $p_j$ ,  $-1 < p_j < 1$ , mit negativem Residuum  $-m_j$ . Verf. gibt scharfe Schranken für  $|f(-a)/\Im f(a)|$ ,  $|f(a)|$  und  $|f'(a)|$  an,  $\Im a \neq 0$ , bestimmt bei festem  $a$  den Wertebereich des Funktionals  $w = f(a)$ ,  $f \in TM$ , und leitet Koeffizientenabschätzungen und Darstellungssätze her.

H. Wittich.

**Heins, Maurice:** Asymptotic spots of entire and meromorphic functions. Proc. nat. Acad. Sci. USA 42, 883—885 (1956).

Die Arbeit enthält Anwendungen des vom Verf. (dies. Zbl. 65, 311) eingeführten und hier im Titel angedeuteten Begriffes. Mittels des „harmonischen Index“ werden hier Sätze über in  $|z| < \infty$  meromorphe Funktionen  $w = f(z)$  bewiesen, wie z. B.: Die auf eine Komponente von  $f^{-1}(\Omega)$  [ $\Omega = \text{Jordangebiet}$ ] eingeschränkte Funktion ist entweder endlich vieldeutig in ganz  $\Omega$ , oder sie ist es höchstens in zwei Punkten von  $\Omega$ .

S. Stoilow.

**Komatu, Yusaku:** A coefficient problem for functions univalent in an annulus. Kōdai math. Sem. Reports 8, 49—70 (1956).

The author studies the coefficient problem for functions  $w = F(z)$  analytic and schlicht in the annulus  $1 < |z| < R$ . It is supposed that  $|z| = 1$  corresponds to

$|w| = 1$  and  $F(1) = 1$ . Assuming that  $F(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n z^n$  is the Laurent expansion of  $F(z)$ , the author obtains bounds for  $|c_n|$  in terms of transcendental functions as well as bounds which do not involve these functions (i. e., elementary bounds). A typical result is

$$(1) \quad |c_n| < \frac{e}{R^{n-1}} \left[ \frac{(R^2 - 1)^2}{R^2(R^2 + 1)} n - \frac{2R^3 - R^2 - 2R - 1}{R^2(R^2 + 1)} + \frac{2R}{R^2 + 1} \frac{1}{n} \right],$$

$$R^{-1} < |z| < 1, \quad n > 1/\log R.$$

Applying this inequality to  $G(z) = R^{-1}F(Rz)$  and remembering that the Laurent coefficients  $b_n$  of  $G(z)$  are connected with those of  $F(z)$  by  $b_n = R^{n-1}c_n$ ,  $n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$ , (1) becomes obviously

$$|b_n| < e \left[ \frac{(R^2 - 1)^2}{R^2(R^2 + 1)} n - \frac{2R^3 - R^2 - 2R - 1}{R^2(R^2 + 1)} + \frac{2R}{R^2 + 1} \frac{1}{n} \right], \quad n > 1/\log R.$$

As  $R \rightarrow \infty$  one gets  $|b_n| < en$  which is Littlewood's result. The author also derives the analogue of the classical area-principle for the duplicated annulus  $R^{-1} < |z| < R$  [ $F(z)$ , formerly defined for  $1 < |z| < R$  can be continued analytically across  $|z| = 1$  by reflection expressed by the functional equation  $F(z)F(1/\bar{z}) = 1$ ]. C. Uluçay.

**Šlionskij (Shlionsky), G. G.:** A contribution to the theory of bounded schlicht functions. Doklady Akad. Nauk SSSR **111**, 962—964 (1956) [Russisch].

Es bezeichne  $\Sigma$  die Klasse der Funktionen  $F(\zeta) = \zeta + \alpha_0 + \alpha_1 \zeta + \dots$ , die für  $|\zeta| > 1$  bis auf den in  $z = \infty$  gelegenen einfachen Pol schlicht und regulär sind und  $\Sigma_m$  die Untermenge der Funktionen von  $\Sigma$ , für die  $|F(\zeta)| > m$  ist. Es wird ohne Beweis bemerkt, daß man für die Klasse  $\Sigma_m$  mit der Methode von Löwner die bekannten Ergebnisse für die Klasse  $\Sigma$  von G. M. Golusin (dies. Zbl. **36**, 188; **44**, 305), N. A. Lebedev (Diss. Leningr. gosud. Univ. 1951), H. Grunsky (dies. Zbl. **22**, 151), M. Schiffer (dies. Zbl. **33**, 363) und L. I. Kolbina (dies. Zbl. **49**, 60) übertragen kann. Als Spezialfälle folgen dann diese Ergebnisse, sowie manche von I. E. Bazilevič (dies. Zbl. **44**, 307), K. Ladegast (dies. Zbl. **51**, 60) und Ju. E. Alenicyan [Doklady Akad. Nauk SSSR, **102**, 861—862 (1955)].

L. Ilieff.

**Miki, Yoshikazu:** A note on close-to-convex functions. J. math. Soc. Japan **8**, 256—268 (1956).

Falls es in  $|z| < R$  ein konvexes  $\varphi(z)$  gibt, so daß ebenda  $\operatorname{Re}(f'(z)/\varphi'(z)) > \epsilon$  ist, so heißt  $f(z)$  beinahe konvex (vgl. Kaplan, dies. Zbl. **48**, 311) und zwar hierbei in bezug auf  $\varphi(z)$ . Nun sei  $f(z) = z + \sum_2^\infty a_n z^n$  in  $|z| < 1$  in bezug auf  $\varphi(z) = z + \sum_2^\infty b_n z^n$  beinahe konvex. Dann beweist Verf., daß für jedes  $n$  auch  $s_n(z) = z + \sum_2^n a_n z^n$  für  $|z| < \frac{1}{2}$  beinahe konvex ist, und zwar in bezug auf  $\sigma_n(z) = z + \sum_2^n b_n z^n$ . Die Schranke  $\frac{1}{2}$  kann nicht erhöht werden, selbst wenn andere Bezugsfunktionen konkurrieren dürfen. Der Satz ist ein Analogon zu gleichartigen Sätzen von Szegő über schlichte, sternartige bzw. konvexe Funktionen [Math. Ann. **100**, 188—211 (1928)]. Der Beweis gründet sich auf ziemlich mühsame Abschätzungen, wobei der Fall  $n = 3$  allein schon mehr als die Hälfte des Arbeitsaufwandes erfordert.

G. af Hållström.

**Komatu, Yusaku:** Further supplement to „On transference of boundary value problems“. Kodai math. Sem. Reports **8**, 1—8 (1956).

(V. ce Zbl. **57**, 62.) L'A. trouve la relation liant les fonctions analytiques  $f(z)$  et  $g(z)$  dont les parties réelles  $u(z) = \operatorname{Re} f$  et  $v(z) = \operatorname{Re} g$  constituent les solutions du problème de Dirichlet et de celui de Neumann dans le domaine infini plan  $D$  limité par le segment rectiligne joignant les points  $z_1 = -i$  et  $z_2 = +i$ , les données frontières de ces deux problèmes étant  $u(\pm 0 + iy) = \pm V^\pm(y)$ ,  $\frac{\partial v}{\partial n}(\pm 0 + iy) = V^\pm(y)$  pour  $-1 < y < 1$ , où  $V^+(y)$  et  $V^-(y)$  sont donnés. Le cas où la frontière de  $D$  est un arc du cercle  $|z| = 1$  est considéré aussi.

F. Leja.

**Babakova, O. I.:** Das verallgemeinerte Problem der Torsion für einen zweifach zusammenhängenden polygonalen Bereich. Ukrain. mat. Žurn. **8**, 450—453 (1956) [Russisch].

Let  $D$  be a polygonal one or double connected domain. On the sides  $l_i$  of the boundary  $F$  of  $D$  there are given polynomials  $P_i(x, y)$ , whose value coincides at the common vertex of  $l_{i-1}$  and  $l_i$ . The problem is to find a function  $f(z)$  analytic in  $D$ , continuous in  $\bar{D}$  such that  $\operatorname{Im} f(z) = P_i(x, y) + C$  on  $F$ , where  $C$  is constant on each component of  $F$ . Starting from the known formula of N. I. Achieser (Elemente der Theorie der elliptischen Funktionen, this Zbl. **45**, 347) for the conformal mapping of  $D$  onto the annulus  $h < |w| < 1$  the author gives a solution of the problem mentioned above. This note is a part of the dissertation of the author. J. Górski.

**Flett, T. M.:** On a theorem of Lindelöf concerning prime ends. Tôhoku math. J., II. Ser. **8**, 273—274 (1956).



Ein von Tsuji stammender Beweis eines bekannten Lindelöfschen Satzes über die Konvergenz gegen Hauptpunkte eines Primendes bei konformer Abbildung wird hier noch vereinfacht. Dies geschieht durch Heranziehung einer Folge von leicht veränderten Funktionen an Stelle der in  $|w| < 1$  definierten Funktion und Anwendung eines bekannten Verfahrens von Montel. *S. Stoilow.*

Fil'čakov, P. F.: Die Methode der sukzessiven konformen Abbildungen und ihre Anwendungen auf Aufgaben der Filtration. III: Der Fall benachbarter Lage der Spunte. Geplante Filtration. Filtration in einem anisotropen Medium. Ukrain. mat. Žurn. 8, 299—318 (1956) [Russisch].

In the third part of this paper (part II, this Zbl. 71, 293) the author considers the problem of filtration when the methods given in the first and second part cease to give the desired approximation. This situation arises when the distance of drilling holes is small. In this case the author considers the normed conformal mapping of a halfplane  $\text{Im } z > 0$  with a given „schlitz“ onto a halfplane  $\text{Im } \zeta > 0$  and gives the formula for the successive approximation of the mapping function. The starting point is the Christoffel-Schwarz formula. Introducing the polar coordinates the author obtains an equation which can be solved by a Newton-method. Another way is also introduced namely the method of the power series for a solution of a differential equation for the mapping function. Using the mapping function of the type given in the I, II and III-d part, it is possible to map with an arbitrary prescribed accuracy a given simply connected domain onto a halfplane. *J. Górski.*

O., J. M<sup>a</sup>: Untersuchung einiger elementarer Beispiele zur konformen Abbildung. Gac. mat., Madrid 8, 155—161 (1956) [Spanisch].

Kuramochi, Zenjiro: Evans's theorem on abstract Riemann surfaces with null-boundaries. I. II. Proc. Japan Acad. 32, 1—6, 7—9 (1956).

In diesen zwei Noten wird der bekannte Evans'sche Satz verallgemeinert, nach dem es immer auf einer in der  $z$ -Ebene gelegenen geschlossenen Menge von der Kapazität Null eine positive Maßverteilung gibt, so daß das zugehörige Potential auf der Menge unendlich wird. Die Verallgemeinerung bezieht sich hier auf null-berandete Riemannsche Flächen, wobei die Punkte des idealen Randes nach Martin (dies. Zbl. 25, 333) eingeführt werden. Zum Schluß wird noch eine notwendige und hinreichende Bedingung angegeben, damit eine Riemannsche Fläche den Rand Null hat. *S. Stoilow.*

Kuramochi, Zenjiro: Mass distributions on the ideal boundaries of abstract Riemann surfaces. II. Osaka math. J. 8, 145—186 (1956).

In einer umfangreichen Arbeit (Teil I, dies. Zbl. 71, 73) widmet sich der Verf. den Gleichgewichtspotentialen auf Riemannschen Flächen mit positiver Berandung  $R^*$  ( $R_n$  ist dabei eine Ausschöpfung und  $R = R^* - R_n$ ). Zur Beschreibung dieser Gleichgewichtspotentiale werden zuerst Kapazitätsfragen auf  $R$  erörtert. Weitere Theoreme sind der Bestimmung harmonischer und superharmonischer Funktionen in  $R$  gewidmet, für die auch Integraldarstellungen gegeben werden vermittlest bestimmter Maßfunktionen. Anschließend Betrachtungen gelten der Klassifikation der idealen Randpunkte. Die Einführung bestimmter Minimalfunktionen führt zu neuen Integraldarstellungen. Im letzten Teil befaßt sich Verf. mit verallgemeinerten Greenschen Funktionen und Maßfunktionen, für die ein Beispiel angegeben wird. *H. P. Küenzi.*

Yûjôbô, Zuiman: On absolutely continuous functions of two or more variables in the Tonelli sense and quasi-conformal mappings in the A. Mori sense. Commentarii math. Univ. Sancti Pauli 4, 67—92 (1955); Supplements and corrections. Ibid. 5, 33—36 (1956).

Nach der Aufstellung einer vorbereitenden hinreichenden Bedingung für absolute Stetigkeit (bei Voraussetzung einer Lipschitz-Bedingung) wendet sich Verf. dem

Vergleich der folgenden beiden Definitionen der  $K$ -Quasikonformität zu: (a) Nach A. Pfluger und A. Mori: Orientierungstreue topologische Abbildung  $z \rightarrow z'$  mit Quasi-Invarianz des Moduls  $\mu(Q)$  jedes allgemeinen Viereckes  $Q$ :  $(1/K)\mu(Q) \leq \mu(Q') \leq K\mu(Q)$ ; (b) Absolut stetige, fast überall differenzierbare orientierungstreue topologische Abbildung mit Dilatationsquotient  $\leq K$ . — Nach einer großen Leistung von A. Mori (s. z. B. dies. Zbl. 77, 79), der aus (a) die Differenzierbarkeit, d. h. im wesentlichen (b) bewies, zeigt Verf. umgekehrt (b)  $\rightarrow$  (a). — Andere äquivalente Definitionen werden angegeben, wobei im wesentlichen die Quasi-Invarianz des Moduls durch die Beschränkung des Quotienten

$$\max_{|z-z_0|=r} |z'-z'_0| / \min_{|z-z_0|=r} |z'-z'_0| \text{ für } r \leq A(z_0) > 0$$

ersetzt wird. — Die Beweismethode beruht auf mengen- und integraltheoretischen Untersuchungen. J. Hersch.

Pesin, I. N.: Metrische Eigenschaften der  $Q$ -quasikonformen Abbildungen. Mat. Sbornik, n. Ser. 40 (82), 281—294 (1956) [Russisch].

The definition of  $Q$ -quasiconformal maps („general  $Q$ -quasiconformal maps“) used by the author is a posteriori proved to coincide with the following one: homeomorphisms of  $|z| < 1$  onto  $|w| < 1$  which map every quadrilateral of modulus  $m$  onto a quadrilateral of modulus  $\leq Qm$ . Such maps are proved to be absolutely continuous and have also other metric properties; some of them were proved previously, under different conditions by other authors (cf. e. g. L. Ahlfors, this Zbl. 57, 65; J. Hersch and A. Pfluger, this Zbl. 49, 63). The class of general  $Q$ -quasiconformal maps is closed with respect to uniform convergence. In the last paragraph, the quasiconformal invariance of the null sets  $N_{SB}$  and  $N_D$  (in the terminology of L. Ahlfors and A. Beurling, this Zbl. 41, 203) is proved. If  $E \subset \gamma$ , where  $\gamma$  can be quasiconformally deformed in a segment (e. g. if  $\gamma$  is a sufficiently regular arc) then  $E \in N_{SB}$  if and only if  $E \in N_D$ . A plane perfect set  $E$  has the property that every  $f(z)$ , continuous in  $\Omega$  ( $\Omega$  any domain  $\supset E$ ) and analytic and univalent in  $\Omega - E$  is analytic and univalent in  $\Omega$ , if and only if this property holds by replacing the words: „analytic and univalent“ by „quasiconformal“. I. Berstein.

Beurling, A. and L. Ahlfors: The boundary correspondence under quasiconformal mappings. Acta math. 96, 125—142 (1956).

Welchen Bedingungen muß eine Randabbildung  $\mu$  einfach zusammenhängender Gebiete genügen, damit sie sich zu einer quasikonformen Abbildung  $w(z)$  der Gebiete selbst erweitern läßt? — Als Normalgebiet wird die obere Halbebene betrachtet, die Randabbildung ist dann durch die monotone Zuordnung  $x \rightarrow \mu(x)$  der reellen Achsen gekennzeichnet. Der zentrale Satz der Arbeit gibt dann die einfache Antwort: Notwendig und hinreichend ist das Bestehen einer Ungleichung

(1)  $1/\varrho \leq [\mu(x+t) - \mu(x)] / [\mu(x) - \mu(x-t)] \leq \varrho$   
für eine Konstante  $\varrho \geq 1$  und alle reellen  $x$  und  $t$ . — Diese Schranke  $\varrho$  steht natürlich in einem transzendenten Verhältnis zur Konstante  $K$ , welche die höchste lokale Verzerrung von  $w(z)$  angibt ( $w(z)$  ist  $K$ -quasikonform). — Für Abbildungsscharen wird die Äquivalenz der obigen Bedingung mit einer Kompaktheitseigenschaft gezeigt (qualitative Fassung) —  $\mu$  sei eine solche topologische Selbstabbildung der reellen Achse; folgende Größen werden definiert: (a)  $K(\mu) = \inf_f K_f$ , wo  $f$  eine differenzierbare Selbstabbildung der oberen Halbebene mit  $f(x) = \mu(x)$  und  $K_f$  ihren maximalen Dilatationsquotienten bezeichnen; (b)  $K_1(\mu) =$  kleinste Zahl  $K_1$ , so daß  $1/K_1 \leq I(u_2)/I(u_1) \leq K_1$  für alle reellen Funktionen  $u_2(x)$  und  $u_1(x) = u_2(\mu(x))$ ; dabei ist  $I(u)$  das Douglassche Funktional (gleich dem Dirichlet-Integral in der oberen Halbebene mit den Randwerten  $u(x)$ ); (c)  $K_0(\mu) =$  obere Schranke des Modul-Verhältnisses zweier „Vierecke“ auf der oberen Halbebene, deren (reelle) Scheitel durch die Funktion  $\mu$  ineinander übergeführt werden; es ist  $K_0(\mu) \leq$

$K_1(\mu) \leq K(\mu)$ ; (d)  $\varrho(\mu)$  = kleinster Wert von  $\varrho$ , mit welchem die Ungleichungen (1) noch gelten; (e)  $\Phi(\varrho) = \inf_{\mu} K_0(\mu)$  mit  $\varrho(\mu) \geq \varrho$ ; (f)  $\Psi(\varrho) = \sup_{\mu} K(\mu)$  mit  $\varrho(\mu) \leq \varrho$ . —  $\Phi(\varrho)$  ist gleich dem Modul des Viereckes  $(-1, 0, \varrho, \infty)$  auf der oberen Halbebene,  $\Phi(\varrho) \rightarrow \infty$  wie  $\log \varrho$ , wenn  $\varrho \rightarrow \infty$ , also ebenso  $K(\mu)$ . — Zur Abschätzung der Funktion  $\Psi(\varrho)$  werden explizite Abbildungen benützt. Insbesondere wird die Ungleichung  $\Psi(\varrho) \leq \varrho^2$  bewiesen. Also: Ist die Ungleichung (1) erfüllt, so gibt es eine  $K$ -quasikonforme Abbildung  $f(x + iy)$  mit  $f(x) = \mu(x)$  und  $K \leq \varrho^2$ . — Zum Schluß wird durch Konstruktion einer Funktion  $\mu(x)$  folgende überraschende Aussage bewiesen: Es gibt eine quasikonforme Abbildung der Halbebene auf sich, deren Ränderzuordnung durch eine rein singuläre Funktion  $\mu$  gegeben ist, wobei  $\varrho(\mu)$  sogar beliebig nahe bei 1 gewählt werden kann. *J. Hersch.*

**Lohwater, A. J.:** The boundary behavior of a quasi-conformal mapping. *J. rat. Mech. Analysis* 5, 335—342 (1956).

Verf. beschäftigt sich mit quasikonformen Funktionen  $w = f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$ , die so definiert sind, daß die partiellen Ableitungen  $u_x, u_y, v_x, v_y$  existieren und stetig sind. Weiter wird verlangt, daß die Funktionaldeterminante  $J(z) = \sqrt{EG - F^2}$  im Gebiet  $> 0$  sei und dort eine Konstante  $K$  so existiere, daß  $E + G \leq 2K\sqrt{EG - F^2}$  ist. Für solche Funktionen verallgemeinert Verf. ein Theorem, das von Beurling herrührt wie folgt: Es sei  $w = f(z)$  eine quasikonforme Funktion im obigen Sinne in  $|z| < 1$ . Das Riemannsche Bild von  $|z| < 1$ , das durch  $f(z)$  erzeugt wird, als Überlagerungsfläche der  $w$ -Kugel, habe endliche Fläche. Dann gilt mit Ausnahme einer Punktmenge der Kapazität 0 auf  $|z| = 1$ , daß, wenn  $z$  innerhalb irgendeines Winkelfeldes von  $|z| < 1$  gegen einen Punkt auf  $|z| = 1$  strebt, die Grenzwerte  $\lim f(z)$  existieren. Weiter kann man auch zeigen, daß die Punktmenge, für welche  $\lim f(z) = a$  ist, auf  $|z| = 1$  von der äußeren logarithmischen Kapazität 0 sein muß. Unabhängig vom Verf. haben auch Mori und Jenkins auf entsprechende Verallgemeinerungen hingewiesen. *H. P. Künzi.*

**Jenkins, James A.:** On quasiconformal mappings. *J. rat. Mech. Analysis* 5, 343—352 (1956).

Es werden entsprechende Theoreme über quasikonforme Funktionen bewiesen wie im obigen Ref. Anschließend stellt Verf. die beiden Sätze auf: A. Es sei  $f(z)$  eine quasikonforme Funktion in  $|z| < 1$ , die beschränkt ist,  $f(z) < M$ . Dann existiert der Grenzwert von  $f(z)$  fast überall, wenn  $z$  in einem Winkelfeld gegen einen Punkt  $e^{i\theta}$  strebt. B. Es sei  $f(z)$  eine quasikonforme Funktion in  $|z| < 1$  und  $E$  eine Punktmenge auf  $|z| = 1$ , auf der der Winkelgrenzwert von  $f(z)$  konstant bleibt. Dann ist  $E$  vom (Winkel-) Maß 0, oder  $f(z)$  ist eine Konstante. Verf. beweist, daß die beiden Sätze entweder gleichzeitig richtig sind, oder beide gleichzeitig falsch. Nach neuesten Untersuchungen von Ahlfors-Beurling und Belinsky erweist sich nun aber, daß beide Sätze gleichzeitig falsch sein müssen. *H. F. Künzi.*

**Dressel, F. G. and J. J. Gergen:** The extension of the Riemann mapping theorem to elliptic equations. *Proc. Confer. Differential equations, Maryland 1955* 183—195 (1956).

Verff. beleuchten von verschiedenen Seiten aus das Grundproblem, das sich mit der eindeutigen Abbildung eines ebenen Gebietes  $D$  auf ein ebensolches  $\Delta$  befaßt, wenn an Stelle der Cauchy-Riemannschen Differentialgleichungen allgemeinere Systeme gesetzt werden, so z. B. das lineare elliptische:  $a u_x + b u_y = v_y$ ,  $c u_x + d u_y = -v_x$  ( $4ad - (b+c)^2 > 0$ ). In der Zusammenfassung werden die Methoden von Lavrent'ev, Morrey, Shapiro, Bers, Nirenberg und den Verff. erläutert, wobei die Gleichungen vom Beltramischen Typus, die streng elliptischen Systeme (im Sinne Lavrent'evs), sowie die quasi linearen Systeme besonders hervorgehoben werden. Auch die Variationsmethode, die von Douglas und Courant



eingeführt wurde, wird im Zusammenhang mit Arbeiten der Verff. herangezogen.

*H. P. Küuzi.*

**Belinskij, P. P.:** Über die Variation der quasikonformen Abbildung. *Uspechi mat. Nauk* **11**, Nr. 5 (71), 93—95 (1956) [Russisch].

Expressions approximatives explicites pour les applications quasiconformes (dans le sens de M. A. Lavrentieff) avec des caractéristiques  $p(z)$  et  $\theta(z)$  données. Ces formules sont valables pour le cas des applications d'un disque ou du plan fini en soi même, dans l'hypothèse  $p(z) - 1 < \varepsilon$  et  $\{|p(z) - 1|/|p(z) + 1|\} e^{\pm 2i\theta(z)} < \varepsilon$ ; l'erreur est alors  $O(\varepsilon^2)$ .

*I. Berstein.*

**Bers, Lipman:** Formal powers and power series. *Commun. pure appl. Math.* **9**, 693—711 (1956).

The author proves local expansion theorems for pseudoanalytic functions in his sense (this *Zbl.* **72**, 77). The theorems are also restated as concerning the elliptic partial differential equations of the form  $a_{ij} \partial^2 \Phi / \partial x_i \partial x_j + a_i \partial \Phi / \partial x_i + a_0 \Phi = 0$ ,  $i, j = 1, 2$ , defined in  $x_1^2 + x_2^2 < R_0^2$  and satisfying  $a_{11} a_{22} - a_{12}^2 > 0$ , where  $a_{ij}$  satisfy a Hölder condition and  $a_i \in L_p$ , for  $p > 2$ . The solutions considered are generalized ones with generalized second derivatives  $\in L_x$ . A sequence of solutions  $\Phi_n$  defined in  $\Delta: x_1^2 + x_2^2 < R^2 < R_0^2$  is fundamental if every solution, defined in  $\Delta_0 \subset \Delta$  with center  $(x_1^0, x_2^0)$  and radius  $r$ , admits the unique expansion

$$\Phi = \sum_{n=0}^{\infty} \alpha_n \sum_{k=0}^{(n)} \beta_{nk} \Phi_k$$

which converges uniformly for  $\varrho < \lambda r$  ( $\lambda > 0$ ). Here  $(n)$  is the smallest even integer  $\geq n$  and  $\beta_{nk}$  depend only on  $(x_1^0, x_2^0)$ . The expansion is asymptotic in a certain sense. The author proves that such fundamental sequences exist for sufficiently small  $R$ .

*I. Berstein.*

**Protter, M. H.:** The periodicity problem for pseudoanalytic functions. *Ann. of Math.*, II. Ser. **64**, 154—174 (1956).

Let  $F(z)$ ,  $G(z)$  (complex) have Hölder continuous derivatives in  $D$  and  $\text{Im } FG > 0$ . A complex function  $u(z) = \lambda(z) F(z) + \mu(z) G(z)$ ,  $\lambda, \mu$  real is  $(F, G)$  pseudoanalytic (see L. Bers, Theory of pseudoanalytic functions, this *Zbl.* **51**, 316) if the generalized derivative  $\dot{u}(z) = \lim_{z \rightarrow z_0} [u(z) - \lambda(z_0) F(z) - \mu(z_0) G(z)] / (z - z_0)$  exists for  $z_0 \in D$ .  $\dot{u}(z)$  is in general  $(F_1, G_1)$ -pseudoanalytic with  $(F_1, G_1) \neq (F, G)$ . A class  $\mathfrak{B}$  of pseudoanalytic functions is a successor of the class  $\mathfrak{A}$  if  $\mathfrak{B}$  coincides with the generalized derivatives of functions in  $\mathfrak{A}$ , for a suitable definition of the generalized derivative (which is not unique). A class  $\mathfrak{A}_1$  has period  $n$ , if there exists a sequence  $\mathfrak{A}_2, \dots, \mathfrak{A}_n = \mathfrak{A}_1$  with  $\mathfrak{A}_k$  a successor of  $\mathfrak{A}_{k-1}$ .  $\mathfrak{A}_1$  has minimum period  $n$  if  $\mathfrak{A}_1$  has period  $n$  and if it does not have period  $< n$  for all possible choices of the successors. The author proves that for each  $n$ , there exist classes of minimum period  $n$  and that there exist nonperiodic classes (with minimum period  $\infty$ ). This solves a problem of L. Bers (loc. cit.).

*I. Berstein.*

**Daniljuk, I. I.:** Quasiharmonische und quasianalytische Funktionen auf Flächen. *Uspechi mat. Nauk* **11**, Nr. 5 (71), 95—101 (1956) [Russisch].

Soit  $R$  une surface topologique différentiable dont les relations de voisinage sont suffisamment régulières avec un jacobien positif. Les fonctions „quasianalytiques“ sur  $R$  sont les solutions  $f = u^1 + i u^2$  d'un système elliptique  $\partial u^1 / \partial x^i = \alpha_i'^j \partial u^2 / \partial x^j$ ,  $\alpha_i'^j$  étant un tenseur donné ( $u^1$  et  $u^2$  sont alors quasiharmoniques). Pour les fonctions quasiharmoniques étant valables le principe du maximum et celui de Harnack, l'A. esquisse une théorie des fonctions quasiharmoniques et quasianalytiques analogue à la théorie des fonctions analytiques et harmoniques sur les surfaces riemanniennes, en suivant de proche l'exposition du livre de R. Nevanlinna, „Uniformisierung“ (ce *Zbl.* **53**, 50) et aussi L. Bers (ce *Zbl.* **53**, 52).

*I. Berstein.*

**Stark, J. M.:** On distortion in pseudo-conformal mapping. Pacific J. Math. 6, 565—582 (1956).

Es sei  $B$  ein Gebiet im Raum von zwei komplexen Veränderlichen  $C^2$  und es sei  $\mathfrak{Q}^2(B)$  die Klasse der in  $B$  quadratintegrierbaren Funktionen. Verf. untersucht Minima des Integrals  $\int_B |f|^2 d\omega$  ( $d\omega$  das euklidische Volumelement des  $C^2$ ) für  $f$  in verschiedenen Teilklassen des  $\mathfrak{Q}^2(B)$ , die durch „Hilfsbedingungen“ für  $f$  definiert sind. Zum Beispiel: Es sei  $\lambda_B^1$  das Minimum des Integrals unter der Bedingung:  $f \in \mathfrak{Q}^2(B)$ ,  $f(t) = 1$ , wobei  $t$  ein fester Punkt in  $B$  ist. Ferner sei  $\lambda_{BB}^1$  das Minimum für  $f \in \mathfrak{Q}^2(B)$ ,  $f(t) = 1$  und  $\int_B f d\omega = 0$ . Dann ist  $(\lambda_B^1)^{-1} = (\lambda_{BB}^1)^{-1} + (\text{Vol } B)^{-1}$ , wobei  $\text{Vol } B$  das euklidische Volumen von  $B$  ist. Verf. beweist 5 weitere (kompliziertere) Relationen dieses Typus. Durch die Einführung von „Vergleichsgebieten“  $I$  und  $A$ , so daß  $I \subset B \subset A$ , erhält Verf. Ungleichungen zu jeder der oben beschriebenen Gleichungen, insbesondere werden solche Vergleichsgebiete benutzt, für die sich die Minima explizit ausrechnen lassen. Schließlich werden die Resultate angewendet, um „Verzerrungssätze“ für den Quotienten des euklidischen Linienelementes und des Linienelementes der Bergmanschen Metrik zu erhalten. Die Arbeit stützt sich auf Methoden, die von S. Bergman entwickelt wurden. *H. J. Bremermann.*

**Maschler, Michael:** Minimal domains and their Bergman kernel function. Pacific J. Math. 6, 501—516 (1956).

Es sei  $\mathfrak{C}$  die Klasse der Gebiete  $D$  über dem komplexen Zahlenraum  $C^n$ , die sich holomorph auf ein beschränktes Gebiet des  $C^n$  abbilden lassen. Ein Gebiet  $D \in \mathfrak{C}$  ist „Minimalgebiet mit Zentrum  $t$ “ (im folgenden mit  $D \in M_t$  bezeichnet), falls  $t \in D$  und  $t$  kein Verzweigungspunkt ist, und  $D$  kleinstes Volumen unter allen Gebieten hat, die sich holomorph auf  $D$  abbilden lassen, so daß die Funktionaldeterminante im Punkte  $t$  gleich eins ist. Verf. zeigt: Jedes Gebiet in  $\mathfrak{C}$  läßt sich auf ein Minimalgebiet abbilden, so daß ein beliebig vorgegebener Punkt in das Zentrum  $t$  übergeht und daß die Funktionaldeterminante im Punkte  $t$  eins ist. Notwendig und hinreichend, daß  $D$  ein Minimalgebiet mit Zentrum  $t$  ist, ist, daß  $K_D(z, t) = \text{constant}$  ist, wobei  $K_D$  die Bergmansche Kernfunktion des Gebietes  $D$  ist. Der Wert der Konstanten ist  $V^{-1}$ , wobei  $V$  das Volumen von  $D$  ist. Darüber hinaus gilt: Falls  $K_D(t, t) = V^{-1}$ , dann ist  $D \in M_t$ , und die Funktion  $K_D(z, \bar{z})$  nimmt ihr Minimum im Punkte  $t$  und nur im Punkte  $t$  an. Für  $D \in M_t$  gilt: Wenn  $f$  holomorph und quadratintegrierbar in  $D$  ist, dann ist  $f(t) = (1/V) \int_D f(z) d\omega$  ( $d\omega$  das euklidische Volumelement). Wenn  $D \in M_0$ , dann ist auch  $\lambda D = \{z | z = \lambda z', z' \in D\} \in M_0$ . Falls  $D \in M_t$  und falls die Punkte von  $D$  durch in  $D$  holomorphe Funktionen separierbar sind, dann hat  $D$  nur ein Zentrum. Das Produkt von Minimalgebieten ist ein Minimalgebiet, so daß das Zentrum des Produktes gleich dem Produkt der Zentren ist. Außer den „Minimalgebieten“ hat S. Bergman „Repräsentativgebiete“ eingeführt. Verf. zeigt: Damit  $D$  zugleich ein Minimalgebiet und ein Repräsentativgebiet ist, ist notwendig und hinreichend, daß die Bergmansche Kernfunktion die Bedingungen  $\partial K(z, t) / \partial t_j = \sum_{\nu=1}^n A_{j\nu} (z_\nu - t_\nu)$ ,  $j = 1, \dots, n$  erfüllt, wobei die  $A_{j\nu}$  Konstante sind und  $|A_{ij}| \neq 0$ . Ist  $\Delta$  ein einfach zusammenhängendes Gebiet der komplexen  $w$ -Ebene, dann ist

$$[K_\Delta(w, \bar{w})]^{-3} \left| \frac{K_\Delta(w, \bar{w})}{\frac{\partial K_\Delta(w, \bar{w})}{\partial \bar{w}}} \cdot \frac{\frac{\partial K_\Delta(w, \bar{w})}{\partial w}}{\frac{\partial^2 K_\Delta(w, \bar{w})}{\partial w \partial \bar{w}}} \right| = \text{constant},$$

und ähnliche Beziehungen gelten für mehrere Veränderliche. Die Beweise beruhen auf Eigenschaften der Bergmanschen Kernfunktion. *H. J. Bremermann.*

**Morita, Kiiti:** On the kernel functions for symmetric domains. Sci. Rep. Tokyo Kyoiku Daigaku, Sect. A 5, 190—212 (1956).

Diese an Resultaten sehr reiche Arbeit befaßt sich außer mit einigen allgemeinen Eigenschaften der Bergmanschen Kernfunktion hauptsächlich mit den „beschränkten symmetrischen Gebieten“ (im folgenden b. s. Gebiete genannt) des  $p$ -dimensionalen komplexen euklidischen Raumes  $C^p$  (definiert und klassifiziert von E. Cartan). Es sind Gebiete, die eine Automorphismengruppe mit gewissen Eigenschaften besitzen. Es gibt vier Typen von „irreduziblen beschränkten symmetrischen Gebieten“, so daß jedes b. s. Gebiet als direktes Produkt dieser darstellbar ist. Die irreduziblen b. s. Gebiete lassen sich durch Matrixbedingungen charakterisieren. Verf. gibt eine explizite Formel für die Bergmansche Kernfunktion der irreduziblen b. s. Gebiete mit Hilfe der diese charakterisierenden Matrizen. Da die Bergmansche Kernfunktion eines Produktgebietes gleich dem Produkt der Kernfunktionen der Komponente ist (wofür Verf. einen neuen Beweis gibt), ist somit die Kernfunktion eines jeden b. s. Gebietes explizit bestimmt. Für eine der vier Klassen der irreduziblen symmetrischen Gebiete wird eine Formel für alle Automorphismen angegeben, und nach Einführung einer besonderen Norm ergibt sich eine interessante Verallgemeinerung des Schwarzschen Lemmas. Die Bergmansche Metrik ist für jedes b. s. Gebiet bis auf einen konstanten Faktor die einzige invariante Hermitesche Kählermetrik, und sie wird explizit angegeben. Die Funktion  $H_D(x, y) = v(D)^q [K_D(x, \bar{y}) K_D(y, \bar{x}) / K_D(x, \bar{x})]^q$ , worin  $v(D)$  das euklidische Volumen von  $D$  ist, ist für ein gewisses  $q$  harmonisch, und es gilt  $f(x) = \int_{\mathfrak{B}_0(D)} H_D(x, y) f(y) d\mu_y$  für alle  $f \in \mathcal{Q}^2(D)$ , wobei  $\mathfrak{B}_0(D)$  eine gewisse Teilmenge des Randes von  $D$  ist. Diese Formel wird mit einer anderen Integralformel von S. Bochner in Verbindung gebracht. Für beliebige Gebiete  $D$  zeigt Verf. das folgende:

$$d(y_1, y_2) = [K_D(y_1, \bar{y}_1) + K_D(y_2, \bar{y}_2) - K_D(y_1, \bar{y}_2) - K_D(y_2, \bar{y}_1)]^{1/2}$$

ist eine Metrik in  $D$ , die die Topologie des  $C^p$  in  $D$  erzeugt. Außerdem wird für die „beschränkten analytisch homogenen Gebiete“ sowohl ein „Schwarzsches Lemma“ wie ein Verzerrungssatz erhalten. Schließlich ist zu bemerken: Das Resultat des Verf. „Wenn  $D$  ein Cartansches Kreisgebiet ist, dann ist  $K_D(0, \bar{z}) = v(D)^{-1} [v(D) \text{ das euklidische Volumen von } D]$ “, impliziert zusammen mit einem Resultat von Maschler (siehe vorstehendes Referat), daß die Cartanschen Kreisgebiete Bergmansche Minimalgebiete sind.

H. J. Bremermann.

### Modulfunktionen. Fastperiodische Funktionen:

**Satake, Ichiro:** On the compactification of the Siegel space. J. Indian math. Soc., n. Ser. 20, 259—281 (1956).

Verf. gibt eine Abschließung des Fundamentalbereiches der Siegelschen Modulgruppe zu einem kompakten Hausdorff-Raum und definiert auf diesem Raum eine komplexe Struktur. Im Mittelpunkt der Untersuchungen steht der Begriff der  $V$ -Mannigfaltigkeit als eine „komplexe Mannigfaltigkeit mit einfachen Singularitäten“ in dem folgenden Sinne: Ein Tripel  $(\tilde{U}, G, \Phi)$  heißt eine lokale Uniformisierende eines zusammenhängenden Hausdorff-Raumes  $V$ , wenn  $\tilde{U}$  ein Gebiet des  $C^n$ ,  $G$  eine endliche Gruppe von (holomorphen) Automorphismen von  $\tilde{U}$  und  $\Phi$  eine stetige Abbildung von  $\tilde{U}$  auf eine offene Teilmenge  $U$  von  $V$  ist mit den Eigenschaften: (1)  $\Phi \circ \sigma = \Phi$  für alle  $\sigma$  aus  $G$ , (2)  $\Phi$  induziert eine topologische Abbildung des Quotientenraumes  $G \cdot \tilde{U}$  auf  $U$ .  $V$  heißt dann eine  $V$ -Mannigfaltigkeit, wenn es eine Familie von lokalen Uniformisierenden  $(\tilde{U}, G, \Phi)$  gibt, für die die zugehörigen offenen Mengen  $U$  eine Basis der offenen Mengen von  $V$  darstellen und die üblichen Verträglichkeitsbedingungen erfüllt sind. In den lokalen Uniformisierenden  $(\tilde{U}, G, \Phi)$



werden dann zu gegebenen automorphen Faktoren die Moduln der (lokalen) automorphen Formen zur Gruppe  $G$  definiert und aus ihnen die Garbe  $A$  der Keime von automorphen Formen auf  $V$  gebildet. Verf. betrachtet dann den sogenannten Siegel'schen Halbraum  $H_n$  der komplexen Dimension  $\nu = n(n+1)/2$  und die auf  $H_n$  wirkende Modulgruppe  $M_n$ . Der Quotientenraum  $V_n = M_n \backslash H_n$  ist in natürlicher Weise eine  $V$ -Mannigfaltigkeit. In der Vereinigung  $V_n^*$  aller  $V_r$  ( $0 \leq r \leq n$ ) werden dann für die Punkte aus  $V_r$  ( $0 \leq r < n$ ) Umgebungen so definiert, daß diese zusammen mit der Topologie von  $V_n$  die Mengen  $V_n^*$  zu einem kompakten Hausdorff-Raum machen. Dabei wird wesentlich die Minkowskische Reduktionstheorie verwendet. Im letzten Paragraphen wird gezeigt, daß auf  $V_n^*$  über die Garbe der Keime der automorphen Funktionen eine komplexe Struktur definiert werden kann, es bleibt jedoch offen, ob diese Struktur mit der natürlichen übereinstimmt. Verf. kann nicht beweisen, daß  $V_n^*$  eine  $V$ -Mannigfaltigkeit ist; er vermutet, daß  $V_n^*$  als ein „espace analytique général“ im Sinne von H. Cartan aufgefaßt werden kann.

M. Koecher.

**Roeleke, Walter:** Über die Wellengleichung bei Grenzkreisgruppen erster Art. S.-Ber. Heidelberger Akad. Wiss., math.-naturw. Kl. 1953/1955, Nr. 4. 109 S. (1956).

Es handelt sich um die Diskussion von Eigenwertproblemen der folgenden Art: Gesucht sind Lösungen der Differentialgleichung  $-\Delta z = -y^2 (\partial^2 z / \partial x^2 + \partial^2 z / \partial y^2) = \lambda z$ , die in der ganzen Halbebene  $y > 0$  definiert sind und gegenüber den Transformationen  $S$  einer vorgegebenen Grenzkreisgruppe erster Art  $\Gamma$  invariant bleiben:  $z(\tau) = z(S\tau)$ ,  $S \in \Gamma$ . Der Verf. diskutiert dieses Problem, indem er es auf ein Eigenwertproblem des oben implizierten Differentialoperators  $-\Delta$  unter passenden Randbedingungen im Hilbertraum aller  $f(x, y)$  mit  $\int_F |f|^2 y^{-2} dx dy < \infty$  zurückführt,

wobei die Integration sich über einen abgeschlossenen Fundamentalbereich  $F$  der Gruppe  $\Gamma$  erstreckt. Da die Randbedingungen von den üblicherweise diskutierten Randbedingungen abweichen, ergibt sich die Notwendigkeit einer gesonderten Diskussion des spektraltheoretischen Verhaltens des Problems. Der Verf. gelangt unter anderem zu folgenden Resultaten: 1. Wenn  $\Gamma$  keine parabolischen Spitzen hat, besitzt der erwähnte Operator ein reines diskretes Spektrum. 2. Im Falle des Auftretens parabolischer Spitzen dagegen gibt es neben einer möglichen Anzahl von Punkteigenwerten endlicher Vielfachheit, die sich im Endlichen höchstens bei  $\lambda = \frac{1}{4}$  häufen können, ein Streckenspektrum, welches die ganze Halbgerade  $\lambda \geq \frac{1}{4}$  erfüllt. 3. Speziell für die Modulgruppe  $M$  kann ein vollständiges System von Eigenpaketen als Integral über Eisensteinreihen direkt angegeben werden. Die Ergebnisse lassen sich auf die Frage anwenden, ob die Siegel'schen Modulformen zweiten Grades durch die ihnen von H. Maas zugeordneten Dirichlet'schen Reihen eindeutig bestimmt sind. In der Tat tritt dies ein, falls man auch die oben erwähnten Eigenfunktionen des kontinuierlichen Spektrums berücksichtigt.

H. O. Cordes.

**Touchard, J. et Balth. van der Pol:** Équations différentielles linéaires vérifiées par certaines fonctions modulaires elliptiques. Nederl. Akad. Wet., Proc., Ser. A 59, 166—169 (1956).

Falls  $\omega_1, \omega_2, \tau = \omega_1/\omega_2$  (mit  $\Im(\tau) > 0$ ),  $g_2, g_3, \Delta = g_2^3 - 27g_3^2$  die in der Theorie der elliptischen Funktionen übliche Bedeutung haben, so ist  $\omega_2^{-2k-2} \Delta^{k/12} d^{k+1} \Delta^{-k/12} / d\tau^{k+1}$  eine zur vollen Modulgruppe gehörige ganze Modulform der Dimension  $-2k-2$  und deshalb ein Polynom in  $g_2$  und  $g_3$ . Die Verf. bestimmen die Koeffizienten dieses Polynoms explizit für  $k = 1, 2, \dots, 12$ .

H. D. Kloosterman.

**Kestelman, H.:** Measurable almost periodic functions. Mathematika, London 3, 140—143 (1956).

In order to obtain an elementary proof of the following known theorem (and also a somewhat stronger result): A measurable function in  $R_n$  which is almost

periodic in von Neumann's sense in  $R_n$  (here taken as discrete additive group) is almost periodic in Bohr's sense; the author proves by elementary set theory that if  $f$  is any function which is measurable in  $R_n$  and has the property that for every  $\varepsilon > 0$  there is a set  $E_\varepsilon$  with positive exterior measure such that  $|f(x+h) - f(y+h)| < \varepsilon$  for all  $x, y \in E_\varepsilon$  and all  $h$  in  $R_n$ , then  $f$  is uniformly continuous in  $R_n$ . An elementary proof of the first stated theorem was previously given by H. D. Ursell in the case  $n = 1$ , "but it did not seem to be readily adaptable for  $n > 1$ ".

E. Følner.

### Gewöhnliche Differentialgleichungen. Differenzengleichungen:

**Takahashi, Ken-ichi:** Ein System von linearen homogenen Differentialgleichungen, welche auf zwei Parametern abhängen. Tôhoku math. J., II. Ser. 8, 258—267 (1956).

Der Verf. behandelt ein System von linearen Differentialgleichungen

$$y'_j = \lambda^2 \mu \sum_{k=1}^2 a_{jk}(x, \lambda, \mu) y_k, \quad j = 1, 2,$$

welches von zwei Parametern abhängt und dessen charakteristische Gleichung eine zweifache Wurzel hat. Unter gewissen Voraussetzungen über die Koeffizienten  $a_{jk}$  wird die Eindeutigkeit der Lösung bewiesen und ihre asymptotische Entwicklung abgeleitet.

M. Ráb.

**Wintner, Aurel:** Addenda to the paper on Bôcher's theorem. Amer. J. Math. 78, 895—897 (1956).

(Vgl. Verf., dies. Zbl. 55, 81.)  $(\alpha_{ik}) = \alpha = \alpha(t)$  sei eine  $(n, n)$ -Matrix von im  $0 \leq t < \infty$  stetigen Funktionen  $\alpha_{ik}(t)$ .  $\alpha \in S$  bedeute: zu jedem  $n$ -Vektor  $c$  existiert (genau) eine Lösung  $x(t)$  von  $x' = \alpha x$  mit  $x(t) \rightarrow c$  ( $t \rightarrow \infty$ ). Sei  $\alpha_0$  die

Diagonalmatrix aus den Diagonalelementen von  $\alpha$ . Dann ist  $\alpha_0 \in R$  (Existenz eines

endlichen  $\lim_{T \rightarrow \infty} \int_0^T \alpha_0(t) dt$ ) und  $\alpha - \alpha_0 \in L$  (Existenz von  $\int_0^\infty |\alpha(t) - \alpha_0(t)| dt$ )

hinreichend für  $\alpha \in S$ . — Sei  $f(t)$  stetig in  $0 \leq t < \infty$ .  $f \in P$  bedeute:  $x'' + (1 + f(t))x = 0$  besitzt zwei Lösungen  $x_j(t)$  ( $j = 1, -1$ ) mit  $x_j(t) \sim e^{jit}$ ,  $x'_j(t) \sim j i e^{jit}$  für ( $t \rightarrow \infty$ ). Für  $f \in P$  ist hinreichend: für  $k = -1, 0, 1$  gilt

$$f_k(t) = f(t) e^{2kit} \in R \text{ und } F_k(t) = f(t) \int_t^\infty f(s) e^{-2ks i} ds \in L. \quad F. W. Schäfke.$$

**Basov, V. P.:** Das Verhalten der Lösungen eines Systems von linearen Differentialgleichungen in der Umgebung eines singulären Punktes von irregulärem Typus. Mat. Sbornik, n. Ser. 40 (82), 339—380 (1956) [Russisch].

This paper contains several results on systems of the form  $\dot{X} = P X$ , capital letters denoting square or rectangular matrices which are functions of  $t$ ,  $P = P^{(0)} + \sum t^{-(l_1, l_2)} P^{(l_1, l_2)}$ ,  $P^{(0)}$  constant,  $\gamma_1 = \nu^{-1}$ ,  $\nu$  integer,  $\gamma_2$  irrational,  $P^{(l_1, l_2)}$  constant or periodic with a common period  $\omega$ ; the case of more than two mutually incommensurable  $\gamma$ 's may be also considered; in this review we will call these series "special series". Typical results are the following: 1. Let  $\dot{X}_1 = P_{11} X_1 + P_{12} X_2$ ,  $\dot{X}_2 = P_{21} X_1 + P_{22} X_2$ , where  $P_{ij}$  are given as uniformly convergent special series,  $P_{ij}^{(0)} = 0$ ,  $i \neq j$ ; if  $\kappa_s, \varrho_\sigma$  are the characteristic roots of  $P_{11}^{(0)}, P_{22}^{(0)}$ , assume that  $\kappa_s - \varrho_\sigma \neq 2\pi k i / \omega$  for all  $s, \sigma$ ; then there is a formal change of variables  $X_1 = Y_1 + A Y_2$ ,  $X_2 = Y_2$ , where  $A$  is a special series,  $A^{(0)} = 0$ , which transforms the given system into  $\dot{Y} = Q Y$ ,  $\dot{Y}_2 = P_{21} Y_1 + P_{22} Y_2$ ,  $Q_{ii}$  being special series with  $Q_{ii}^{(0)} = P_{ii}^{(0)}$ . 2. Under the same assumptions, there is a formal change of variables  $X_1 =$

$Y_1 + AY_2, X_2 = BY_1 + Y_2$ , where  $A, B$  are special series with  $A^{(0)} = B^{(0)} = 0$ , which transforms the given system into  $\dot{Y}_1 = Q_{11} Y_1, \dot{Y}_2 = Q_{22} Y_2$ , the  $Q$ 's being special series. 3. Under the same assumptions, if moreover the coefficients of the special series  $P_{ij}$  are constant matrices and  $\kappa_s - \varrho_s \neq 0$  for all  $s, \sigma$ , the same conclusions hold true with constant coefficients in the special series  $A, B, Q$ . 4. Assume that the coefficients in the special series  $P$  are periodic of period  $\omega$  and that  $P^{(0)} = \kappa I + J$ , where  $I$  is the unit matrix,  $J$  the matrix having all elements  $= 0$  except those immediately below the main diagonal; then there is a change of variables  $X = FY$ , where  $F$  is a special series with coefficients of period  $\omega$  and  $F^{(0)} = I$ , which transforms  $\dot{X} = PX$  into  $\dot{Y} = GY$ , where  $G$  is a special series with constant coefficients. 5. Assume that  $P$  is a special series such that  $P^{(0)}$  has a simple real characteristic root  $\lambda$  different from the real parts of all other characteristic roots; then the equation  $\dot{X} = PX$  has a column-vector formal solution whose elements are products of special series times  $\exp\{\lambda t + \int G dt\}$ ,  $G$  being a scalar special series with  $G^{(0)} = 0$  and the integral denoting formal (term-wise) integration; these series give an asymptotical development of the actual solution. 6. The last result is extended in a natural way to the case of a pair of complex conjugate characteristic roots or, more generally, to the case where there is a group of roots  $\lambda \pm i\mu_s$  with a common  $\lambda$  different from the real parts of the other characteristic roots, provided that  $\mu_s \neq k\pi/\omega, \mu_s - \mu_\sigma \neq 2k\pi/\omega$ , for all  $s \neq \sigma$ .

*J. L. Massera.*

**Fadle, J.: Eigenwertprobleme von Affinoren und ihre Anwendung zur Lösung von zwei vektorischen Differentialgleichungen.** Z. angew. Math. Mech. 36, 248—250 (1956).

Sind die drei Eigenwerte  $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$  eines nicht ausgearteten Affinors  $\Phi$  verschieden, so läßt sich  $\Phi$  in der Form  $\sum \lambda_i n_i; n_i^*$  ( $i = 1, 2, 3$ ) darstellen, wo  $(n_i^*)$  das reziproke Tripel zu  $(n_i)$  bedeutet. Für eine Potenzreihe  $F(\lambda)$  folgt dann  $F(\Phi) = \sum F(\lambda_i) n_i; n_i^*$ . Die Anwendung auf die vektorische Schwingungsgleichung  $m\ddot{r} + \Phi r = 0$  liefert mit  $1/\lambda_i/m = w_i$  die Lösung  $r = \sum (r_0 n_i^* \cos w_i t + w_i^{-1} v_0 n_i^* \sin w_i t) n_i$  und hieraus durch Grenzübergang die Lösung in dem Sonderfall  $\lambda_3 = 0$ . — Verf. gibt auch entsprechende Ausdrücke für  $\Phi$  und  $F(\Phi)$  in den Fällen  $\lambda_3 = \lambda_2$  und  $\lambda_3 = \lambda_2$ , sowie die Lösung der Schwingungsgleichung in den Sonderfall  $\lambda_2 = \lambda_3 = 0$ . — Den Schluß bildet die Herleitung der Differentialgleichung der Relativbewegung in der Form (\*)  $d^2(r V_c)/dt^2 = b_a V_c$ . Hierbei ist  $r$  der Ortsvektor im relativen Koordinatensystem,  $V_c$  der konjugierte des Drehaffinors (Versors)  $V$  und  $b_a = \mathfrak{B}/m$  die Absolutbeschleunigung. Bei gegebenem Winkelgeschwindigkeitsvektor  $u(t)$  ist auch  $V_c = V^{-1} = \exp(-\int \underline{u} dt)$  bekannt und die relative Bahnkurve ergibt sich aus (\*) durch zweimalige Integration.

*E. Schönhardt.*

**Jones jr., John: On the extension of a theorem of Atkinson's.** Quart. J. Math., Oxford II. Ser. 7, 306—309 (1956).

The author considers the behaviour as  $x \rightarrow \infty$  of the solutions of (\*)  $y'' + \sum_{i=2}^n f_i(x) y^i = 0$  where the  $f_i(x)$  are non-negative, at least one being positive, and satisfy certain continuity restrictions. He states a theorem according to which all solutions are oscillatory if and only if  $\int_0^\infty \sum_{i=2}^n x f_i(x) dx = \infty$ , in extension of the reviewer's result concerning  $y'' + f(x) y^{2n-1} = 0$  ( $n \geq 2$ ), (this Zbl. 65, 320). The statement may be false if (\*) contains even powers of  $y$ , as is shown by the case of  $y'' + 2(1+x)^{-1} y^2 = 0$  which has the non-oscillatory solution  $y = -(1+x)^{-1}$ . What is actually proved is that the stated condition is necessary and sufficient for the non-existence of a solution which is ultimately positive. In the author's equation (9)  $x$  should replace  $t$ , except under the integral sign.

*F. V. Atkinson.*



**Hille, Einar:** Über eine Klasse Differentialoperatoren vierter Ordnung. S.-Ber. Berliner math. Ges. 1954/55, 1955/56, 39—44 (1956).

In (1)  $L_4[y] = -[b(x)y''(x)]''$  sei  $b(x)$  in  $-\infty < x < \infty$  positiv, stetig, ferner  $x^3/b(x) \in L(-\infty, \infty)$  und (2)  $b(x) > M(1 + |x|)^{4-\alpha}$  bei passendem  $\alpha > 0$ . Das Endziel ist, zu entscheiden, wann  $L_4$  in  $L(-\infty, \infty)$  eine stark stetige Operatorhalbgruppe  $\{T(t; L_4)\}$  erzeugt, die dann zur Lösung der Anfangswertaufgabe bei  $\frac{\partial^2}{\partial x^3} \left( b(x) \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} \right) + \frac{\partial T}{\partial t} = 0$  verwendbar ist. Verf. untersucht hier als Zwischenstufe die Differentialgleichung  $L_4[y] - \lambda y = 0$ . Im Nichtoszillationsfall werden Hauptlösungen und Greensche Funktion aufgestellt, für  $\alpha > 1$  wird der Anschluß an die klassische Integralgleichungs-Theorie mit Entwicklungssätzen und Aussagen über den Halbgruppenoperator gewonnen. Bei Fortlassen der Annahme (2) ändert sich das Bild wesentlich. Für den Oszillationsfall werden asymptotische Entwicklungen und ein Lösungsansatz gegeben, aber nicht mehr diskutiert.

*L. Collatz.*

**Krumhaar, Hans:** Ein Satz über die Separation von Spektren bei gewöhnlichen selbstadjungierten Differentialoperatoren gerader Ordnung. Nachr. Akad. Wiss. Göttingen, math.-phys. Kl., II a 1956, 267—274 (1956).

Vorgelegt ist eine Eigenwertaufgabe in einem Intervall  $a < x < b$  (es darf  $-\infty = a$  und  $b = \infty$  sein) mit der Differentialgleichung  $Lu = \sum_{\mu=0}^m [p_\mu(x)u^{(m-\mu)}(x)]^{(m-\mu)} = \lambda k(x)u(x)$  mit reellen selbstadjungierten Randbedingungen  $R_a, R_b$  an den Randstellen  $a, b$ . Es sei  $p_0(x) \neq 0$ ,  $k > 0$ ,  $p_m$  und  $k$  stückweise stetig,  $p_\mu, \dots, p_{\mu^{(m-\mu-1)}}$  stetig und  $p_\mu^{(m-\mu)}$  stückweise stetig für  $\mu = 0, \dots, m-1$ . Es werden Funktionen  $u$  betrachtet, für die  $u, \dots, u^{(2m-1)}$  in  $a < x < b$  totalstetig sind und  $u, (1/k)Lu$  einem Hilbertraum angehören. Dann werden drei Spektren betrachtet:  $S$  das Eigenwert-Spektrum des Operators  $Du = (1/k)Lu$  bei den Randbedingungen  $R_a, R_b$ , ferner  $S^1$  das Spektrum bei einem Intervall  $a < x \leq c$ , wenn bei  $c$  ein System  $R_c$  reeller selbstadjungierter Randbedingungen vorgeschrieben wird und  $S^2$  das Spektrum bei einem Intervall  $c \leq x < b$  mit den Randbedingungssystemen  $R_c, R_b$ . Dann wird in Verallgemeinerung eines Satzes von K. G. Wolfson (dies. Zbl. 52, 92) der Trennungssatz bewiesen: das  $\lambda$ -Intervall  $\lambda' \leq \lambda \leq \lambda''$  enthalte mindestens  $m+r$  Punkte  $\lambda$  (Eigenwerte entsprechend ihrer Vielfachheit mehrfach gezählt), die gemeinsam in einer der beiden Mengen  $S$  bzw.  $S^1 + S^2$  liegen. Dann enthält die andere Menge mindestens  $r$  Punkte aus diesem Intervall.

*L. Collatz.*

**Conti, Roberto:** Sulla prolungabilità delle soluzioni di un sistema di equazioni differenziali ordinarie. Boll. Un. mat. Ital., III. Ser. 11, 510—514 (1956).

L'A. prouve que s'il existe une fonction  $V(t, x) \geq 0$  telle que  $\lim_{\|x\| \rightarrow \infty} V(t, x) = \infty$ ,  $\sum (\partial V / \partial x_i) f_i(t, x) + \partial V / \partial t \leq \omega(t, V(t, x))$  et si la solution supérieure  $u_0(t)$  de l'équation  $\dot{u} = \omega(t, u)$  avec  $u(t_0) = V(t_0, x^0)$  est prolongeable, alors les solutions du système  $\dot{x} = f(t, x)$  avec  $x(t_0) = x^0$  sont prolongeables. Par un choix convenable des fonctions  $V(t, x)$  et  $\omega(t, u)$  on obtient les théorèmes connus sur la prolongeabilité des solutions.

*A. Halanay.*

**Zolotarev, Ju. G.:** Über Stabilität in erster Näherung. Izvestija Akad. Nauk Kazach. SSR, Ser. Mat. Mech. 5 (9), 62—70 (1956) [Russisch].

Es werden sieben Sätze abgeleitet, mit deren Hilfe die Stabilität der Lösungen des Differentialgleichungs-Systems

$$\frac{dx_s}{dt} = \sum_{k=1}^n p_{sk}(t) x_k + L_s(t, x_1, \dots, x_n)$$

beurteilt werden kann. Die  $p_{sk}$  seien stetig in  $t$ , die  $L_s$  stetig in  $t$ , in einem abgeschlossenen Bereich der  $x_s$  definiert und sollen bestimmten Beschränktheitsbedingungen genügen. Ausgehend von den Eigenschaften eines Fundamentalsystems von Lö-

sungen für das Teilsystem, das mit  $L_s = 0$  aus dem ursprünglichen System erhalten wird, werden hinreichende Bedingungen für die Stabilität der Lösungen des allgemeinen Systems bei sonst beliebigen Funktionen  $L_s$  gewonnen. U. a. werden auch Sätze über asymptotische Stabilität der Lösungsfunktionen abgeleitet und dabei Ergebnisse von Ljapunov über Majorantenabschätzungen (sog. erste Methode von Ljapunov) verifiziert.

K. Magnus.

**Beklemiševa (Beklemisheva), L. A.:** On the asymptotic behaviour of the solutions of some non-linear systems of differential equations. Doklady Akad. Nauk SSSR 111, 261—264 (1956) [Russisch].

The author gives without proof a series of theorems which provide a fairly complete picture of the behaviour as  $t \rightarrow \infty$  of the solutions of the real equation

$$\ddot{x} + \sum_{k=1}^s b_k (1 + o_k(t)) t^{\alpha_k} x^{n_k} = 0, \quad (t \geq T),$$

where the  $n_k$  are positive rationals, having, if fractional, odd denominators, and  $|o_k(t)| < A t^{-\varepsilon}$ ,  $|o'_k(t)| < A t^{-\varepsilon-1}$ ,  $\varepsilon > 0$ . Excluded from consideration are solutions for which one of the following holds: (i)  $x$  becomes infinite for some finite  $t > T$ , (ii)  $x = \dot{x} = 0$  for some  $t > T$ , (iii)  $x$  grows as  $t \rightarrow \infty$  more rapidly than any power of  $t$ , (iv)  $x \rightarrow 0$  as  $t \rightarrow \infty$  more rapidly than any power of  $t$ . Conditions for the absence of such solutions are given. For other solutions there is a „regime“  $\omega$ , capable of up to  $s + 2$  values, such that for any  $\varepsilon > 0$

$$\lim_{t \rightarrow \infty} |x(t)| t^{-\omega + \varepsilon} = +\infty, \quad \lim_{t \rightarrow \infty} x(t) t^{-\omega - \varepsilon} = 0.$$

A procedure is given, depending on a study of the function

$$\eta(\omega) = \max(\alpha_k + 2 + (n_k - 1)\omega, 0), \quad k = 1, \dots, s,$$

to find the possible regimes. Conditions are given under which to a regime there correspond solutions of one or other of the asymptotic forms  $t^\omega(c + o(1))$ ,  $t^\omega(\Phi[t^\mu(1 + o(1))] + o(1))$ , where  $\Phi$  is periodic. Finally, two stability theorems for Hamiltonian forms are quoted, apparently needed for the proofs.

F. V. Atkinson.

**Villari, Gaetano:** Cicli limite e fusione di separatrici. Ann. Mat. pura appl., IV. Ser. 42, 259—277 (1956).

La struttura delle traiettorie di un sistema differenziale (')  $dx/dt = X(x, y, \lambda)$ ,  $dy/dt = Y(x, y, \lambda)$  varia col parametro  $\lambda$  ed è ben noto che la formazione o la scomparsa di cicli (traiettorie chiuse) può aversi solo per valori di  $\lambda$  per i quali il sistema stesso è a struttura instabile. La generazione di cicli può aversi, in particolare quando, attraversando  $\lambda$  uno di tali valori avviene una fusione di alcune separatrici (traiettorie limite aperte). Il presente lavoro apporta un contributo alla conoscenza delle modalità di questo fenomeno nel caso di un sistema (') del tipo (")  $dx/dt = y$ ,  $dy/dt = -y f(x, \lambda) - g(x)$ ,  $\lambda \geq 0$ , equivalente ad un'equazione di Liénard generalizzata  $d^2x/dt^2 + f(x, \lambda) dx/dt + g(x) = 0$ ,  $\lambda \geq 0$ . Supposto che  $f$  e  $g$  siano atte a garantire l'esistenza e l'unicità delle soluzioni di (") rispetto al problema iniziale e la loro prolungabilità indefinita, e supposto inoltre a) che  $f(x, \lambda)$  sia continua per  $-\infty < x < \infty$ ,  $0 \leq \lambda < \infty$ ;  $f(-x, \lambda) = f(x, \lambda)$ ;  $f(x, \lambda) < 0$  per  $|x| < \alpha_\lambda$ ,  $f(x, \lambda) > 0$  per  $|x| > \alpha_\lambda$ , cosicchè  $f(-\alpha_\lambda, \lambda) = f(\alpha_\lambda, \lambda) = 0$ ; b) che  $g(x)$  sia funzione continua per  $-\infty < x < \infty$ ,  $g(-x) = -g(x)$ ;  $g(x) > 0$  per  $0 < x < \beta$ ,  $g(x) < 0$  per  $x > \beta$ , cosicchè  $g(-\beta) = g(0) = g(\beta) = 0$ ; c) che esistano e siano continue le derivate prime di  $f$  e sia  $\partial f / \partial x < 0$ ,  $\partial f / \partial \lambda > 0$  per  $x > 0$  e  $\lambda > 0$ ; d) che sia  $\lim_{\lambda \rightarrow \infty} \alpha_\lambda = \infty$ ,  $\lim_{\lambda \rightarrow 0+} \alpha_\lambda = 0$ , l'A. prova che esiste un solo valore  $\lambda^* > 0$

di  $\lambda$  in corrispondenza al quale le separatrici di (") relative ai punti singolari  $A = (-\beta, 0)$ ,  $B = (\beta, 0)$  si fondono dando luogo ad uno pseudociclo (graph). Per  $\lambda \geq \lambda^*$  non vi sono cicli mentre per  $0 < \lambda < \lambda^*$  esiste uno ed un sol ciclo  $\Gamma_\lambda$ , il quale è stabile.

Al crescere di  $\lambda$ ,  $\Gamma_\lambda$  si dilata con continuità e per  $\lambda \rightarrow \lambda^+$  tende uniformemente allo pseudociclo predetto, mentre per  $\lambda \rightarrow 0^+$  esso tende verso il punto singolare  $(0, 0)$ . L'andamento dell'intera famiglia delle traiettorie viene accuratamente esaminato facendo ricorso a metodi prevalentemente geometrici. *R. Conti.*

**Levin, J. J.:** Singular perturbations of nonlinear systems of differential equations related to conditional stability. *Duke math. J.* **23**, 609—620 (1956).

This paper continues the work of Levin and Levinson (this Zbl. **55**, 82) and Flatto and Levinson (this Zbl. **66**, 73) on relationships, as  $\varepsilon \rightarrow 0^+$ , of solutions of the real systems of differential equations

$$\begin{aligned} (1) \quad & dx/dt = f(t, x, y, \varepsilon), \quad \varepsilon dy/dt = g(t, x, y, \varepsilon) \\ (2) \quad & dx/dt = f(t, x, y, 0), \quad 0 = g(t, x, y, 0). \end{aligned}$$

In these equations  $x$  and  $y$  are  $n$  and  $m$  dimensional vectors. In the earlier paper cited it was assumed that the real part of each of the characteristic roots of the matrix  $||\partial g_i(t, x, y, \varepsilon)/\partial y_j||$  is negative or that the real parts of some of the roots are positive but that  $f$  and  $g$  are periodic in  $t$  of period  $T$  and that (1) possesses a solution of period  $T$ . In this paper some characteristic roots of the matrix  $||\partial g_i(t, x, y, \varepsilon)/\partial y_j||$  are permitted to have positive real parts but the author does not make periodicity assumptions. The theorems given compare this singular perturbation problem with the classical conditional stability problem. *W. R. Utz.*

**Arscott, F. M.:** Perturbation solutions of the ellipsoidal wave equation. *Quart. J. Math., Oxford II. Ser.* **7**, 161—174 (1956).

Für die bei der Separation der Schwingungsgleichung in elliptischen Koordinaten entstehende Differentialgleichung  $w''(z) = (a + b k^2 \operatorname{sn}^2 z + q k^4 \operatorname{sn}^4 z) w(z)$  werden (formal) doppelt periodische Lösungen ermittelt, die in  $q$  analytisch sind und sich für  $q = 0$  auf die Laméschen Polynome reduzieren. Dafür werden für  $a, b, w(z)$  Potenzreihen in  $q$  mit entsprechenden Anfangsgliedern angesetzt und beim Koeffizientenvergleich so verfahren, daß die Glieder von  $w(z)$  doppelt-periodisch werden. Die Resultate werden für die ersten Funktionen jedes der acht Typen bis zu den  $q^2$ -Gliedern, nur bei der ersten bis  $q^3$  gegeben. Bei den höheren Funktionen jedes Typs entstehen gewisse Schwierigkeiten. Zum Schluß werden Transformationsformeln für die  $a$  und  $b$  bezüglich  $q \rightarrow -q$ ,  $k^2 \rightarrow k'^2$  ( $k^2 + k'^2 = 1$ ) gegeben. Keine Konvergenzbeweise. — Die Resultate wurden vom Ref. nicht nachgerechnet. *F. W. Schäfke.*

**Salié, Hans:** Über die Koeffizienten der Blasiuschen Reihen. *Math. Nachr.* **14**, 241—248 (1956).

Es werden die Koeffizienten der Potenzreihe

$$y = \sum_{\nu=1}^{\infty} \lambda^{\nu-1} \frac{x^{n\nu-1}}{(n\nu-1)!} c_{\nu}^{(n)}$$

untersucht, welche der Differentialgleichung  $y^{(n)} = \lambda y y^{(n-1)}$  ( $n \geq 2$ ,  $\lambda \neq 0$ ) mit den Anfangsbedingungen  $y(0) = y'(0) = \dots = y^{(n-2)}(0) = 0$ ,  $y^{(n-1)}(0) = 1$  ( $n \geq 2$ ) genügen. Es wird bewiesen:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} c_{k+1}^{(n)} n^{(k-1)/2} / k^{kn} = k^{1/2} / (2\pi)^{(k-1)/2} k! \quad (k \geq 1).$$

Für  $p|n$ ,  $n = p n_1$  gilt  $c_k^{(n)} \equiv c_k^{(n_1)} \pmod{p}$ . Für  $p \nmid n$  gilt  $c_{h+Q}^{(n)} \equiv c_{Q+1}^{(n)} c_h^{(n)} \pmod{p}$  ( $h = 1, 2, \dots$ ), wobei  $Q = (p^j - 1)n$ ,  $j = \text{Ordnung von } p \text{ mod } n$ .

*K. Prachar.*

### Partielle Differentialgleichungen. Potentialtheorie:

**Craig, Homer V.:** On extensors first order partial differential equations and Poisson brackets. *Tensor*, n. Ser. **6**, 159—164 (1956).

Die Arbeit enthält im wesentlichen die zwei folgenden Ergebnisse: 1. Will man für die der partiellen Differentialgleichungen  $F[x^1, \dots, x^N; y_1, \dots, y_N; z(x^1, \dots, x^N)] = 0$ .



(wo  $y_a = \partial z / \partial x^a$ ) zugehörige Funktion  $F[x, y, z(x)]$  Extensorkomponenten durch partielle Differentiation nach  $x$  und  $y$  konstruieren, so wird man sogleich auf die Differentialgleichungen der Charakteristiken geführt. 2. Die Poisson-Klammern der Mechanik können auf diese Weise erhalten werden.

A. Kawaguchi.

**Springer, George:** Baecklund transformations which leave partial differential equations invariant. Studies in differential equations 73—78 (1956).

Loewner [J. Analyse math. 2, 219—242 (1953) und NACA T. N. 2065 (1950)] hat spezielle lineare Baecklund-Transformationen mit  $m = 2$  und  $n = 2$  (s. folgendes Ref.) diskutiert und auf die Hodographen-Methode der Gasdynamik angewandt. Die Transformation hat hier die Form  $\zeta'_x = W \zeta_x + A \zeta + C \zeta'$ ,  $\zeta'_y = W \zeta_y + B \zeta + D \zeta'$  wobei  $\zeta = (u, v)$ ,  $\zeta' = (u', v')$ ,  $u, v$  bzw.  $u', v'$  die abhängigen und  $x, y$  die unabhängigen Variablen sind.  $W, A$  usw. sind  $2 \times 2$ -Matrizen. Die zugehörigen Differentialgleichungen 2. Ordnung (die durch Elimination der gestrichenen bzw. ungestrichenen Variablen entstehen) sind  $\zeta_x = H' \zeta_y$  bzw.  $\zeta'_x = H' \cdot \zeta'_y$  (in dieser Schreibweise je zwei Gleichungen 1. Ordnung). Es wird jetzt insbesondere  $H = H'$ , d. h. Invarianz der Differentialgleichungen verlangt. Der in der Gasdynamik interessierende Fall  $H = \begin{pmatrix} 0 & h_1 \\ h_2 & 0 \end{pmatrix}$  wird eingehend untersucht. Hierbei wird eine infinitesimale Transformation als Erzeugende der Baecklund-Transformationen, die hier offenbar eine Gruppe bilden, benutzt.

C. Heinz.

**Resch, Daniel:** Some Baecklund transformations of partial differential equations of second order. Studies in differential equations 97—114 (1956).

$u_1, \dots, u_m$  bzw.  $u'_1, \dots, u'_m$  seien je  $m$  Funktionen der je  $n$  unabhängigen Variablen  $x_1, \dots, x_n$  bzw.  $x'_1, \dots, x'_n$ . Zwischen den  $u, u', x, x'$ , und den ersten Ableitungen sollen  $k = 2m + n$  Beziehungen (A)  $F_1 = 0, \dots, F_k = 0$  bestehen. Diese lassen sich als Differentialgleichung für die Unbekannten  $u, u'$  und  $x'$  als Funktionen der  $x$  auffassen. Es kann im besonderen der Fall sein, daß sich aus diesen Gleichungen durch Differentiation alle ungestrichenen bzw. gestrichenen Größen eliminieren lassen und daß dabei eine Differentialgleichung 2. Ordnung (B) bzw. (B') für die  $u$  bzw.  $u'$  allein entsteht. Dann lassen sich die Gleichungen (A) als eine Transformation der Lösungen  $u$  von (B) in die Lösungen  $u'$  von (B') auffassen [Baecklund, Lund Arsskr. XIX (1883) diskutierte den Fall  $m = 1, n = 2$ ]. Ein Spezialfall hiervon ist, daß  $n$  der Gleichungen (A) eine Beziehung zwischen den  $x$  und  $x'$  herstellen (dann kann man  $x = x'$  annehmen). Die übrigen  $2m$  Gleichungen bilden dann eine spezielle Baecklund-Transformation der  $u$  in die  $u'$ . Mit diesen speziellen Baecklund-Transformationen für den Fall  $m = 1, n = 3$ , die außerdem noch linear sein sollen, beschäftigt sich Verf. Die Transformation, d. h. die Gleichungen (A), kann dann in der Form (C)  $A^i \cdot u + B^i \cdot u' = 0$  ( $i = 1, 2$ ) geschrieben werden, wo  $A^i, B^i$  lineare Differentialoperatoren sind. Es werden die Bedingungen angegeben, denen diese Operatoren genügen müssen, damit sich aus (C) eine Differentialgleichung 2. Ordnung (B) bzw. (B') für  $u$  bzw.  $u'$  allein bilden läßt. Als Beispiel wird gezeigt, daß man durch eine Baecklund-Transformation die Gleichung  $\delta(u) - 4u/(x_1 - x_2)^2 = 0$ ,  $\delta(u) = u_{x_1 x_1} + u_{x_2 x_2} - u_{x_1 x_2}$ , in die Wellengleichung  $\delta(u) = 0$  transformieren kann, was, wie Verf. beweist, durch eine Transformation der  $u$  und  $x$  nicht möglich ist.

C. Heinz.

**Scott, W. T.:** Linear Baecklund transformations. Studies in differential equations 79—92 (1956).

Die von Loewner, Resch und Springer (s. vorstehende Referate) benutzten Baecklund-Transformationen sind linear und außerdem umkehrbar. In vorliegender Arbeit werden allgemeine Kriterien für diese Eigenschaften angegeben. Einige Spezialfälle werden besonders untersucht.

C. Heinz.

**Scott, W. T.:** A note on the hodograph transformation in three dimensions. Studies in differential equations 93—95 (1956).

Die Linearisierung (Hodographen-Methode) eines Systems von drei quasi-linearen Differentialgleichungen für drei unbekannte Funktionen von drei unabhängigen Variablen für den Fall, daß die Koeffizienten der Gleichungen nicht von den unabhängigen Variablen abhängen, wird mit Hilfe der Matrizen Schreibweise durchgeführt.

C. Heinz.

**Perčinkova-V'čkova, D.:** Formation d'une classe intéressante d'équations aux dérivées partielles. Fac. Philos. Univ. Skopje, Sect. Sci. natur., Annuaire 8, 51—64, français. Zusammenfassg. 65—67 (1956) [Mazedonisch].

Il s'agit de la formation des équations aux dérivées partielles du second ordre par l'élimination des fonctions arbitraires dans des exemples analogues à ceux de Mitrinovitich. Les procédés d'éliminations ne sont pas toujours les meilleurs, comme l'avait remarqué Bojanić (voir le rapport suivant).

N. Saltykow.

**Bojanić, R.:** Remarque sur un procédé de formation des équations aux dérivées partielles. Fac. Philos. Univ. Skopje, Sect. Sci. natur., Annuaire 8, 71—72, français. Zusammenfassg. 73 (1956) [Mazedonisch].

L'A. critique avec parfaite raison les procédés de formation des équations aux dérivées partielles du second ordre par l'élimination des fonctions arbitraires de D. Perčinkova-V'čkova (voir le rapport précédent).

N. Saltykov.

**Courant, R. and P. D. Lax:** The propagation of discontinuities in wave motion Proc. nat. Acad. Sci. USA 42, 872—876 (1956).

Es sei  $u(x^0, x^1, \dots, x^n)$  eine Vektorfunktion mit  $k$  Komponenten. Weiter sei  $Mu = \sum_{\nu=0}^n A^\nu u_{x^\nu} + B = 0$  ein hyperbolisches System von  $k$  linearen partiellen Differentialgleichungen 1. Ordnung in  $k$  Unbekannten; dabei sei die Matrix  $A^0$  die Identität und jede lineare Kombination  $\sum a_\nu A^\nu$  mit reellen  $a_\nu$  besitze reelle, verschiedene Eigenwerte. Außerdem seien  $B$  und die  $A^\nu$  hinreichend differenzierbare Funktionen der unabhängigen Veränderlichen. Vorgegeben sei weiter  $u(0, x^1, \dots, x^n) = f(x^1, \dots, x^n)$ , wobei  $f$  auf jeder Seite einer hinreichend glatten  $(n-1)$ -dimensionalen Mannigfaltigkeit  $G$  stetige Ableitungen von hinreichend hoher Ordnung besitzt mit Sprungunstetigkeiten beim Durchgang durch  $G$ . — Dann besitzt die Lösung  $u$  von  $Mu = 0$  mit dem vorgegebenen Anfangswert  $f$  stetige partielle Ableitungen hinreichend hoher Ordnung überall mit Ausnahme auf den  $k$  charakteristischen Flächen, die von  $G$  ausgehen; beim Durchgang durch diese haben die partiellen Ableitungen von  $u$  Sprungunstetigkeiten. Diese unstetige Lösung  $u$  ist zu verstehen als eine „weak solution“, d. h. es soll gelten  $\int u M^* w dx = 0$  für alle glatten  $w$  mit kompaktem Träger; dabei bezeichnet  $M^*$  die Adjungierte von  $M$ . — Die Differenzierbarkeitseigenschaften von  $u$  in  $P = (x^1 = p^1, \dots, x^n = p^n)$  für  $x^0 = T$  hängen nur ab von den Differenzierbarkeitseigenschaften von  $u(0, x) = f(x)$  in der Nachbarschaft solcher Punkte  $x$ , welche in den von  $(T, P)$  ausgehenden Bicharakteristiken liegen (Verallgemeinertes Huygenssches Prinzip).

Otto Haupt.

**Ciliberto, Carlo:** Su alcuni problemi relativi ad una equazione di tipo iperbolico in due variabili. Boll. Un. mat. Ital., III. Ser. 11, 383—393 (1956).

Sia dato il rettangolo  $R: a \leq x \leq b, c \leq y \leq d$  ed in esso due curve continue  $C_1: y = \alpha(x), a \leq x \leq b; C_2: x = \beta(y), c \leq y \leq d$ , aventi un sol punto in comune. Assegnate due funzioni  $\mu(x)$  in  $(a, b), \nu(y)$  in  $(c, d)$ , continue, facendo uso di metodi funzionali, si prova che se  $f(x, y, z, p, q)$  è continua nello strato  $(x, y) \in R, z, p, q$  reali, e soddisfa ipotesi del tipo di quelle già adottate dall'A. per risolvere il problema di Darboux (questo Zbl. 65, 331; 67, 74) esiste in  $R$  almeno una  $z(x, y)$  continua con  $z_x, z_y$  e con  $z_{xy} = f(x, y, z, z_x, z_y)$  che soddisfa le condizioni  $z_x(x, \alpha(x)) = \mu(x), z_y(\beta(y), y) = \nu(y), z(x_0, y_0) = z_0$ , con  $(x_0, y_0) \in R$  e  $z_0$  assegnati, oppure, se anche  $v'(y)$  è continua, le condizioni  $z_x(x, \alpha(x)) = \mu(x), z(\beta(y), y) = \nu(y)$ . In particolare se  $C_1 = C_2$  questi risultati forniscono due teoremi di esistenza per il problema di Cauchy relativo all'equazione  $z_{xy} = f(x, y, z, z_x, z_y)$ .

R. Conti.

Ejdel'man, S. D.: Über einige Eigenschaften der Lösungen von parabolischen Systemen. Ukrain. mat. Žurn. 8, 191—207 (1956) [Russisch].

L'A. démontre qu'une solution du système parabolique à coefficients constants

$$(1) \quad \frac{\partial^{n_i} u}{\partial t^{n_i}} = \sum_{j=1}^N \sum_{k_0 \cdot 2b + \sum k_s = n_j \cdot 2b} A_{ij}^{(k_0 k_1 \dots k_n)} \frac{\partial^{k_0 + k_1 + \dots + k_n} u_j}{\partial t^{k_0} \partial x_1^{k_1} \dots \partial x_n^{k_n}} \quad (i = 1, 2, \dots, N)$$

régulière pour  $t \leq T$  et  $y$  satisfaisant, elle-même, ainsi que ses dérivées jusqu'à des ordres assez élevés, à la condition de la forme  $|U(x, t)| \leq M[|x| + 1]^\beta [T + 1 - t]^\alpha$  ( $\beta \geq 0, \alpha \geq 0, M \geq 0$  — constants) est un système de polynômes dont les ordres dépendent des constantes  $\alpha, \beta$  et des ordres des équations du système (1) par rapport à la variable  $t$ . Il en résulte un théorème analogue relatif au système du type elliptique. L'A. considère ensuite un système analogue à (1), aux coefficients dépendant de  $t$  et établit certains théorèmes d'unicité et d'analyticité relatifs aux solutions d'un tel système. Dans la seconde partie du travail l'A. démontre un lemme concernant un prolongement d'une solution de ce système déterminée dans un domaine  $G: x_1 \geq 0, -\infty < x_k < +\infty$  ( $k = 2, 3, \dots, n$ ),  $t \leq T$  au demi-espace  $t \leq T$  et en déduit certains théorèmes relatifs aux solutions déterminées dans  $G$  et satisfaisant aux conditions aux limites  $\partial^{2k} U / \partial x^{2k}|_{x_1=0} = 0$  ( $k = 0, 1, \dots, b-1$ ) (problème sans conditions initiales). L'un de ces théorèmes constitue une extension de celui de A. Tychonoff (voir ce Zbl. 12, 355).

M. Krzyżański.

Prodi, Giovanni: Sul primo problema al contorno per equazioni a derivate parziali ellittiche o paraboliche, con secondo membro illimitato sulla frontiera. Ist. Lombardo Sci. Lett., Rend., Cl. Sci. mat. natur. 90 (III. Ser. 21), 189—208 (1956).

I. Es sei  $A$  ein beschränkter Bereich (campo) in der Ebene, dessen Begrenzung  $FA$  ist. Weiter sei (L)  $Lu = a_{11} u''_{xx} + 2a_{12} u''_{xy} + a_{22} u''_{yy} + b_1 u'_x + b_2 u'_y + c u = f$  eine elliptische Differentialgleichung. Dabei soll gelten (1) In  $A$  sind die  $a_{ik}, b_j, c$  und  $f$  Höldersch, deren Exponent und Konstante fest bleiben für eine abgeschlossene Teilmenge von  $A$ . — (2) In  $A + FA$  seien die  $a_{ik}, b_j, c$  stetig mit  $a_{11} a_{22} - a_{12}^2 > 0$ . — (3) Es ist  $c \leq 0$ . — (4) Es sei  $\delta(P)$  der Abstand des Punktes  $P$  von  $FA$ . Es gibt Konstanten  $K$  und  $\mu < 2$ , so daß  $|f(P)| \leq K(\delta(P))^{-\mu}$ . — (5) Es gibt Konstanten  $r$ ,  $\theta$  mit  $0 < r \leq 1$  und  $0 < \theta$  derart, daß für beliebiges  $Q \in FA$  und für jede beliebige offene zusammenhängende Teilmenge  $U$  von  $I(Q; r) \cap A$  gilt  $D(Q; U) \leq \theta$ .

Hierbei bedeuten:  $D(Q; U)$  das  $\sup_{C \in Z} \left| \int_C (y dx - x dy) (x^2 + y^2)^{-1} \right| \leq +\infty$ ,

ferner  $x, y$  rechtwinklige, kartesische Koordinaten mit  $Q = (x = 0, y = 0)$  und  $I(Q; r)$  die offene Kreisscheibe vom Radius  $r$  mit  $Q$  als Zentrum, schließlich  $Z$  die Menge aller regulären, offenen Linien  $C \subset U$ . — Unter den Vor. (1)–(5) besitzt (L) genau eine reguläre, auf  $FA$  verschwindende Lösung  $u$ . Dabei heißt  $u$  regulär, wenn stetig in  $A + FA$  und von der Klasse 2 in  $A$ . — II. Es genüge  $A$  der Vor. (5)

in Ziffer I. Ferner sei  $T$  das Intervall  $0 \leq t \leq t$ . In  $(A + FA) \times T$  sei gegeben (L')  $L'u = a_{11} u''_{xx} + 2a_{12} u''_{xy} + a_{22} u''_{yy} + b_1 u'_x + b_2 u'_y + c u - u'_t = f$ . Dabei soll gelten: (1') Im Innern von  $A \times T$  und auf  $FA \times T$  (in der Arbeit steht  $A \times F$ ) sind die  $a_{ik}, b_j, c, f$  Höldersch; ferner besitzen dort die  $a_{ik}$  partielle Ableitungen nach  $x$  und  $y$ , welche Höldersch sind. — (2') In  $(A + FA) \times T$  sind die  $a_{ik}, b_j, c$  stetig mit  $a_{11} a_{22} - a_{12}^2 > 0$ . — (3')  $c \leq 0$ . — (4') Es gibt Konstanten  $H > 0$  und  $\mu < 2$ , so daß  $|f(P, t)| \leq H \cdot [(\delta(P))^{-\mu} + t^{-\mu/2}]$ , wobei  $P \in A$ . — (5') = (5). — Dann besitzt (L') genau eine reguläre Lösung, die in  $A$  für  $t = 0$  und in  $FA$  für  $t \in T$  verschwindet. — Wegen der Beweise ist auf die Arbeit zu verweisen.

Otto Haupt.

Maslennikova, V. N.: The solution of a mixed problem for the unsteady motion of a rotating viscous fluid and a study of the differential properties of this solution. Doklady Akad. Nauk SSSR 109, 697—700 (1956) [Russisch].



Es wird gelöst das folgende gemischte Rand- und Anfangswertproblem

$$(P) \quad L v \stackrel{\text{df}}{=} \frac{\partial v}{\partial t} - [v, \omega] - \mu \Delta v + \text{grad } p = F(x, t);$$

$v(x, 0) = 0, v(x, t)|_{\partial\Omega_s} = 0$ , für  $t \in [0, l]$ .  $v, \omega, F, \Phi$  bedeuten 3-Komponenten-Vektorfelder auf  $\Omega_4 \stackrel{\text{df}}{=} \Omega_3 \times [0, l]$ . Es wird zuerst mit der Technik des Hilbertschen Raumes die eindeutige Existenz der durch die Integralidentität

$$\int_{\Omega_4} \left\{ -v \cdot \frac{\partial \Phi}{\partial t} - [v, \omega] \cdot \Phi + \mu \sum_{i=1}^3 \frac{\partial v}{\partial x_i} \cdot \frac{\partial \Phi}{\partial x_i} \right\} dx dt - \int_{\Omega_4} F \cdot \Phi dx dt$$

definierten verallgemeinerten Lösung bewiesen. Es wird die Lösbarkeit von (P') mit Hilfe des Galerkinschen Verfahrens gezeigt. Die Differenzierbarkeit — in offenen Untermengen von  $\Omega_4$  — der verallgemeinerten Lösung  $v$  folgt aus der Abschätzung

$$\sum_{|\alpha|=l} \left\| \frac{\partial^{l+k} v}{\partial x_1^{\alpha_1} \partial x_2^{\alpha_2} \partial x_3^{\alpha_3} \partial t^k} \right\|_{L^2(\Omega_4')} \leq c \sum_{|\beta|=l} \left\| \frac{\partial^{l+k-1} F}{\partial x_1^{\beta_1} \partial x_2^{\beta_2} \partial x_3^{\beta_3} \partial t^{k-1}} \right\|_{L^2(\Omega_4)}$$

durch die Anwendung des Sobolevschen Lemmas ( $\Omega_4'' \subset \Omega_4' \subset \Omega_4$ ). *K. Maurin.*

**Greco, Donato:** Nuove formole integrali di maggiorazione per le soluzioni di un'equazione lineare di tipo ellittico ed applicazioni alla teoria del potenziale. *Ricerche Mat.* 5, 126—149 (1956).

Un domaine  $T$  de  $S_m$  appartient à la classe  $A^{(2)} [A^{(2,\lambda)}]$  où  $0 < \lambda < 1$  si la frontière  $FT$  se compose d'un nombre fini de variétés à  $(m-1)$ -dimensions disjointes et suffisamment régulières. (Voir: C. Miranda, ce Zbl. 65, 85.) Nous rappelons que:  $f \in C^{(r)} [C^{(r,\lambda)}]$  où  $0 < \lambda < 1$  si  $f$  est continue [ $\lambda$ -höldérienne] ainsi que ses dérivées partielles d'ordre  $r$  dans le domaine  $T$ ; que  $f \in A^{(p)}$  si  $f$  est absolument continue sur presque toute parallèle à l'axe  $Ox_i$  ( $i = 1, 2, \dots, m$ ) et ses dérivées partielles du premier ordre sont dans  $L^p$ . On dit aussi que la fonction  $f$ , définie dans le domaine  $T$ , est  $\mu_{m-r}$ -quasi continue ( $r < m$ ) si, quel que soit  $\varepsilon > 0$ , il existe un ensemble  $I$ , ayant ses projections sur les espaces  $S_{m-r}$  coordonnés de mesure  $< \varepsilon$ , tel que la restriction de  $f$  à  $T - I$  soit continue. Si  $\mathcal{E}_k$  ( $k = 1, 2, \dots, \nu$ ) est un recouvrement fini de  $FT$  et  $\bar{u}$  est la trace de  $u$  sur  $FT$ , on pose:  $\Theta_0^{(p)}(\bar{u}, \mathcal{E}_k) = \int_{\mathcal{E}_k} |\bar{u}(x)|^p d\sigma$ ,

$$\Theta_1^{(p)}(\bar{u}, \mathcal{E}_k) = \int_{\mathcal{E}_k} \sum_{i=1}^{1 \dots m} \left| \frac{\partial \bar{u}}{\partial \xi_i} \right|^p d\sigma; \quad \Theta_2^{(p)}(\bar{u}, \mathcal{E}_k) = \int_{\mathcal{E}_k} \sum_{i,j=1}^{1 \dots m} \left| \frac{\partial^2 \bar{u}}{\partial \xi_i \partial \xi_j} \right|^p d\sigma;$$

$$\Theta_r^{(p)}(\bar{u}, FT) = \sum_{k=1}^{\nu} \Theta_r(\bar{u}, \mathcal{E}_k),$$

( $\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_m$ ) étant les coordonnés locales sur chaque partie  $\mathcal{E}$ . Soit ensuite:

$$(1) \quad \mathfrak{M} = \sum_{i,j=1}^{1 \dots m} a_{ij}(x) \frac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_j} + \sum_{i=1}^{1 \dots m} b_i(x) \frac{\partial}{\partial x_i} + c(x)$$

un opérateur différentiel linéaire elliptique du deuxième ordre où les coefficients satisfont aux conditions suivantes:  $a_{ij}(x) \in C^{(0,\lambda)}$ ;  $b_i(x), c(x) \in C^{(0)}$ ;

$$(2) \quad \sum_{i,j=1}^{1 \dots m} a_{ij}(x) \lambda_i \lambda_j \geq \mu^2 \sum_{i=1}^{1 \dots m} \lambda_i^2 \quad (\mu > 0).$$

En employant, essentiellement, une majoration de Calderon et Zygmund (ce Zbl. 47, 102), relative au potentiel newtonien et aussi l'artifice de Korn, l'A. établit, pour les solutions  $u \in C^{(2,\lambda)}$  de l'équation  $\mathfrak{M} u = f$  les majorations a priori suivantes:

$$(3) \quad \int_{\Delta} \sum_{i,j=1}^{1 \dots m} \left| \frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j} \right|^p dx \leq C_p(\varrho) \int_T \left( |f(x)|^p + |u(x)|^p + \sum_{i=1}^{1 \dots m} \left| \frac{\partial u}{\partial x_i} \right|^p \right) dx$$

où  $\Delta$  est un domaine contenu dans  $F$  et  $\varrho$  est la distance, positive, du domaine  $\Delta$  à

*FT*. En outre on a: (4)

$$\int_T \sum_{i,j}^{1 \dots m} \left| \frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j} \right|^p dx \leq C \left\{ \int_T \left( |f(x)|^p + |u(x)|^p + \sum_i^{1 \dots m} \left| \frac{\partial u}{\partial x_i} \right|^p \right) dx + \sum_{r=0}^2 \Theta_r^{(p)}(\bar{u}, FT) \right\}.$$

Soit, maintenant,  $L(x, y)$  une fonction de Levi pour l'opérateur  $\mathfrak{M}$  (Voir: C. Miranda, loc. cit.), et  $w(x) = \int_T L(x, y) z(y) dy$  le potentiel généralisé de domaine  $[T \in A^{(2, \lambda)}]$ ;

on a le résultat suivant: si  $z(x) \in L^p$  ( $p \geq 1$ ), alors (\*)  $w(x) \in A^{(p)}$ ; si  $p > 1$ , alors:  $\partial w / \partial x_i \in A^{(p)}$  ( $i = 1, 2, \dots, m$ ). En général on a: si,  $z(x) \in L^p$ , que:  $w(x)$  est  $\mu_{m-[2p]}$ -quasi continue tandis les dérivées  $\partial w / \partial x_i$  sont  $\mu_{m-[p]}$ -quasi continues, où avec  $[k]$  on a désigné le plus grand entier plus petit que  $k$ . En particulier, si  $p > \frac{1}{2} m$ , on a:  $w \in C^{(0, \mu)}$  avec:  $\mu < \min [1, (2 - m/p)]$  et, si  $p > m$ , on a:  $w(x) \in C^{(1, \mu)}$  avec:  $\mu < 1 - m/p$ . [Remarque: La relation (\*) peut être améliorée par les majorations connues de Sobolev. Pour des majorations du même type que (3) et (4) dans le cas:  $\bar{u} \equiv 0$  voir aussi: A. I. Košelev, ce Zbl. 66, 83.] *G. Stampacchia.*

**Greco, Donato:** Un teorema di esistenza per il problema di Dirichlet relativo ad un'equazione lineare ellittica in  $m$  variabili. *Ricerche Mat.* 5, 150—158 (1956).

Les notations et les définitions du résumé qui précède sont conservées. L'A. démontre le théorème suivant: Soit  $T$  un domaine de l'espace à  $m$ -dimensions  $S_m$  de classe  $A^{(2, \lambda)}$  et soit  $\varphi(x)$  une fonction  $\in C^{(2)}$  sur  $FT$ . Si  $a_{ij}(x) \in C^{(0)}$  dans le domaine  $T$  et si les fonctions  $b_i, c, f$  sont mesurables et bornées et en outre on a:  $c \leq 0$ , alors le problème de Dirichlet:  $\{\mathfrak{M} u = f \text{ dans } T, u = \varphi \text{ sur } FT\}$  [l'opérateur  $\mathfrak{M}$  étant donné par la formule (1)] admet au moins une solution  $u$  tel que:  $\alpha) u \in C^{(1, \lambda)}$ , quel que soit  $\lambda < 1$  et  $\beta) \partial u / \partial x_i \in A^{(p)}$  ( $i = 1, 2, \dots, m$ ), quel que soit  $p > 1$ .

*G. Stampacchia.*

**Skorobogat'ko, V. Ja.:** Ein Satz über Differentialungleichungen für eine elliptische Gleichung. *Ukrain. mat. Žurn.* 8, 335—338 (1956) [Russisch].

On donne dans un ouvert borné  $D$  du plan de frontière régulière (condition de Liapounoff) l'opérateur elliptique

$$L = a_{11} (\partial^2 / \partial x_1^2) + 2 a_{12} (\partial^2 / \partial x_1 \partial x_2) + a_{22} (\partial^2 / \partial x_2^2) + 2 b_1 (\partial / \partial x_1) + 2 b_2 (\partial / \partial x_2) + c,$$

$a_{ij}$  deux fois ( $b_i$  une fois) continûment différentiables dans  $\bar{D}$ ,  $c$  continue. On donne  $B_1, B_2$  dans  $\bar{D}$ ,  $\partial B_1 / \partial x_1$  et  $\partial B_2 / \partial x_2$  étant continus par morceaux. On pose

$$A_l = \frac{1}{2} \sum_{k=1}^2 \frac{\partial a_{kl}}{\partial x_k} - b_l + B_l, \quad l = 1, 2, \quad a_{12} = a_{21},$$

$$R = \partial B_1 / \partial x_1 + \partial B_2 / \partial x_2 - c \text{ et on suppose que } I = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & A_1 \\ a_{21} & a_{22} & A_2 \\ A_1 & A_2 & R \end{vmatrix} > 0 \text{ dans } \bar{D}.$$

Soit  $u$  deux fois continûment différentiable dans  $\bar{D}$ , avec  $u|_s = 0$ ,  $Lu < 0$ . Alors  $u \geq 0$  dans  $D$ .

*J. L. Lions.*

**Heinz, Erhard:** Über gewisse elliptische Systeme von Differentialgleichungen zweiter Ordnung mit Anwendung auf die Monge-Ampèresche Gleichung. *Math. Ann.* 131, 411—428 (1956).

Die betrachteten Differentialgleichungen lauten

$$\begin{aligned} \text{(S)} \quad x_{uu} + x_{vv} &= a(x, y) (x_u^2 + x_v^2) + b(x, y) (x_u y_u + x_v y_v) \\ &\quad + c(x, y) (y_u^2 + y_v^2) + d(x, y) (x_u y_v - x_v y_u), \\ y_{uu} + y_{vv} &= \tilde{a}(x, y) (x_u^2 + x_v^2) + \tilde{b}(x, y) (x_u y_u + x_v y_v) \\ &\quad + \tilde{c}(x, y) (y_u^2 + y_v^2) + \tilde{d}(x, y) (x_u y_v - x_v y_u). \end{aligned}$$

Nach einem Ergebnis von H. Lewy (dies. Zbl. 15, 159) gilt für eineindeutige Abbildungen  $(x, y) \leftrightarrow (u, v)$  bei reellen analytischen Koeffizienten  $a, \dots, \tilde{d}$ , daß die Funktionaldeterminante  $x_u y_v - x_v y_u$  nicht verschwindet. Verf. beweist erweiternd die

Existenz einer Abschätzung  $|x_u y_v - x_v y_u| \geq \lambda(M, N) > 0$  unter den Voraussetzungen: 1. Für  $x^2 + y^2 < 1$  sind  $a, \dots, \tilde{d}$  zweimal stetig differenzierbar, und es gilt  $|a(x, y)| \leq 0,5 \cdot 10^{-2}, \dots, |\tilde{d}(x, y)| \leq 0,5 \cdot 10^{-2}, |a_x| \leq M, \dots, |\tilde{d}_y| \leq M$  ( $M < \infty$ ). 2.  $x = x(u, v), y = y(u, v)$  bilden  $u^2 + v^2 \leq 1$  eindeutig und stetig auf  $x^2 + y^2 \leq 1$  ab ( $u = v = 0$  entspricht  $x = y = 0$ ). 3.  $\int \int_{u^2 + v^2 < 1} (x_u^2 + x_v^2 + y_u^2 + y_v^2) du dv \leq N < \infty$ .

Dieses Ergebnis läßt sich auch auf die Lösungen einer gewissen Klasse von Monge-Ampèreschen Differentialgleichungen ausdehnen und liefert dann a priori-Abschätzungen für die zweiten und dritten Ableitungen. Diese Klasse läßt sich dadurch kennzeichnen, daß eine Transformation auf die Form (S) möglich ist. Zu ihr gehören u. a. die bei dem Minkowski- und dem Weyl-Problem auftretenden Differentialgleichungen.

Joachim Nitsche.

**Duff, George F. D.:** Eigenvalues and maximal domains for a quasi-linear elliptic equation. Math. Ann. **131**, 28—37 (1956).

Verf. betrachtet die Differentialgleichungen (1)  $\Delta u = (\nabla u)^2 + \lambda \varrho(P)$ , (2)  $\Delta u = k(u) (\nabla u)^2 + \lambda \sigma(P, u)$  für  $P \in A$  (Gebiet im  $n$ -dimensionalen Raum).  $B$  sei der Rand von  $A$  (viermal stetig differenzierbar). (1) geht mit  $\varphi = e^{-u}$  in (1')  $\Delta \varphi + \lambda \varrho \varphi = 0$  über. Durch Untersuchung dieser Gleichung bezüglich positiver Lösungen ergibt sich: I. Es sei  $\varrho > 0$  in  $A$  und  $\lambda_1$  der kleinste Eigenwert von (1'). Dann hat (1) mit der Randbedingung  $u = f$  auf  $B$  für  $\lambda < \lambda_1$  eine eindeutige Lösung, für  $\lambda \geq \lambda_1$  existiert keine. Für  $\lambda \leq 0$  ( $\geq 0$ ) nimmt  $u(P)$  sein Minimum (Maximum) auf dem

Rand an. II. Ist  $\sigma(P, u)$  für  $P \in A$  und alle  $u$  beschränkt und gilt  $\left| \int_0^y k(s) ds \right| < M$  für  $|y| < \infty$ , so hat (2) eine Lösung mit vorgeschriebenen Randwerten auf  $B$ . Ein entsprechender Satz wird für das zweite Randwertproblem bewiesen. Mit Hilfe eines Satzes von Stekloff [C. r. Acad. Sci., Paris **128**, 984—987 (1899)] beweist Verf. die Existenz genau eines  $\lambda$ , für das  $\Delta u = (\nabla u)^2 - q(P)$ ,  $P \in A$ ,  $\partial u / \partial n = f(P) - \lambda \varrho(P)$ ,  $P \in B$  eine Lösung besitzt (vgl. dazu die Arbeit der Reff., dies. Zbl. **50**, 99).

Johannes u. Joachim Nitsche.

**Martin, A. I.:** Some further work on  $L^2$ -solutions of the wave equation. Quart. J. Math., Oxford II. Ser. **7**, 280—286 (1956).

Mit einer in der  $(x, y)$ -Ebene reellen stetigen Funktion  $q(x, y)$  wird die Differentialgleichung (1)  $\varphi_{xx} + \varphi_{yy} + (\lambda - q)\varphi = 0$  betrachtet.  $\varphi$  heißt  $L^2$ -Lösung, falls zweimal stetig differenzierbar mit  $0 < \iint |\varphi|^2 dx dy < \infty$ . Nach früheren Resultaten von Titchmarsh und dem Verf. sind zwei Fälle möglich: I. (1) besitzt für kein  $\lambda$  mit  $\text{Im } \lambda \neq 0$  eine  $L^2$ -Lösung; die Greensche Funktion  $G(x, y, \xi, \eta, \lambda)$  ist eindeutig;

die Sprungstellen von  $H(x, y, \xi, \eta, u) = \frac{1}{\pi} \lim_{v \rightarrow 0} \int_0^u \text{Im } G(x, y, \xi, \eta, u' + i v) du'$

bilden das diskrete Spektrum von (1) bezüglich der gesamten Ebene. II. (1) besitzt für jedes  $\lambda$  mit  $\text{Im } \lambda \neq 0$  eine  $L^2$ -Lösung; die Greensche Funktion ist nicht eindeutig. — Für Fall II zeigt nun Verf., daß (1) eine  $L^2$ -Lösung für solche reellen  $\lambda$  besitzt, die entweder Sprungstellen einer Funktion  $H(u)$  sind oder im Innern eines Konstanzintervalls einer solchen liegen.

F. W. Schäfke.

**Berezanskij (Beresanskij), Ju. M.:** Generalization of a Bochner's theorem on eigenfunctions expansion for partial differential equations. Doklady Akad. Nauk SSSR **110**, 893—896 (1956) [Russisch].

Verf. kündigt den folgenden wichtigen Satz an: Damit ein positiv definiter hermitescher (p. d. h.) Kern  $K \in C(\Omega_n \times \Omega_n)$ ,  $n \geq 1$  die Integraldarstellung  $K(x, y) = \int_{-\infty}^{\infty} \theta(x, y; \lambda) d\mu(\lambda)$  erlaubt — wobei  $L_x \theta(\cdot, \cdot; \lambda) = L_y \theta(\cdot, \cdot; \lambda) = \lambda \theta(\cdot, \cdot; \lambda)$ ,



wo  $L_x \stackrel{\text{df}}{=} \sum_{|\alpha| \leq m} a_\alpha(x) D^\alpha$ ;  $D^\alpha = \frac{\partial^{|\alpha|}}{\partial x_1^{\alpha_1} \dots \partial x_n^{\alpha_n}}$ ,  $\bar{L} \bar{u} \stackrel{\text{df}}{=} \overline{L u}$ , ( $L'$  ist der formal

Adjungierte von  $L$ ) ein elliptischer Operator ist;  $\mu$  ist ein positives Maß auf  $(-\infty, \infty)$  — ist notwendig und hinreichend, daß  $(L' f, g) = (f, \bar{L}' g)$  identisch für  $f, g \in C_0^m(\Omega_n)$ , wo  $(f, g) \stackrel{\text{df}}{=} \iint K(x, y) f(x) g(y) dx dy$ . Dieser Satz erlaubt dem Verf. verschiedene Sätze über die Darstellung p. d. Funktionen (diejenigen z. B. von S. Bochner; S. G. Krein; Povsner; S. N. Bernstein) unter einen Hut zu bringen. — [Bemerkung des Ref.: Man kann aufs einfachste die folgende weitgehende Verallgemeinerung des obigen Satzes beweisen:  $K$  ist ein beliebiger p. d. h. Kern im Sinne von L. Schwartz  $\{K \in D'(\Omega_n \times \Omega_n)\}$ , der ein Skalarprodukt  $(\cdot, \cdot)$  definiert  $\{(f, g) = \langle K f, g \rangle\}$ ;  $L: D \rightarrow D$  ist hypoelliptisch und symmetrisch in bezug auf  $(\cdot, \cdot)$ . In dieser Fassung bekommt man als Spezialfälle: 1. den obigen Satz; 2. einen Satz von Gårding (vgl. dies. Zbl. 56, 96) über die Differenzierbarkeit der Spektralfunktion  $(K(x, y) = \delta(x - y); L$  elliptisch) [vgl. Maurin: Bull. Acad. Polon. Sci., Cl. III 6, No. 3 (1958)]. *K. Maurin.*

**Mackie, A. G.:** An application of Hankel transforms in axially symmetric potential flow. Proc. Edinburgh math. Soc., II. Ser. 9, 128—131 (1956).

Ein hydrodynamisches Problem, das mathematisch auf die Konstruktion einer Lösung  $\varphi_1$  für  $z \leq 0$  und  $\varphi_2$  für  $z \geq 0$  der Potentialgleichung in Zylinderkoordinaten  $\partial^2 \varphi / \partial r^2 + (1/r) \partial \varphi / \partial r + \partial^2 \varphi / \partial z^2 = 0$  hinausläuft, wobei  $\varphi_1 = \varphi_2$  und  $\partial \varphi_1 / \partial z = \partial \varphi_2 / \partial z$  für  $z = 0$ ,  $r < 1$  sein soll und außerdem die Bedingungen  $\varphi_1 \rightarrow 0$  für  $z^2 + r^2 \rightarrow \infty$ ,  $\partial \varphi_1 / \partial z = 0$  für  $z = 0$ ,  $r > 1$  und  $\partial \varphi_2 / \partial z \rightarrow U$  für  $z \rightarrow \infty$  zu erfüllen sind. Die Lösung geschieht durch Anwendung der Hankel-Transformation

$\bar{\varphi} = \int_0^\infty r J_0(\xi r) \varphi(r, z) dr \equiv \mathfrak{H}\{\varphi\}$ , die vermöge des Differentiationsgesetzes  $\mathfrak{H}\{\partial^2 \varphi / \partial r^2 + (1/r) \partial \varphi / \partial r\} = -\xi^2 \bar{\varphi}$  die Potentialgleichung in die gewöhnliche Differentialgleichung  $d^2 \bar{\varphi} / dz^2 - \xi^2 \bar{\varphi} = 0$  überführt. *G. Doetsch.*

**Wolska, J.:** Problème aux limites à la dérivée tangentielle pour l'équation du type elliptique. Bull. Acad. Polon. Sci., Cl. III 4, 563—567 (1956).

L'A. se propose de résoudre le problème de trouver une fonction  $u(x, y)$  qui à l'intérieur du domaine  $D$ , limité par une courbe fermée  $C$ , satisfait à l'équation

$$\Delta u = \partial^2 u / \partial x^2 + \partial^2 u / \partial y^2 = F(x, y, u, \partial u / \partial x, \partial u / \partial y)$$

et en tout point  $s$  au bord  $C$  vérifie la relation à la dérivée tangentielle  $du/dn + a(s)u = \Phi(s, u, du/ds)$ . On admet que  $C$  a une tangente continue en tout point et l'angle déterminé par cette tangente avec une direction fixe satisfait à la condition de Hölder. Les fonctions  $\Phi, F$  et  $a$  satisfont à la condition de Hölder. Le problème est ramené à la résolution d'un système de deux équations intégrales. L'A. annonce qu'un développement plus détaillé sera publié sous le même titre dans Ann. Polon. math. 1957. *M. Nedelcu.*

**Vinogradov, V. S.:** On Neuman's problem for partial differential equation of elliptic type. Doklady Akad. Nauk SSSR 109, 13—16 (1956) [Russisch].

Mit Hilfe einer Methode von Vekua (dies. Zbl. 64, 346) findet der Verf. Lösbarkeitsbedingungen für das Neumannsche Problem für eine elliptische lineare Gleichung zweiter Ordnung in zwei unabhängigen Veränderlichen. *K. Maurin.*

**Albertoni, Sergio:** Sulla risoluzione del problema di Neumann per l'equazione  $\Delta_2 u + k u = f$  in un dominio con punti angolosi. Ist. Lombardo Sci. Lett. Rend., Cl. Sci. mat. natur. 90 (III. Ser. 21), 221—243 (1956).

Si risolve il problema di Neumann per l'equazione  $\Delta_2 u + k u = f$  relativamente ad un dominio piano  $C$ , semplicemente connesso, nell'ipotesi che la sua frontiera  $F$  abbia punti angolosi. Le soluzioni sono cercate in una classe  $(E)$  introdotta da Amerio. Si danno le condizioni caratteristiche per l'esistenza di tali soluzioni. Il problema si risolve con sistemi d'equazioni integrali. *M. Nedelcu.*

**Brelot, Marcel:** Étude axiomatique du problème de Dirichlet. C. r. Acad. Sci., Paris 242, 327—329 (1956).

Soit  $h$  une fonction harmonique et positive dans un espace de Green  $\Omega$  et  $\bar{\Omega}$  l'espace obtenue en complétant  $\Omega$  pourvu d'une métrique. Soit  $f$  une fonction réelle définie sur la frontière  $\Gamma = \bar{\Omega} - \Omega$ , et  $u$  une fonction sousharmonique ou  $-\infty$  dans  $\Omega$ , telle que  $u/h$  est bornée supérieurement et  $\limsup u/h \leq f$  en tout point de  $\Gamma$ . En introduisant deux axiomes relatives aux points de  $\Gamma$ , l'A. généralise certains résultats obtenues antérieurement par Brelot et Choquet (ce Zbl. 46, 327). Le cas particulière où  $\Omega$  est partout dense dans un espace compact métrisable est considérée.

*J. Górski.*

**Naïm, Linda:** Propriétés et applications de la frontière de R. S. Martin. C. r. Acad. Sci., Paris 242, 2695—2698 (1956).

L'A. étudie le problème de Dirichlet dans l'espace de Green pour la frontière de Martin et les frontières plus générales. L'équivalence de deux axiomatiques connues (Brelot, rapport précéd.) est montré. Le cas générale est ramené à celui de la frontière de Martin.

*J. Górski.*

**Gehring, F. W.:** On the Dirichlet problem. Michigan math. J. 3, 201 (1956)

Une nouvelle démonstration du théorème sur l'existence presque partout de la valeur frontière de l'intégrale de Poisson

$$u(re^{i\varphi}) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) K(r, \varphi, t) dt, \quad K(r, \varphi, t) = \frac{1 - r^2}{1 - 2r \cos(t - \varphi) + r^2},$$

où  $f(t)$  est sommable dans l'intervalle  $(-\pi, \pi)$ . La thèse est déduite des propriétés de la fonction  $F(t) = \int_{-\pi}^t f(x) dx$  et de l'intégrale de Poisson  $U(re^{i\varphi}) =$

$$\frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} F(t) K(r, \varphi, t) dt.$$

*F. Leja.*

**Bertolini, Fernando:** Su una generalizzazione del problema di Poisson. Atti Accad. naz. Lincei, Rend., Cl. Sci. fis. mat. natur., VIII. Ser. 20, 759—766 (1956).

Verf. untersucht die Newtonschen Potentiale von dreidimensionalen durch voll-additive Mengenfunktionen gegebenen Massenverteilungen. Die partiellen Ableitungen und die Poissonsche Gleichung werden dabei nach Evans' Gedankengängen in verallgemeinertem Sinn verstanden. Anwendung auf die Piconeschen Methoden für die Auflösung von Randwertaufgaben.

*G. Cimmino.*

**Smith, Kennan T.:** Mean values and continuity of Riesz potentials. Commun. pure appl. Math. 9, 569—576 (1956).

Un potentiel d'ordre  $2m$  d'énergie finie est une fonction de la forme (1)  $K_{2m}\mu(x) = \int K_{2m}(x-y) d\mu(y)$  où la mesure  $\mu$  satisfait à  $\|\mu\|^2 = \int K_{2m}\mu(x) \cdot d\mu(x) < \infty$ ; on considère plus généralement des fonctions de la forme (2)  $K_m g(x) = \int K_m(x-y) g(y) dy$  avec  $g \in L^2(\mathbb{R}^n)$ . On suppose  $2m \leq n$ ;  $K_\alpha$  désigne le noyau d'ordre  $\alpha$ , proportionnel à  $|x|^{n-\alpha}$  si  $\alpha < n$ ; le cas logarithmique ( $2m = n$ ) nécessite quelques adaptations qui doivent être développées ultérieurement. Les intégrales (1) et (2) sont définies quasi-partout (i. e. sauf sur un ensemble de capacité extérieure nulle). Etendant un résultat de Frostman (ce Zbl. 13, 63) concernant les valeurs moyennes de (1), l'A. met en évidence des suites de mesures régularisantes  $\varphi_n$  (plus générales que la régularisation par moyennes sphériques) telles que les valeurs moyennes  $(K_{2m}\mu) * \varphi_n(x)$  et  $(K_m g) * \varphi_n(x)$  convergent vers (1) et (2) quasi partout. Il étudie également la notion d'ensemble effilé d'ordre  $2m$ , qui permet de montrer que (2) est quasi-partout „finement“ continue.

*J. Deny.*

**Huber, Alfred:** Some results on generalized axially symmetric potentials. Proc. Confer. differential Equations, Maryland 1955, 147—155 (1956):

L'A. rassemble et complète des résultats sur les solutions de

$$(1) \quad L_k(u) = \sum \partial^2 u / \partial x_i^2 + (k/x_n) \partial u / \partial x_n = 0$$

dans  $R^n$ . Il utilise comme Weinstein les principes: (1) équivaut dans le demi-espace  $x_n > 0$  à ce que  $W(\xi_1, \xi_2, \dots) = u(\xi_1, \dots, \xi_{n-1}, \sqrt{\xi_n^2 + \xi_{n+1}^2 + \dots + \xi_{n+k}^2})$  soit harmonique ( $k$  entier  $> 0$ ) dans  $R^{n+k}$ , et à ce que  $v = u x_n^{k-1}$  satisfasse à  $L_{2-k}(v) = 0$ . Ainsi le problème de Dirichlet pour (1) peut être traité dans un domaine de  $x_n > 0$  avec une partie  $S_1$  de frontière dans  $x_n = 0$  et une partie assez régulière  $S_2$ . Il y a existence et unicité d'une solution pour une donnée bornée continue, soit partout ( $k < 1$ ), soit sur  $S_2$  ( $k \geq 1$ ) ou bien (si  $k \geq 1$ ) pour une donnée analytique sur  $S_1$  mais seulement pour des domaines suffisamment peu étendus. On donne aussi pour  $k$  entier des propriétés de prolongement harmonique, sousharmonique ou surharmonique de  $W(\xi_1, \dots)$  sous certaines conditions d'allure de  $u$  au voisinage des points de  $x_n = 0$ . On obtient, grâce aux transformations des principes de plus haut, des propriétés de moyenne et de convexité et une représentation analogue à la représentation potentielle de F. Riesz.

M. Brelot.

Supino, G.: Limitazioni e confronti per le funzioni meta-armoniche. *Revista Un. mat. Argentina* 17, 287—292 (1956).

Verf. gibt einige einfache Abschätzungen für die Lösungen  $u$  der partiellen Differentialgleichung  $u_{xx} + u_{yy} + \lambda^2 u = 0$  ( $\lambda^2$  konstant) und für ihre partiellen Ableitungen in einem konvexen Gebiet der Ebene unter der Voraussetzung, daß die Randwerte auf einem Teil des Randes  $= 0$ , auf dem übrigen Teil  $\geq 0$  und  $\leq M$  sind.

G. Cimmino.

Tsuji, Masatsugu: On a non-negative subharmonic function in a half-plane. *Kōdai math. Sem. Reports* 8, 134—141 (1956).

Es werden Mittelwertseigenschaften, ein Darstellungssatz sowie ein Satz über das Verhalten in der Umgebung des unendlichfernen Punktes bewiesen für Funktionen, welche in einer Halbebene definiert und daselbst nicht-negativ und subharmonisch sind. Diese Resultate sind jedoch nicht nur — wie vom Verf. erwähnt — teilweise, sondern restlos bekannt und sogar auf den  $R_n$  verallgemeinert worden. Ausser den Referenzen des Verf. sind hier zwei weitere Arbeiten von A. Dinghas (dies. Zbl. 23, 142 und 64, 351) sowie diejenigen von J. Lelong-Ferrand (dies. Zbl. 33, 373 und 41, 223) zu erwähnen.

A. Huber.

Hayashi, Kenji: On almost sub-biharmonic functions. *Mem. Fac. Sci. Kyusyu Univ., Ser. A* 10, 133—140 (1956).

Verf. definiert im Anschluß an eine Begriffsbildung von W. H. Bradford (dies. Zbl. 50, 323): Eine in einem Gebiete  $G$  definierte Funktion  $u(x, y)$  heiße daselbst fastbisubharmonisch, falls sie lokal summierbar ist und der (im Sinne der Schwartzschen Distributionen zu verstehenden) Ungleichung  $\Delta^2 * u \leq 0$  genügt. Es werden verschiedene charakteristische Mittelwertseigenschaften dieser Funktionen aufgezeigt, wobei die entsprechenden Aussagen für genügend reguläre Funktionen benützt werden. Letztere wurden von Bradford bewiesen, sind aber zum Teil bereits bei N. Nicolesco (dies. Zbl. 3, 210 und 5, 206) anzutreffen.

A. Huber.

## Variationsrechnung:

Sagan, H.: Über ein, einer selbstadjungierten Differentialgleichung zuordenbares dreidimensionales Variationsproblem. *Österreich. Ingenieur-Arch.* 10, 264—267 (1956).

In questo lavoro l'A. considera il problema della membrana vibrante, di forma circolare, fissata al bordo e non caricata. Introdotto un sistema di coordinate polari  $(r, \varphi)$  il corrispondente problema variazionale consiste nel determinare le funzioni

$u(t, r, \varphi)$  estremali del funzionale: 
$$\int_{T_1}^{T_2} \int_0^{2\pi} \int_0^1 [r u_t^2 - r u_r^2 - r^{-1} u_\varphi^2] dr d\varphi dt, \text{ e soddis-}$$



facienti le condizioni:  $u(t, 1, \varphi) = 0$ ,  $u(0, r, \varphi) = f(r, \varphi)$ ,  $u_t(0, r, \varphi) = 0$ . La soluzione  $u(t, r, \varphi)$  di questo problema rappresenta lo spostamento del punto della membrana di coordinate  $(r, \varphi)$  dalla posizione d'equilibrio, all'istante  $t$ . Applicando il principio della separazione delle variabili all'equazione di Eulero relativa a tale problema si perviene al sistema (1)  $T''(t) + \lambda^2 T(t) = 0$ ,  $\Phi''(\varphi) + n^2 \Phi(\varphi) = 0$ ,  $r^2 R''(r) + r R'(r) + (\lambda^2 r^2 - n^2) R(r) = 0$  ottenuto ponendo  $u(t, r, \varphi) = T(t) R(r) \Phi(\varphi)$ . Per ottenere il problema isoperimetrico che caratterizza il più piccolo autovalore  $\lambda$ , l'A. applica direttamente il principio di separazione delle variabili nel problema variazionale. Egli trova per questa via tre equazioni integrodifferenziali che, insieme alle prime due equazioni del sistema (1), gli danno la relazione integro-

differenziale:  $T'' = -T \left[ \int_0^1 \left( r R'^2 + \frac{n^2}{r} R^2 \right) dr \int_0^1 r R^2 dr \right]$ . Da qui si trae che

il problema isoperimetrico caratteristico del più piccolo autovalore  $\lambda$  è quello consistente nel determinare il minimo del funzionale  $\left[ \int_0^1 \left( r R'^2 + \frac{n^2}{r} R^2 \right) dr \int_0^1 r R^2 dr \right]$

il valore di tale minimo rappresenta il quadrato del più piccolo autovalore  $\lambda$ . Questo procedimento viene infine applicato nel caso più generale di un'equazione differenziale di Sturm-Liouville cioè di un'equazione del tipo:  $\partial^2 u / \partial z^2 = [p'(x)/r(x)] (\partial u / \partial x) + [p(x)/r(x)] (\partial^2 u / \partial x^2) + [q(x)/r(x)] (\partial^2 u / \partial y^2)$  che può riguardarsi come l'equazione

d'Eulero relativa al funzionale  $\int_a^b \int_0^{2\pi} \int_c^d [p(x) u_x^2 + q(x) u_y^2 - r(x) u_z^2] dx dy dz$ .

*L. de Vito.*

**Greco, Donato:** Su un teorema di calcolo delle variazioni. *Ricerche Mat.* 5, 159—166 (1956).

L'A. donne ici une démonstration, par une méthode très semblable à celle-là classique de Lebesgue et de Tonelli, du théorème suivant de J. Cecconi [Rivista Mat. Univ. Parma 6, 45—64 (1955)]. Soit  $D$  un domaine borné et connexe de l'espace à deux dimensions  $(x, y)$  dont la frontière  $\mathfrak{F}D$  se compose d'un nombre fini ou d'une infinité dénombrable de continus  $S_k$  disjoints; on suppose que:  $\delta_k \geq a$  ( $a = \text{const} > 0$ ),  $\delta_k$  étant le diamètre de  $S_k$ . Soit  $\varphi(x, y)$  une fonction continue sur  $\mathfrak{F}D$  et  $f(x, y, z, p, q)$  une fonction finie et continue ainsi que ses dérivées partielles  $f_p, f_q$  dans l'ensemble  $\Sigma: \{(x, y) \in D; |z|, |p|, |q| < +\infty\}$ . Soit  $\mathfrak{C}$  la classe des fonctions absolument continues selon Tonelli dans le domaine  $D$ , ayant la même trace que la fonction  $\varphi(x, y)$  sur  $\mathfrak{F}D$  et donnant une valeur finie de l'intégrale: (1)  $\mathfrak{S}[z] = \int_D f(x, y, z, p, q) dx dy$  ( $p = \partial z / \partial x, q = \partial z / \partial y$ ). On

suppose aussi que l'intégrale (1) soit quasi-régulière positive, c'est-à-dire que: pour  $(x, y) \in D$  et pour tout système de valeurs finies de  $z, p, q, p_0, q_0$ , on a:

$$\mathcal{L}(x, y, z; p_0, q_0; p, q) = f(x, y, z, p, q) - f(x, y, z, p_0, q_0) - (p - p_0) f_p'(x, y, z, p_0, q_0) - (q - q_0) f_q'(x, y, z, p_0, q_0) \geq 0.$$

Si, pour  $(x, y, z, p, q) \in \Sigma$ , on a:  $|f(x, y, z, 0, 0)| \leq M$ ;  $f(x, y, z, p, q) \geq \mu(p^2 + q^2) + N$  ( $\mu, M, N: \text{const} > 0$ ) et l'intégrale (1) est quasi-régulière positive, il existe, dans  $\mathfrak{C}$ , un minimum absolu de l'intégrale (1). Le théorème que nous venons d'énoncer, aussi bien que la méthode de démonstration employée, est très intéressant parce qu'il donne une frappante généralisation d'un théorème bien connu de Lebesgue et de Tonelli. On ne connaît, jusqu'à présent, aucun théorème analogue pour les espaces à plus de deux dimensions, à moins que l'on ne cherche le minimum dans une classe de fonctions plus générale que  $\mathfrak{C}$ . [Morrey, Univ. California, Publ. Math. n. Ser. 1, 1—130 (1943); Stampacchia, ce Zbl. 49, 196] *G. Stampacchia.*

**Bouligand, Georges:** Sur un problème variationnel. *C. r. Acad. Sci., Paris* 242, 975—976 (1956).

Verf. zeigt, daß die Menge der Funktionen  $U$ , die in dem einfach zusammenhängenden Gebiet  $D$  stetige Gradienten mit vorgeschriebenen Werten von  $\overline{\text{grad}^2 U}$  auf der Begrenzung besitzen, so daß das Dirichletsche Integral  $J_D = \iint_D \overline{\text{grad}^2 U} dx dy$  zu einem Minimum wird, nicht kompakt ist (vgl. die frühere Arbeit des Verf. dies. Zbl. 67, 81).

O. Volk.

Glansdorff, P.: Sur le calcul par récurrence de la variation seconde d'une intégrale multiple. Acad. roy. Belgique, Bull. Cl. Sci., V. Sér. 42, 124—129 (1956).

Verf. berechnet nach der von DeDonder stammenden rekursiven Methode in zweckmäßiger Weise die zweite Variation eines  $m$ -fachen Integrals, dessen Integrand  $n$  unabhängige Funktionen nebst deren Ableitungen bis zu einer beliebig hohen Ordnung enthält.

J. Beckert.

### Integralgleichungen. Integraltransformationen:

Steinberg, Jacob: Sur les lois de commutation de certaines transformations intégrales. Ann. Scuola norm. sup. Pisa, Sci. fis. mat., III. Ser. 10, 25—33 (1956).

Die Laplace-Transformation genügt den beiden Gesetzen:  $D \mathfrak{L} f(t) = -\mathfrak{L} t f(t)$ ,  $s \mathfrak{L} f(t) = \mathfrak{L} D f(t) + f(0)$ , abgekürzt:  $D \mathfrak{L} \rightarrow -\mathfrak{L} t$ ,  $s \mathfrak{L} \rightarrow \mathfrak{L} D$ . Es wird nun eine

allgemeine Transformation  $\mathfrak{R} f(t) = \int_a^b K(s, t) f(t) dt$  zugrunde gelegt, deren Kern  $K(s, t)$  analytisch und nicht eine endliche Summe von Produkten einer Funktion von  $s$  und einer Funktion von  $t$  ist, und verlangt, daß  $\mathfrak{R}$  den Gesetzen genügt:  $D \mathfrak{R} \rightarrow \mathfrak{R} \Delta$ ,  $x \mathfrak{R} \rightarrow \mathfrak{R} \xi$ , wo  $\Delta$  und  $\xi$  lineare Differentialoperatoren sind. Als notwendig und hinreichend hierfür erweisen sich die Bedingungen: a)  $\xi$  enthält wirklich die Differentiation, b)  $\Delta \xi - \xi \Delta = 1$ .

G. Doetsch.

Isaacs, G. L.: Comparison theorems for Laplace integrals. J. London math. Soc. 31, 282—300 (1956).

Es sei  $A_\gamma(u) = \frac{1}{\Gamma(\gamma)} \int_0^u (u-t)^{\gamma-1} A(t) dt$  ( $\gamma > 0$ ). Es handelt sich um die Frage,

wann die  $(C, \kappa)$ -Summabilität von (1)  $\int_0^\infty e^{-us_1} A_\alpha(u) du$  die  $(C, \kappa + \mu)$ -Summabili-

tät von (2)  $\int_0^\infty e^{-us_2} A_{\alpha-\mu}(u) du$  einschließt und umgekehrt [ $s_1, s_2$  komplex,  $\kappa \geq 0$ ,

$\mu \geq 0$ ,  $\alpha - \mu \geq -1$  mit besonderer Definition von  $A_\gamma$  für  $0 \geq \gamma \geq -1$ ]. Hierüber werden sechs Sätze bewiesen, zu deren Charakterisierung folgendes Teilresultat zitiert sei: Mit  $\sigma_1 = \Re s_1$ ,  $\sigma_2 = \Re s_2$ ,  $\kappa \geq 0$ ,  $\mu > 0$  sei entweder a)  $\sigma_1 \geq 0$ ,  $\sigma_2 > \sigma_1$  oder b)  $\sigma_1 < 0$ ,  $\sigma_2 \geq 0$  oder c)  $\sigma_1 < \sigma_2 < 0$  und  $\mu$  ganzzahlig. Dann folgt aus der  $(C, \kappa)$ -Summabilität von (1) die  $(C, \kappa + \mu)$ -Summabilität von (2).

G. Doetsch.

Watanabe, Yoshikatsu: Eine Verallgemeinerung der Laplace-Transformation. J. Gakugei Tokushima Univ. natur. Sci. Math. 7, 19—36 (1956).

Verf. behandelt die Konvergenzeigenschaften des zweidimensionalen Laplace-

Integrals  $f(s, t) = \int_0^\infty \int_0^\infty e^{-su-tv} F(u, v) du dv$  in Analogie zu den Verhältnissen beim

gewöhnlichen eindimensionalen Integral und behauptet die Existenz eines eindeutigen Paares von Halbebenen absoluter bzw. einfacher Konvergenz. Dabei übersieht er, daß im allgemeinen nicht ein eindeutiges Paar, sondern eine Schar von „assozierten Konvergenzhalbebenen“ existiert. Das Buch D. Voelker-G. Doetsch. Die zweidimensionale Laplace-Transformation, dies. Zbl. 40, 59, in dem diese Fragen behandelt sind, scheint dem Verf. nicht bekannt zu sein.

G. Doetsch.

**Pinkham, R. S.:** An inversion of the Laplace and Stieltjes transforms utilizing difference operators. Trans. Amer. math. Soc. 83, 1—18 (1956).

Für die Stieltjes-Transformation  $f(x) = \int_0^\infty \frac{\varphi(t)}{x+t} dt$  wird die Umkehrformel angegeben ( $m = [\log n]$ ):

$$\varphi(u) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(\log n)^{m+1}}{m!} (-1)^{n-m} \Delta_{x=0}^n x^m f(xu),$$

wo  $\Delta_{x=0}^n$  die  $n$ -te Differenz der Spanne 1, ausgewertet für  $x=0$ , bedeutet. Die Formel gilt für alle  $u$  der Lebesgueschen Menge von  $\varphi(u)$ . Ihr entspricht folgende Umkehrformel für die Laplace-Transformation  $F(x) = \int_0^\infty e^{-xt} \varphi(t) dt$  mit der Konvergenzabszisse  $\sigma_c$ :

$$\varphi(y) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(\log n)^{m+1}}{m!} \frac{e^{cy}}{y} \int_0^\infty F\left(\frac{x}{y} + C\right) \frac{d^m}{dx^m} (1 - e^{-x})^n dx \quad (C > \sigma_c).$$

*G. Doetsch.*

**Balliccioni, M. A.:** Calcul symbolique: une application du théorème du produit. Bull. Soc. roy. Sci. Liège 25, 570—572 (1956).

Durch Spezialisierung des Faltungssatzes der Laplacetransformation auf  $f_1 = t^m$  ( $m > 0$ , ganz) und  $f_2 = \log t$  folgt

$$\frac{m! (\gamma + \log p)}{p^{m+2}} = A_m \int_0^\infty e^{-pt} t^{m+1} \log t dt - B_m \int_0^\infty e^{-pt} t^{m+1} dt$$

und hieraus

$$A_m = \sum_{k=0}^m (-1)^k \binom{m}{k} \frac{1}{k+1} = \frac{1}{m+1},$$

$$B_m = \sum_{k=0}^m (-1)^k \binom{m}{k} \frac{1}{(k+1)^2} = \frac{1}{m+1} \sum_{k=0}^m \frac{1}{k+1}. \quad F. Selig.$$

**Bhonsle, B. R.:** On two theorems of operational calculus. Bull. Calcutta math. Soc. 48, 95—102 (1956).

Folgende Sätze werden bewiesen: 1. Ist  $\psi(p) = p \int_0^\infty e^{-px} \varphi(x) dx = L\varphi(x)$ ,  $\varphi(p) = Lx^\nu h(x)$ ,  $h(p) = Lf(x)$  und  $p^{2-\lambda} f(p) = Lg(x)$ , dann ist

$$\psi(p) = \frac{\Gamma(\nu+2) \Gamma(\lambda) \Gamma(\lambda-\nu)}{\Gamma(\lambda+2)} p \int_0^\infty s^{\nu-\lambda} {}_2F_1 \left[ \begin{matrix} \lambda-\nu, 2 \\ \lambda+2 \end{matrix}; 1 - \frac{p}{s} \right] g(s) ds$$

wenn  $R(p) > 0$ ,  $R(\nu+2) > 0$ ,  $R(\lambda) > 0$ ,  $R(\lambda-\nu) > 0$ ,  $\lambda$  nicht ganz. Das Integral ist absolut konvergent. 2. Ist  $\psi(p) = Lf(x)$ ,  $f(p) = Lh(x)$ ,  $p^{-2\nu} h(1/p) = Lg(x)$  und  $F(p) = Lx^{1/2-\nu-l} g(x)$ , dann ist

$$\psi(p) = \frac{\Gamma(2\nu+2)}{\Gamma(\nu-l+5/2)} p \int_0^\infty {}_2F_1 \left[ \begin{matrix} 2, 2+2\nu \\ \nu-l+5/2 \end{matrix}; -\frac{p}{t} \right] t^{\nu-5/2} F\left(\frac{1}{t}\right) dt,$$

wenn  $R(p) > 0$ ,  $R(2+2\nu) > 0$ ,  $R(\mu+2\nu) > -1$  und  $t^{\nu-1/2} F(1/t) = O(t^\mu)$  mit  $R(\mu) > -1$  für kleine  $t$  und  $t^{\nu-1/2} F(1/t) = O(t^\varrho)$  mit  $R(2-\varrho) > 1$  für große  $t$ . Die Beweise folgen unmittelbar aus den Sätzen von S. K. Bose (dies. Zbl. 48, 84) bzw. H. Shanker (dies. Zbl. 39, 79) und C. B. Rathie [Proc. nat. Acad. Sci. India 21, 231—249 (1952)]. Die angeführten Beispiele beziehen sich auf die verallgemeinerte  $K$ -Funktion von Bateman, Sonines Polynome und MacRoberts  $E$ -Funktion.

*F. Selig.*

**Head, J. W.:** Approximation to transients by means of Laguerre series. Proc. Cambridge philos. Soc. 52, 640—651 (1956).



Bekanntlich führt die Entwicklung einer Laplace-Transformierten nach Potenzen von  $(s - \beta)/(s + \beta)$  auf eine Entwicklung ihrer Originalfunktion nach Laguerreschen Funktionen. Verf. behandelt diesen Zusammenhang im Hinblick auf praktische Beispiele, wie sie in der Elektrotechnik vorkommen. *G. Doetsch.*

**Macdonald, J. Ross and Malcolm K. Brachman: Linear-system integral transform relations.** Reviews modern Phys. 28, 393—422 (1956).

Ist  $S(i\omega) = P(\omega) + iT(\omega)$  der Frequenzgang eines linearen Systems [d. h.  $S(i\omega) e^{i\omega t}$  der asymptotische Verlauf der Antwort des Systems auf die Eingangsfunktion  $e^{i\omega t}$ ], so bestehen zwischen  $P$  und  $T$  die in der Elektrotechnik nach Kronig und Kramers bzw. nach Bayard benannten Relationen

$$P(\omega) = \frac{2}{\pi} \int_0^\infty \frac{y T(y)}{\omega^2 - y^2} dy, \quad T(\omega) = \frac{2}{\pi} \omega \int_0^\infty \frac{P(y)}{y^2 - \omega^2} dy.$$

Die Arbeit stellt eine ganze Anzahl von solchen und ähnlichen Integralrelationen zusammen, die allerdings vom mathematischen Standpunkt aus immer nur für spezielle Klassen von Funktionen gelten. *G. Doetsch.*

**González Domínguez, A. und R. Scarfiello: Bemerkung über die Formel v. p.  $1/x \cdot \delta = -\frac{1}{2} \delta'$ .** Revista Un. mat. Argentina 17, 53—67 (1956) [Spanisch].

Die im Titel genannte Formel wird in der Quantenelektrodynamik [W. Heitler, The quantum theory of radiation (dies. Zbl. 55, 216), S. 158, 309] mit Hilfe des singulären Integrals mit Poissonschem Kern  $n\pi^{-1}(1+n^2x^2)^{-1}$  gerechtfertigt, so daß es den Anschein hat, als übersetze sie nur eine Eigenschaft des Poissonschen Kerns. Verff. zeigen, daß sie bei richtiger Deutung im Sinne der Distributionstheorie tatsächlich allgemein gilt. Hierzu wird ein allgemeiner singulärer Kern  $g_n(x)$  mit den üblichen Eigenschaften betrachtet, zu dem die Hilbert-Transformierte

$$h_n(x) = \text{V. P.} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{g_n(y) dy}{x-y} = g_n(x) * \text{V. P.} 1/x$$

und der Kern  $K_n(x) = g_n(x) h_n(x)$  gebildet wird. Dann gilt unter der Voraussetzung  $|x h_n(x)| < N$ : Für jede in  $(-\infty, \infty)$  beschränkte Funktion  $f(x)$  mit einer

in  $x=0$  stetigen Ableitung ist  $\lim_{n \rightarrow \infty} \int_{-\infty}^{+\infty} f(x) K_n(x) dx = \frac{1}{2} f'(0)$ . Schreibt man diese Formel in der Gestalt  $\lim_{n \rightarrow \infty} g_n(x) (g_n(x) * \text{V. P.} 1/x) = -\frac{1}{2} \delta'$  und beachtet

$g_n(x) \rightarrow \delta, g_n(x) * \text{V. P.} 1/x \rightarrow \text{V. P.} 1/x$ , so ergibt sich  $\delta * \text{V. P.} 1/x = -\frac{1}{2} \delta'$ . Dieses Resultat wird auf die höheren Ableitungen verallgemeinert. *G. Doetsch.*

**Wintner, Aurel: Cauchy's stable distributions and an „explicit formula“ of Mellin.** Amer. J. Math. 78, 819—861 (1956).

Systematische Untersuchung der Cauchyschen symmetrischen stabilen Verteilungsfunktionen  $F_\alpha(x)$ , die durch (1)  $e^{-t^\alpha} = \frac{2}{\pi} \int_0^\infty F_\alpha(x) \cos tx dx$  ( $\alpha > 0$ )

definiert sind. Hieraus folgt (2)  $F_\alpha(t) = \int_0^\infty e^{-s^\alpha} \cos ts ds = \frac{G(t^{-\alpha})}{t^{1+\alpha}}$ , wo  $G$  die

Laplace-Transformierte von  $\sin s^{1/\alpha}$  ist:  $G(t) = \int_0^\infty e^{-ts} \sin s^{1/\alpha} ds$ . Es ist  $F_\alpha(t) > 0$

für kleine  $t$ , dagegen  $F_\alpha(t) \sim \Gamma(\alpha+1) \sin(\frac{1}{2}\alpha\pi) t^{\alpha-1}$  für  $t \rightarrow \infty$ , so daß bei  $2n < \alpha < 2n+1$  die Funktion  $F_\alpha(t) > 0$  oder  $< 0$  für große  $t$  ist, je nachdem  $n$  gerade oder ungerade ist. Die Anzahl der Nullstellen von  $F_\alpha(t)$  läßt sich auf Grund eines bekannten Satzes über die Nullstellen der Laplace-Transformierten  $G(t)$  abschätzen.  $F_\alpha(t)$  ist für  $0 < \alpha \leq 1$  selbst auch als Laplace-Transformierte darstellbar:

(3)  $F_\alpha(t) = \int_0^\infty e^{-ts} \exp(-\lambda s^\alpha) \sin(\mu s^\alpha) ds$  mit  $\lambda = \cos(\frac{1}{2}\alpha\pi), \mu = \sin(\frac{1}{2}\alpha\pi)$ . Setzt man

dies in (1) ein, vertauscht die Integrationsreihenfolge und beachtet  $\int_0^\infty e^{-tx} \cos sx \, dx = \frac{t}{t^2 + s^2}$ , so ergibt sich  $e^{-t^x} = \int_0^\infty (t^2 + s^2)^{-1} h(s) \, ds$  (Stieltjes-Transformation in etwas veränderter Gestalt) mit  $h(s) = 2\pi^{-1} s \exp(-\lambda s^x) \sin(\mu s^x)$ . Hieraus wiederum erhält man eine Darstellung von  $e^{-t^x}$  als Laplace-Transformierte:

$$(4) \quad e^{-t^x} = \int_0^\infty e^{-ts} f_\alpha(s) \, ds \quad \text{mit} \quad f_\alpha(s) = \frac{2}{\pi} \int_0^\infty \exp(-\lambda x^x) \sin(\mu x^x) \sin sx \, dx.$$

(Anm. d. Ref.: Es gilt eine analoge Formel für  $f_\alpha$ , in der die beiden sin durch cos ersetzt sind.) Dies ist eine andere Gestalt für die Originalfunktion  $f_\alpha$  als die von Pollard (dies. Zbl. 60, 250) angegebene. — Die obigen Umformungen können als ein allgemeines Prinzip formuliert werden, wodurch eine Korrespondenz für eine Funktionaltransformation in eine solche für eine andere Transformation übergeführt wird. — Es sei nun  $\beta = 2\alpha$  ( $0 < \beta < 2$ ). Setzt man in (1) mit  $\beta$  an Stelle von  $\alpha$

die aus (4) für  $t = x^2$  folgende Formel  $e^{-x^\beta} = \int_0^\infty e^{-x^2 s} f_\alpha(s) \, ds$  ein, so ergibt sich durch

Vertauschung der Integrale und Beachtung von  $\int_0^\infty e^{-x^2 s} \cos tx \, dx = \frac{1}{2} \sqrt{\pi} \exp(-t^2/4s^2)$

die Formel (5)  $F_\beta(t) = \frac{1}{2} \sqrt{\pi} \int_0^\infty f_\alpha(s) \exp(-t^2/4s^2) \, ds$ . Diese läßt sich deuten als

„Gaußsche Analyse (stratification)“ der Cauchyschen symmetrischen stabilen Verteilungsfunktionen, d. h. Bestimmung der Gewichtungsfaktoren  $f_\alpha(s) \geq 0$  bei der Darstellung von  $F_\beta$  als Superposition von Gaußkurven verschiedener Streuung. (5) zeigt, daß  $F_\beta(t)$  ( $0 < \beta < 2$ ) nicht bloß positiv, sondern auch abnehmend ist. — Die mit  $F_\alpha(t)$  durch (2) zusammenhängende Funktion  $G(t)$  ist für  $0 < \alpha < 1$  ganz transzendent: (6)  $G(t) = \sum_{k=1}^\infty (-1)^{k-1} \alpha \Gamma(\alpha k) \sin(\frac{1}{2} \pi \alpha k) t^{k-1} / \Gamma(k)$ ; für  $\alpha > 1$  hat

sie die einzige Singularität  $t = 0$ , und (6) stellt eine asymptotische Entwicklung für  $t \rightarrow 0$  dar. Für  $\alpha = 2n$  verschwindet sie identisch, was bedeutet:  $G(t) = O(t^{1/\varepsilon})$  für  $t \rightarrow 0$  ( $\varepsilon$  beliebig  $> 0$ ) und damit  $F_\alpha(t) = O(t^{-1/\varepsilon})$  für  $t \rightarrow \infty$ . In Wahrheit verschwindet aber  $F_\alpha(t)$  exponentiell, wie aus einer von Pólya herrührenden, hier ohne Beweis mitgeteilten Abschätzung ersichtlich ist. — Der Arbeit folgen vier umfang-

reiche Anhänge. I. Die Funktion  $\vartheta_\alpha(x; q) = 1 + 2 \sum_{m=1}^\infty q^{m\alpha} \cos(2\pi m x)$  ( $\alpha > 0$ ,  $0 < q < 1$ ,  $0 \leq x < 1$ ), die mit  $F_\alpha(t)$  so zusammenhängt:  $2\pi \vartheta_\alpha(x; q) = p \sum_{k=-\infty}^\infty F_\alpha(p x + p k)$  mit  $2\pi/p = (-\log q)^{1/\alpha}$ , wird auf ihr asymptotisches Verhalten

untersucht bei festem  $x$  für  $q \rightarrow 1$  und bei festem  $q$  für  $x \rightarrow 0$ . II. Es wird bewiesen: Jede symmetrische  $L$ -Verteilung im Sinne von Khintchine-Lévy ist eine konvexe Verteilung. Dabei heißt eine Verteilung  $\varphi(x)$  mit  $\varphi(-\infty) = 0$ ,  $\varphi(\infty) = 1$ ,  $d\varphi(x) \geq 0$  symmetrisch, wenn  $\varphi(x) = 1 - \varphi(-x)$  ist; konvex, wenn sie für  $0 < x < \infty$  und  $-\infty < x < 0$  eine Dichte hat, die eine monotone Funktion von  $|x|$  ist. III. Eine ausführliche Analyse der  $L$ -Verteilungen. IV. Eine Funktion  $f(q)$  mit der Periode  $2\pi$ , die gerade ist und mod.  $2\pi$  aus einem konvexen und einem konkaven Bogen besteht, heißt glockenförmig. Es wird ein sehr einfacher Beweis dafür gegeben, daß  $\vartheta(q; \varphi)$  für jedes  $0 < q < 1$  glockenförmig ist. Allgemeiner wird gezeigt, daß jede Funktion  $f(q) = \prod_n (1 + 2c_n \cos \varphi + c_n^2)$  mit  $0 \leq c_n \leq 1$ ,  $\sum c_n < \infty$  glockenförmig ist.

G. Doetsch.

Wintner, Aurel: Des distributions symétriques à fonctions caractéristiques convexes. Publ. Inst. Statist. Univ. Paris 5, 43—46 (1956).

Let  $\varphi(t)$ ,  $-\infty < t < \infty$ , be even and continuous and convex for  $0 \leq t < \infty$ ,  $\varphi(0) = 1$ ,  $\varphi(\infty) = 0$ . If  $\int_0^\infty \varphi(t) dt = \infty$  and  $f(x) = \int_0^\infty \varphi(t) \cos(xt) dt$  then  $f(x) \rightarrow \infty$  as  $x \rightarrow 0$ . So,  $\int_0^\infty \varphi(t) dt < \infty$  is necessary and sufficient for the continuity of  $f(x)$  at  $x = 0$ .

M. M. Peixoto.

Gilbert, Walter M.: Completely monotonic functions on cones. Pacific J. Math. 6, 685—689 (1956).

Let  $D$  be a convex cone in euclidean  $n$ -space spanned by  $n$  linearly independent vectors  $x^1, \dots, x^n$  and let  $D^*$  be its dual cone formed by the vectors  $t$  such that  $t \cdot x \geq 0$  for all  $x \in D$  (where  $t \cdot x$  is the scalar product).  $f(x)$  defined in  $D$  is called completely monotonic if

$$\sum_{i_1, \dots, i_n=0}^{m_1, \dots, m_n} \binom{m_1}{i_1} \dots \binom{m_n}{i_n} (-1)^{i_1 + \dots + i_n} f(x + i_1 \delta_1 x^1 + \dots + i_n \delta_n x^n) \geq 0$$

for all  $x \in D$  and  $\delta_i \geq 0$ .  $f(x)$  is completely monotonic if and only if (1)  $f(x) = \int_{D^*} e^{-t \cdot x} d\varphi(t)$ , where  $\varphi$  is an uniquely determined positive bounded measure whose

support is contained in  $D^*$ . The proof is a straight forward reduction by linear transformation to the case when  $D$  is the positive „orthant“:  $x_1 \geq 0, \dots, x_n \geq 0$ , for which, as the author observes, the one-dimensional proof carries over. Next let  $(D_\sigma)$  be a family of overlapping cones so that if any two of them have a point  $\neq 0$  in common, then their intersection contains an open set. Let  $f(x)$  be completely monotonic on each of the  $D_\sigma$ . Then there exists a  $\varphi$  whose support is contained in  $\cap D_\sigma^* = (\cap D_\sigma)^*$ , such that  $f(x)$  admits the representation (1) in every  $D_\sigma$  and  $f(x)$  can be extended to a completely monotonic function on the convex hull of  $\cup D_\sigma$ . Finally the author shows by an example that  $f(x_1, x_2)$  can be completely monotonic on every half-line through the origin in the first quadrant without being completely monotonic there.

J. Horváth.

Weiss, Lionel: A certain class of solutions to a moment problem. Ann. math. Statistics 27, 851—853 (1956).

Let  $\mu_0, \mu_1, \dots, \mu_n$  be given real numbers and  $K$  the subset of  $L^2(-1, 1)$  whose elements  $f(x)$  satisfy  $\int_{-1}^1 x^i f(x) dx = \mu_i$  ( $i = 0, \dots, n$ ). Suppose that  $K_1$  is not

empty. Then there exists an unique  $g(x) \in K$ , for which  $\int_{-1}^1 [g(x)]^2 dx$  is minimal.

[This is an immediate consequence of F. Riesz's lemma (Bourbaki, Eléments de Mathématique, Livre V, Espaces vectoriels topologiques, Chap. V (this Zbl. 66, 353), § 1, Théorème 1) since  $K$  is convex and closed.] The author claims that this minimal  $g(x)$  is of the form  $\max(0, P_n(x))$ , where  $P_n(x)$  is a polynomial of degree  $n$ , but it is not clear why he may assume  $g(x) \geq 0$  unless the hypothesis „ $f(x) \geq 0$  for all  $f(x) \in K$ “ is added. A generalization is indicated.

J. Horváth.

## Funktionalanalysis. Abstrakte Räume:

Klee jr., V. L.: Fixed-point sets of periodic homeomorphisms of Hilbert space. Ann. of. Math., II. Ser. 64, 393—395 (1956).

Es wird bewiesen, daß jede kompakte Teilmenge  $M$  eines unendlichdimensionalen (nicht notwendig separablen) Hilbertraumes  $H$  die Fixpunktmenge eines periodischen Homöomorphismus von  $H$  ist für jede Periode  $n \geq 2$ . Ist  $M$  abgeschlossen,



so gibt es eine dazu homöomorphe Teilmenge, die in derselben Weise als Fixpunktmenge auftritt.  
*G. Köthe.*

**Kasahara, Shouro:** Quelques conditions pour la normalité d'un espace localement convexe. Proc. Japan Acad. **32**, 574—578 (1956).

Für lokalkonvexe Räume  $X_1$  und  $X_2$  (über dem Körper der reellen Zahlen) bezeichne im folgenden:  $\mathcal{L}(X_1, X_2)$  den Vektorraum aller stetigen linearen Abbildungen von  $X_1$  in  $X_2$ ;  $\mathfrak{L}(X_1, X_2)$  einen beliebigen linearen Unterraum von  $\mathcal{L}(X_1, X_2)$ , welcher alle stetigen linearen Abbildungen  $u: X_1 \rightarrow X_2$  von endlichem Rang enthält. Ist  $\mathfrak{S}$  ein System beschränkter Teilmengen von  $X_1$ , so bezeichne  $\mathfrak{L}_{\mathfrak{S}}(X_1, X_2)$  den mit der  $\mathfrak{S}$ -Topologie (= Topologie der gleichmäßigen Konvergenz auf den Mengen aus  $\mathfrak{S}$ ) versehenen Raum  $\mathfrak{L}(X_1, X_2)$ . Für zwei Mengen  $Q_i \subseteq X_i$  ( $i = 1, 2$ ) sei  $\tilde{W}(Q_1, Q_2)$  die Menge aller Abbildungen  $u \in \mathfrak{L}(X_1, X_2)$  mit  $u(Q_1) \subseteq Q_2$ . — Im ersten Teil der Arbeit wird u. a. gezeigt: Es seien  $E, F$  und  $G$  lokalkonvexe separierte Räume;  $\mathfrak{S}$  bzw.  $\mathfrak{T}$  sei ein System beschränkter Teilmengen von  $E$  bzw.  $F$ . Hinreichend für die Normierbarkeit des Raumes  $F$  ist dann folgende Bedingung: für geeignete Unterräume  $\mathfrak{L}(E, F)$  und  $\mathfrak{L}(F, G)$  ist die Abbildung  $(u, v) \rightarrow u \circ v$  von  $\mathfrak{L}_{\mathfrak{T}}(F, G) \times \mathfrak{L}_{\mathfrak{S}}(E, F)$  in  $\mathfrak{L}_{\mathfrak{S}}(E, G)$  stetig. Die gleiche Bedingung ist notwendig, wenn  $\mathfrak{T}$  das System aller beschränkten Teilmengen von  $F$  ist. Dieser Satz verallgemeinert ein von Verf., A. Blair und J. H. Williamson kürzlich gefundenes Resultat, welches den Spezialfall  $E = F = G$  betrifft (dies. Zbl. **67**, 84; **64**, 357; **70**, 111). Der Satz selbst ist eine Folgerung aus einer allgemeineren komplizierten Behauptung, auf deren Wiedergabe wir hier verzichten und aus welcher ein weiteres Ergebnis der zitierten Arbeit von Williamson folgt. — Im zweiten Teil der Arbeit wird ein anderes Resultat des Verf. [Proc. Japan Acad. **32**, 131—134 (1956)] wie folgt verallgemeinert:  $E$  und  $F$  seien lokalkonvexe separierte Räume; weiter sei  $u$  eine Abbildung aus einem Raum  $\mathfrak{L}(E, F)$ ,  $A$  eine beschränkte, konvexe, äquilibrierte, abgeschlossene Teilmenge von  $E$  und  $V$  eine konvexe äquilibrierte Umgebung der 0 in  $F$ . Bildet dann jede Abbildung  $u + w$  mit  $w \in \tilde{W}(A, V)$  den Raum  $E$  eindeutig in  $F$  bzw. eindeutig auf  $F$  ab, so sind die Räume  $E$  und  $u(E)$  bzw. die Räume  $F$  und  $E/\tilde{u}^{-1}(0)$  normierbar. Wegen einer Reihe interessanter Korollare zu diesen Sätzen muß auf die Arbeit selbst verwiesen werden.  
*H. Bauer.*

**Rajkov (Raikov), D. A.:** Bundles of hyperplanes in linear spaces. Doklady Akad. Nauk SSSR **111**, 760—762 (1956) [Russisch].

Sei  $\mathcal{L}$  das System der abgeschlossenen Hyperunterräume eines lokalkonvexen Vektorraumes  $X$  („ $L$ -Raum“) über dem reellen oder komplexen Körper,  $X'$  der zu  $X$  konjugierte Raum. Als Hyperebenen werden die Mannigfaltigkeiten  $x + E$ ,  $x \in X$ ,  $E \in \mathcal{L}$  bezeichnet. Ein System  $S$  von Hyperebenen heißt zentriert, wenn jedes endliche Teilsystem einen nichtleeren Durchschnitt hat; ein maximales zentriertes System heißt Bündel. Ein System  $S$  heißt vollständig, wenn es zu jedem  $E \in \mathcal{L}$  genau eine parallele Hyperebene enthält. Alle Hyperebenen durch einen Punkt  $x_0 \in X$  bilden mithin ein vollständiges Bündel. Jedes vollständige System  $S$  erzeugt auf  $X'$  eine von erster Ordnung homogene Funktion  $s(f) = f(H_f)$ , wobei  $H_f$  die zum Kern  $\{x: f(x) = 0\}$  parallele Hyperebene aus  $S$  ist und  $f(H_f) = f(x)$  für alle  $x \in H_f$ . Umgekehrt erzeugt offenbar jede auf  $X'$  von erster Ordnung homogene Funktion  $s(f)$  ein vollständiges System  $S$  in  $X$ . Es gilt nun der Satz:  $s(f)$  ist linear genau dann, wenn  $S$  ein Bündel ist. — Ist  $X$  speziell ein Banach-Raum, so wird das Bündel  $S$  beschränkt genannt, wenn alle seine Hyperebenen eine feste Kugel treffen.  $X''$  kann als Gesamtheit der beschränkten Bündel aufgefaßt werden. Daraus folgt sehr einfach der Zusammenhang zwischen der Bikompaktheit der Einheitskugel und der Reflexivität. Im allgemeinen  $L$ -Raum ergibt sich als Verallgemeinerung eines Satzes von Šmul'jan: Dafür, daß die konvexe Menge  $A \subseteq X$  schwach vollständig sei, ist notwendig und hinreichend, daß für jedes lineare Funktional  $s(f)$  auf  $X'$  mit

$s(f) \leq \sup_{x \in A} f(x)$  gelte  $s(f) = f(x_0)$  für ein  $x_0 \in A$ . Es folgen Bemerkungen über das System der abgeschlossenen Unterräume mit endlichem Defektindex und über pseudo-beschränkte Bündel (d. h. solche, die ein  $\lambda_U U$  treffen für jede Umgebung  $U$  der 0).

*D. Laugwitz.*

**Luxemburg, W. A. J. and A. C. Zaanen:** Some remarks on Banach function spaces. Nederl. Akad. Wet., Proc., Ser. A 59, 110—119 (1956).

Suivant un travail inédit de G. Lorentz, les AA. considèrent sur un espace mesuré  $\Delta$  une application  $f \rightarrow \varrho(f)$  de l'ensemble  $P$  des fonctions mesurables et  $\geq 0$ , dans l'ensemble des nombres réels  $\geq 0$  (finis ou non), qui soit convexe, positivement homogène, croissante, telle que  $\varrho(f) = 0$  implique que  $f$  soit négligeable; en outre on suppose  $\varrho$  non identiquement nulle ni identiquement  $+\infty$ , et que pour une suite croissante  $(f_n)$  de fonctions de  $P$ , telle que  $f = \sup_n f_n$  presque partout, la condition  $\sup \varrho(f_n) < +\infty$  implique  $\varrho(f) < +\infty$ . Ils considèrent alors l'espace normé  $X$  des classes de fonctions mesurables  $f$  telles que  $\varrho(|f|) < +\infty$ , avec la norme  $\|f\|_X = \|f\| = \varrho(|f|)$ ; on montre (par un raisonnement de G. Lorentz) qu'il y a une constante  $\gamma > 0$  telle que, pour toute suite  $(f_n)$  croissante de fonctions de  $P \cap X$ ,  $\gamma \|\sup f_n\| \leq \lim \|f_n\|$ ; il en résulte que  $X$  est un espace de Banach. Les AA. considèrent alors l'ensemble  $X'$  des fonctions mesurables  $g$  telles que  $\|g\|_{X'} = \sup_{\|f\| \leq 1} \int |fg| d\mu$  soit fini; c'est un espace de Banach pour cette norme; en outre on a  $\gamma \|f\| \leq \|f\|_{X'} \leq \|f\|$  pour toute fonction mesurable. Enfin, on peut définir un sous-espace  $X^\sharp$  de  $X$  formé des fonctions „absolument continues en norme“, c'est-à-dire telles que  $\|f \varphi_E\|$  tende vers 0 avec  $\mu(E)$ , avec une condition analogue „à l'infini“. Les AA. prouvent que lorsque  $X'$  est le dual  $V^*$  d'un sous-espace  $V$  de  $X$  tel que  $g \in V$  et  $|f| \leq |g|$  entraîne  $f \in V$ , alors on a nécessairement  $V = X^\sharp$ . *J. Dieudonné.*

**Trenogin (Trenoguin), V. A.:** On the uniqueness of the representation of functions of many variables by a superposition of functions of a smaller number of variables in Banach spaces. Doklady Akad. Nauk SSSR 110, 184—187 (1956) [Russisch].

L'A. étend certains résultats de L. Ja. Nejšuler (ce Zbl. 34, 68; 47, 118) aux espaces de Banach, en utilisant la notion de dépendance fonctionnelle dans ces espaces, exprimée dans les mêmes termes que dans l'analyse classique.

*G. Marinescu.*

**Helgason, S.:** Multipliers of Banach algebras. Ann. of Math., II. Ser. 64, 240—254 (1956).

Let  $A$  be a commutative Banach algebra. The notion of derived algebra  $A_0$  has been introduced by Helgason (this Zbl. 56, 109). Besides disclosing further properties of  $A_0$ , this article examines some relationships between  $A_0$  and the algebra of multipliers of  $A$ . If  $\Delta$  denotes the spectrum of  $A$  and if  $x \in A$ , then  $\hat{x}$  denotes the evaluation mapping  $h \rightarrow h(x)$  of  $\Delta$  into the complex plane. The mapping  $x \rightarrow \hat{x}$  sends  $A$  onto a subalgebra  $\hat{A}$  of the algebra  $\mathcal{C}(\Delta)$  of all continuous functions vanishing at infinity on  $\Delta$ . If  $\|x\|_\sigma$  denotes the diameter of the spectrum of  $x$ , then  $\|x\|_0 = \sup \{\|xy\| : y \in A \text{ and } \|y\|_\sigma = 1\}$ . Suppose that  $A$  is semi-simple and self-adjoint; if  $A$  also has an approximation of unity, then  $A_0 = \{x \in A : \|x\|_0 < \infty\}$  is a Banach algebra under the norm  $x \rightarrow \|x\|_0$  and  $A_0$  is a subalgebra of  $A$ . Let  $\Delta_0$  denote the spectrum of  $A_0$ . Now follows one of the basic facts employed in this article: if  $A$  is sequentially weakly complete, then  $\hat{A}_0$  coincides with the set of all functions in  $\mathcal{C}(\Delta_0)$  which are integrable with respect to each member of a certain family of measures on  $\Delta_0$ . Accordingly,  $\hat{A}_0$  is an ideal in the algebra  $\mathcal{C}^\infty(\Delta_0)$  of all bounded continuous functions on  $\Delta_0$ . If the product  $\lambda \rightarrow f(\lambda)g(\lambda)$  of two functions is denoted  $f \cdot g$ , then a multiplier of  $A$  is any complex-valued function  $f$  such that  $f \cdot \hat{x} \in A$  whenever  $x \in A$ . The multipliers of  $A$  form the largest algebra of continuous func-

tions on  $\Delta$  in which  $\hat{A}$  is an ideal. Since  $\hat{A}_0$  is an ideal in  $\mathcal{C}^\infty(\Delta_0)$  when  $A$  is weakly sequentially complete, it follows that any member of  $\mathcal{C}^\infty(\Delta_0)$  is then a multiplier of  $A_0$ . The weak completeness condition on  $A$  being removed, some further results can be cited:  $\hat{A}_0$  is an ideal in  $\mathcal{C}(\Delta_0)$ , and it turns out that  $A_0$  coincides with the set of all  $x$  in  $A$  such that  $f \cdot \hat{x} \in A$  for all  $f$  in  $\mathcal{C}(\Delta)$ ; the spectrum  $\Delta_0$  of  $A_0$  can be identified with an open subset of  $\Delta$ , regardless of whether the topologies given  $\Delta$  and  $\Delta_0$  are of the hull-kernel type or Gelfand-weak (in fact,  $\Delta_0$  is the same topological space in either case). Many interesting applications are given. For example, if  $G$  is a locally compact abelian group, then  $[L^1(G)]_0 = L^2(G)$  when  $G$  is compact; otherwise  $[L^1(G)]_0 = \{0\}$  (provided that  $G$  is connected). There is a mistake on p. 240; the author probably intended to define  $\mathcal{C}^\infty(S)$  as the space of continuous bounded complex valued functions on  $S$ . G. L. Krabbe.

**Fujiwara, Kaichirô:** Notes sur les demigroupes topologiques des fonctions continues. I. Math. J. Okayama Univ. 6, 71—76 (1956).

Es sei  $D$  eine topologische multiplikative Halbgruppe mit einem Nullelement. Eine Teilmenge  $M$  von  $D$  heißt rechtsbeschränkt, wenn zu jeder Nullumgebung  $U$  eine Nullumgebung  $V$  existiert mit  $MV \subset U$ . Ist  $\{e_X\}$ ,  $X \in \mathfrak{E}$ ,  $\mathfrak{E}$  ein Filter, ein filtrierendes System auf  $D$  und gilt  $\lim_{\mathfrak{E}} e_X a = a$  für jedes  $a \in D$ , so heißt  $\{e_X\}$  ein Eins von links approximierendes System für  $D$ . Ein abgeschlossenes Rechtsideal  $I$  in  $D$  heißt  $Ud$ -Ideal, wenn in  $I$  ein Eins von links approximierendes System für  $I$  existiert, das überdies rechtsbeschränkt ist. Es sei nun  $E$  ein separierter topologischer Raum,  $G$  eine 0 und 1 enthaltende topologische Halbgruppe mit folgender Eigenschaft: Ist  $\{e_X\}$  filtrierend in  $G$ , so gilt  $\lim e_X a = a$  für  $a \neq 0$  dann und nur dann, wenn  $\lim e_X = 1$ . Mit  $\mathfrak{C} = \mathfrak{C}(E, G)$  werde die Halbgruppe aller stetigen Funktionen auf  $E$  mit Werten in  $G$  bezeichnet mit der Multiplikation  $(fg)(x) = f(x)g(x)$ ; die Topologie auf  $\mathfrak{C}$  wird durch die Basis der offenen Mengen  $V(K_1, \dots, K_n; V_1, \dots, V_n)$  aller  $f \in \mathfrak{C}$  mit  $f(K_i) \subset V_i$ ,  $K_i$  kompakt in  $E$ ,  $V_i$  offen in  $G$ , erklärt.  $\mathfrak{C}_0$  sei eine alle konstanten Funktionen enthaltende Teilhalbgruppe von  $\mathfrak{C}$  mit der induzierten Topologie. In  $\mathfrak{C}_0$  werden nun die  $Ud$ -Ideale bestimmt. Sie sind die Mengen aller Funktionen, die auf gewissen Teilmengen von  $M$  von  $E$  verschwinden. Welche  $M$  dabei auftreten, wird durch eine etwas komplizierte Bedingung angegeben. Es werden zusätzliche Voraussetzungen angegeben, unter denen  $E$  homöomorph dem Raum aller maximalen  $Ud$ -Ideale von  $\mathfrak{C}_0$  wird. G. Köthe.

**Stein, Elias M.:** Interpolation of linear operators. Trans. Amer. math. Soc. 83, 482—492 (1956).

Let  $M$  and  $N$  be two measure spaces with measures  $dm$  and  $dn$  respectively. A family  $T_z$  of linear transformations depending on the complex number  $z$  is called an analytic family of operators of admissible growth if the following conditions are satisfied: 1. for each  $z$ ,  $T_z$  is a linear transformation of simple functions (that is taking only a finite set of non-zero values on sets of finite measure) on  $M$  to measurable functions on  $N$ ; 2. if  $f$  is a simple function on  $M$  and  $g$  a simple function on  $N$ , then  $h(z) = \int T_z(f) g \, dn$  is analytic in  $0 < \operatorname{Re}(z) < 1$  and continuous in  $0 \leq \operatorname{Re}(z) \leq 1$ ; 3.  $\sup_{|y| \leq r} \sup_{0 \leq x \leq 1} \log |h(x + iy)| \leq A e^{ar}$ ,  $a < \pi$  where  $A$  and  $a$  may depend on  $f$  and  $g$ . Let  $w(t, y) = \frac{1}{2} \tan(\frac{1}{2} \pi t) / [\tan^2(\frac{1}{2} \pi t) + \tanh^2(\frac{1}{2} \pi y)] \cosh^2(\frac{1}{2} \pi y)$ . With these notations, the main result of the paper can be stated as follows: Let  $T_z$  be an analytic family of operators of admissible growth defined in the strip  $0 \leq \operatorname{Re}(z) \leq 1$ . Let  $1 < p_1, p_2, q_1, q_2 \leq \infty$  and  $1/p = (1-t)/p_1 + t/p_2$ ,  $1/q = (1-t)/q_1 + t/q_2$ ,  $0 \leq t \leq 1$ . Finally let  $\|T_{iy}(f)\|_{q_1} \leq A_0(y) \|f\|_{p_1}$  and  $\|T_{1+iy}(f)\|_{q_2} \leq A_1(y) \|f\|_{p_2}$  for any simple  $f$ . It is also assumed that  $\log \|A_j(y)\| \leq A e^{a|y|}$ ,  $a < \pi$  for  $j = 0, 1$ . Then we can conclude that  $\|T_t(f)\|_q \leq A_t \|f\|_p$ , where

$$\log A_t = \int_{-\infty}^{\infty} w(1-t, y) \log A_0(y) dy + \int_{-\infty}^{\infty} w(t, y) \log A_1(y) dy.$$



As an important corollary, the author derives a theorem on the extension of linear transformations. Let  $p_1, p_2, q_1, q_2, p$  and  $q$  be as above. Let  $k_1, k_2$  be non-negative measurable functions on  $N$  and  $u_1, u_2$  be similar functions on  $M$ . Let  $T$  be a linear transformation of simple functions on  $M$  to measurable functions on  $N$ . Let  $\|(Tf) \cdot k_j\|_{q_j} < M_j \|f \cdot u_j\|_{p_j}, j=1, 2$ . Let  $k = k_1^{1-t} k_2^t$  and  $u = u_1^{1-t} u_2^t$ . Then  $T$  may be uniquely extended to a linear transformation on functions  $f$  for which  $\|f \cdot u\|_p < \infty$  so that  $\|(Tf) \cdot k\|_q < M_t \|f \cdot u\|_p$ , with  $M_t = M_1^{1-t} M_2^t$ . Applications to the Bochner-Riesz means of multiple Fourier series and integrals and a generalisation of a theorem of Pitt on Fourier series to any bounded orthonormal system of functions are given. The results of this paper may be compared with those found in a recent paper by A. Zygmund (this Zbl. 70, 337) where a fixed operation belonging to several  $L_p$  classes is considered.

V. Ganapathy Iyer.

**Silverman, Robert J.: Means on semigroups and the Hahn-Banach extension property.** Trans. Amer. math. Soc. 83, 222—237 (1956).

This paper is a sequel to earlier investigations of the author (this Zbl. 70, 335).  $V$  will denote a semiordered linear space (shortly ols);  $V$  is said to have the least upper bound property (LUBP), if every subset of  $V$  bounded from above has the least upper bound. A cone  $C$  is said to be sharp if  $x, -x \in C$  imply  $x = 0$ . The following properties are the principal subject of discussion. The pair  $[\mathfrak{G}, V]$  is said to have the HBEP (Hahn-Banach extension property) if  $\mathfrak{G}$  is a semigroup,  $V$  has the LUBP and the positive cone in  $V$  is sharp and if for each aggregate  $[Y, X, G, p, f]$  where (i)  $Y$  is a linear space with linear subspace  $X$ , (ii)  $G$  is a representation of  $\mathfrak{G}$  on  $Y$  (i. e. homomorphic or anti-homomorphic image of  $\mathfrak{G}$  into the set of distributive operators on  $Y$ ) such that  $gx \in X$  for  $x \in X, g \in G$ , (iii)  $p$  is a positive homogeneous subadditive function from  $Y$  to  $V$  such that  $p(gy) \leq p(y)$  for each  $y \in Y, g \in G$ , (iv)  $f$  is a distributive function from  $X$  to  $V$  such that  $f(x) \leq p(x), f(gx) = f(x)$  for each  $x \in X, g \in G$ , — there exists a distributive extension  $\bar{F}$  of  $f$  with domain  $Y$  such that  $\bar{F}(y) \leq p(y), \bar{F}(gy) = \bar{F}(y)$  for  $y \in Y, g \in G$ . The pair  $[\mathfrak{G}, V]$  where  $\mathfrak{G}$  and  $V$  are as above has the monotone extension property (MEP) if for every collection  $[Y, C, X, G, f]$  where (i)  $Y$  is an ols with cone  $C$ , (ii)  $X$  is an ordered subspace of  $Y$  such that  $(y + X) \cap C$  is non-void for each  $y \in Y$ , (iii)  $G$  is a representation of  $\mathfrak{G}$  on  $Y$  such that  $g \in G, x \in X, z \in C$  imply  $gz \in C, gx \in X$ , (iv)  $f$  is a monotone distributive function from  $X$  to  $V$  such that  $f(gx) = f(x)$  for  $x \in X, g \in G$ , — there exists a monotone distributive extension  $F$  of  $f$ , with domain  $Y$  and such that  $F(gy) = F(y)$  for all  $y \in Y, g \in G$ . It is proved that  $[\mathfrak{G}, V]$  has the HBEP if and only if it has the MEP. Then sufficient conditions for the MEP are given, based upon the following concepts. Let  $C$  be a cone of an ols  $S$  and let  $U$  be a linear subspace of the algebraic dual  $S^\#$  of  $S$ , then the cone induced by  $C$  on  $U$  is the set  $\{f: f \in U, f(v) \geq 0 \text{ for } v \in C\}$ . The cone  $K$  is called reproducing if each element is the difference of two elements of the cone; a cone  $K$  in a normed space is called normal if  $\inf \{\|v_1 + v_2\|: v_1 \in K, v_2 \in K, \|v_1\| = \|v_2\| = 1\} > 0$ . Given a semigroup  $G$ , let us consider the Banach space  $M(G)$  of bounded real valued functions on  $G$ , then the right invariant mean on  $G$  is a bounded linear functional  $\mu$  on  $M(G)$ , of norm 1, such that  $\mu(e) = 1$  ( $e$  is the function equal to 1 on  $G$ ) and  $\mu(a_f) = \mu(f)$  for each  $a \in G$ ,  $a_f$  being the element of  $M(G)$  defined by  $(a_f)(s) = f(as)$  ( $s \in G$ ). The left means are defined similarly; the invariant means are means both right and left invariant. The following theorems are proved. (A) Let  $W$  be an ols with a reproducing cone  $K'$ , let  $V$  be a linear subspace of  $W^\#$  and let the cone  $K$  induced by  $K'$  on  $V$  be sharp and inducing on  $V$  an order relation with LUBP, let, finally,  $\mathfrak{G}$  be a semigroup with an invariant mean. Then  $[\mathfrak{G}, V]$  has the MEP. (B) Let  $V$  be a normed ols with the LUBP and with the sharp cone  $K$  which is normal and closed in the norm topology; if  $\mathfrak{G}$  is a semigroup with an invariant mean, then  $[\mathfrak{G}, V]$  has the MEP. (C) Let  $Y$  have the LUBP,

let it be normed and have sharp cone with an interior point (for the norm topology) and such that the interval  $\{v: -u \leq v \leq u\}$  is bounded. If  $\mathcal{G}$  is as in (B), then  $[\mathcal{G}, V]$  has the MEP. Some converse results are proved.  $\mathcal{G}$  has an invariant mean if  $[\mathcal{G}, V]$  has the MEP and one of the following hypotheses are satisfied: (1)  $V$  is as in (A) and  $K \neq 0$ , (2)  $V$  is as in (B) and  $K \neq 0$ , (3)  $V$  is as in (C). There are proved also other theorems of this type and some examples are considered. Next the author discusses the problem of continuity of the extended function  $F$ . If  $V$  is a linear topological space and an ols then  $V$  is said to be locally restricted if each neighbourhood  $U$  of 0 contains a neighbourhood  $W$  of 0 such that  $a, b \in W$  implies that the interval  $a \leq x \leq b$  is in  $U$ . It is proved: (D) Let  $Y$  be a linear topological space, let  $V$  be locally restricted, let  $p$  be a positively homogeneous subadditive function from  $Y$  to  $V$ , and let  $F$  be a distributive function from  $Y$  to  $V$  satisfying  $F(y) \leq p(y)$ , then  $F$  is continuous. (E) Let  $Y$  be a linear topological space and an ols, let  $V$  be locally restricted with cone  $K$ , let  $F$  be a monotone distributive function from  $Y$  to  $V$  mapping an open set of  $Y$  into  $K$ , then  $F$  is continuous. (F) Let  $Y$  and  $V$  be as in (E) and let the cone in  $Y$  contain interior points, then every monotone distributive function from  $Y$  to  $V$  is continuous. The paper ends with applications to the case when  $V$  is the space of reals or the space of bounded functions.

A. Alexiewicz.

**Dye, H. A. and R. S. Phillips:** Groups of positive operators. Canadian J. Math. 8, 462—486 (1956).

Gegeben sei eine Gruppe  $G$  und ein lokalkompakter topologischer Raum  $X$ . Es bezeichne  $C_0 = C_0(X)$  bzw.  $L = L(X)$  den Vektorraum aller auf  $X$  definierten, stetigen, reellen Funktionen, die im Unendlichen verschwinden bzw. einen kompakten Träger besitzen.  $C_0$  und  $L$  werden mit der Norm der gleichmäßigen Konvergenz versehen. Ferner bezeichne  $P$  die Menge aller stetigen reellen Funktionen  $p$  auf  $X$  mit  $0 < \inf_{x \in X} p(x) \leq \sup_{x \in X} p(x) < +\infty$ . Hinsichtlich der Multiplikation von Funktionen ist  $P$  eine abelsche Gruppe. Gegenstand der Arbeit ist dann die Untersuchung der Darstellungen von  $G$  durch positive beschränkte Operatoren auf  $C_0$  (oder auch  $L$ ), also durch stetige lineare Abbildungen von  $C_0$  in sich, welche nicht-negative Funktionen in nicht-negative Funktionen überführen. Einen speziellen Typus solcher Darstellungen gewinnt man folgendermaßen:  $G$  wirke auf  $X$  als Operatorengruppe derart, daß jedes  $\sigma \in G$  einen Homöomorphismus  $x \rightarrow x\sigma$  von  $X$  auf sich definiert. Bezeichnet dann  $T_\sigma f$  für ein  $f \in C_0$  und ein  $\sigma \in G$  die Funktion  $x \rightarrow f(x\sigma)$ , so ist  $T_\sigma$  ein positiver beschränkter Operator auf  $C_0$  (sogar eine Isometrie!) und  $\sigma \rightarrow T_\sigma$  eine Darstellung von  $G$ . Man nennt sie einen Fluß von  $G$  in  $C_0$ . Ausgangspunkt der Untersuchungen ist nun das Resultat: Zu jeder Darstellung  $\sigma \rightarrow U_\sigma$  von  $G$  durch positive beschränkte Operatoren auf  $C_0$  gibt es einen Fluß  $\sigma \rightarrow T_\sigma$  von  $G$  in  $C_0$  und eine Abbildung  $\sigma \rightarrow \theta_\sigma$  von  $G$  in  $P$  derart, daß  $U_\sigma = L_{\theta_\sigma} T_\sigma$  ist, wenn hierbei  $L_{\theta_\sigma}$  die linksseitige Multiplikation mit der Funktion  $\theta_\sigma$  bezeichnet.  $\sigma \rightarrow T_\sigma$  und  $\sigma \rightarrow \theta_\sigma$  sind durch  $\sigma \rightarrow U_\sigma$  eindeutig bestimmt. Es gilt (a)  $\theta_{\sigma\tau}(x) = \theta_\tau(x\sigma) \cdot \theta_\sigma(x)$  für beliebige  $x \in X$  und  $\sigma, \tau \in G$ . Ist umgekehrt  $\sigma \rightarrow T_\sigma$  ein Fluß von  $G$  in  $C_0$  und  $\sigma \rightarrow \theta_\sigma$  eine Abbildung von  $G$  in  $P$  mit der Eigenschaft (a), so ist  $\sigma \rightarrow L_{\theta_\sigma} T_\sigma$  eine Darstellung von  $G$  durch positive beschränkte Operatoren auf  $C_0$ . Zwei Darstellungen  $\sigma \rightarrow U_\sigma^{(1)}$  und  $\sigma \rightarrow U_\sigma^{(2)}$  werden  $P$ -äquivalent genannt, wenn für ein  $p \in P$  und alle  $\sigma \in G$  gilt:  $L_p U_\sigma^{(1)} L_{p^{-1}} = U_\sigma^{(2)}$ . Hiermit gleichwertig ist die Forderung:  $\sigma \rightarrow U_\sigma^{(1)}$  und  $\sigma \rightarrow U_\sigma^{(2)}$  gehören zum gleichen Fluß und für die zugehörigen Abbildungen  $\sigma \rightarrow \theta_\sigma^{(i)}$  von  $G$  in  $P$  ( $i = 1, 2$ ) gilt  $\theta_\sigma^{(1)}(x) [p(x)/p(x\sigma)] = \theta_\sigma^{(2)}(x)$  für alle  $x \in X$ . Wenn speziell  $\sigma \rightarrow U_\sigma^{(1)}$  ein Fluß ist und  $\theta_\sigma^{(2)} = \theta_\sigma$  gesetzt wird, so muß also sein: (b)  $\theta_\sigma(x) = p(x)/p(x\sigma)$  für alle  $\sigma \in G$  und  $x \in X$ . Hierdurch ergibt sich nun eine Beziehung zur Cohomologie-Theorie abstrakter Gruppen von Eilenberg-MacLane (dies. Zbl. 29, 340). Es wirke nämlich  $G$  auf  $X$  in der oben beschriebenen speziellen Weise.

Man nenne Cokette jede Abbildung  $\sigma \rightarrow \theta_\sigma$  von  $G$  in  $P$ , Cozyklus jede Cokette mit der Eigenschaft (a) und Corand jede Cokette der Gestalt (b). Dann bilden die Cozyklen und Coränder hinsichtlich der Multiplikation je eine abelsche Gruppe  $Z^1(G, P)$  und  $B^1(G, P)$ . Die Quotientengruppe  $H^1(G, P) = Z^1(G, P)/B^1(G, P)$  ist die erste Cohomologiegruppe von  $G$  mit Koeffizienten aus  $P$  im Sinne von Eilenberg-MacLane. Zwischen den Elementen von  $H^1(G, P)$  und den Klassen  $P$ -äquivalenter Darstellungen von  $G$  durch zu einem festen Fluß gehörige positive beschränkte Operatoren auf  $C_0$  besteht somit eine eindeutige Beziehung. Es wird dann die Frage untersucht, wann ein Cozyklus ein Corand ist. Hierzu wird ein Cozyklus  $\sigma \rightarrow \theta_\sigma$  beschränkt genannt, wenn eine Zahl  $M > 0$  existiert derart, daß  $M^{-1} < \theta_\sigma(x) < M$  für beliebige  $\sigma \in G$  und  $x \in X$  gilt. Es wird u. a. bewiesen, daß für eine auf  $X$  ergodisch operierende Gruppe  $G$  jeder beschränkte Cozyklus ein Corand ist. Sodann wird für eine Gruppe  $G$  von Homöomorphismen von  $X$  eine andere Interpretation von  $H^1(G, P)$  gegeben, nämlich mit Hilfe der Automorphismen der Gruppe aller regulären positiven beschränkten Operatoren auf  $C_0$  mit positivem Inversen, die zu dem durch  $G$  definierten Fluß gehören. In diesem Zusammenhang ergibt sich, daß der Begriff der  $P$ -Äquivalenz nicht so einschränkend ist, wie man zunächst meinen möchte. Für eine stark stetige Darstellung  $\sigma \rightarrow U_\sigma$  einer topologischen Gruppe  $G$  wird schließlich die Äquivalenz der adjungierten Darstellung zur adjungierten Darstellung des zur Ausgangsdarstellung gehörigen Flusses untersucht und gezeigt, daß die Verhältnisse hier einfacher liegen als bei der entsprechenden Frage für die Darstellungen selbst. Abschließend sei noch eine Folgerung aus dem einleitend zitierten Satz erwähnt, der den Ausgangspunkt der Arbeit bildet. Es sei speziell  $G$  die additive Gruppe der reellen Zahlen und  $X$  eine differenzierbare Mannigfaltigkeit. Ist dann  $t \rightarrow U_t$  eine stark stetige Darstellung von  $G$  durch positive beschränkte Operatoren auf  $C_0$ , so sei  $A$  der durch  $Af = \lim_{t \rightarrow 0} [(U_t - I)/t] f$  definierte „infinitesimale Operator“. Nach be-

kannten Sätzen ist  $A$  abgeschlossen und sein Definitionsbereich  $D(A)$  dicht in  $C_0$ . Unter der zusätzlichen Voraussetzung, daß alle auf  $X$  definierten reellen Funktionen der Klasse  $C^\infty$  mit kompaktem Träger in  $D(A)$  liegen, wird gezeigt: Es existiert eine stetige Funktion  $\beta$  und ein stetiges kontravariantes Vektorfeld  $\alpha$  auf  $X$  derart, daß für alle  $f \in D(A)$  gilt  $Af = \alpha \nabla f + \beta f$  ( $\nabla = \text{Gradient}$ ). Dies erklärt das bekannte Phänomen, wonach die Lösung einer Diffusionsgleichung keine einparametrische Gruppe von positiven beschränkten Operatoren auf dem natürlichen Funktionenraum definiert, dafür aber ersatzweise einparametrische Halbgruppen auftreten. — Bezüglich weiterer Einzelheiten, insbesondere eines im Anhang konstruierten Beispiels, welches zeigt, daß die Summe zweier infinitesimaler Operatoren mit in  $C_0$  dichtem Durchschnitt der Definitionsbereiche im allgemeinen keine stark stetige Halbgruppe von Operatoren erzeugt, muß auf die Arbeit selbst verwiesen werden. *H. Bauer.*

**Braconnier, Jean:** *L'analyse harmonique dans les groupes abéliens. II.* Enseignement math., II. Sér. 2, 257—273 (1956).

In den beiden abschließenden Paragraphen seines Überblicks (Teil I in dies. Zbl. 70, 26) berichtet Verf. über die Transformation von Fourier-Laplace (Resultate von A. Beurling, G. Mackey, J. Riss, L. Schwartz) und über die Darstellung von Gruppen und deren Algebren durch Operatorgruppen in Banach- und Hilbert-Räumen. Die neueren Resultate von F. Bruhat und Harish-Chandra werden hierbei nicht berücksichtigt. Teil I und II dieser Arbeit sind zusammen in Buchform erschienen als Monographies de l'Enseignement mathématique, No. 5. Genève, Institut de Mathématiques 1957. 50 p. 7 francs; \$ 1,75. *H. Bauer.*

**Sebastião e Silva, J.:** *Le calcul différentiel et intégral dans les espaces localement convexes. II.* Atti Accad. naz. Lincei, Rend., Cl. Sci. fis. mat. natur., VIII. Ser. 21, 40—46 (1956).

L'A. continue ses recherches commencés dans la première note au même titre



(ce Zbl. 72, 130). Il définit les différentielles et les dérivées d'ordre supérieur (toujours par rapport à une famille d'ensembles bornés), établit la formule de Taylor et donne une généralisation du théorème de Schwarz. Ensuite il donne des relations entre divers types de fonctions analytiques, parmi lesquelles citons la suivante: la classe des fonctions analytiques par rapport à la famille  $(B)$  d'ensembles bornés coïncide avec la classe des fonctions  $G$ -analytiques et localement bornées par rapport à  $(B)$  [la fonction  $f$  est dite localement bornée par rapport à  $(B)$  si pour tout  $x$  appartenant au domaine de définition, il existe  $\lambda \neq 0$ , tel que  $f$  soit bornée dans  $x + \lambda B$ ,  $B \in (B)$ ; l'A. ne précise pas si  $\lambda$  dépend ou non de  $B$ ]. G. Marinescu.

**Ehrenpreis, Leon:** Solutions of some problems of division. III: Division in the spaces  $\mathcal{D}'$ ,  $\mathcal{H}$ ,  $Q_A$ ,  $\mathcal{O}$ . Amer. J. Math. 78, 685—715 (1956).

[Teil I und II, siehe dies. Zbl. 56, 106 und 64, 115.] Die Arbeit, die viele Begriffe und Resultate aus früheren Noten des Verf. benutzt, kann nur kurz durch einen Auszug aus der Einleitung charakterisiert werden. Das allgemeine Divisionsproblem lautet: Es sei  $D$  ein Differentialoperator mit konstanten Koeffizienten und  $T$  eine Distribution; gibt es eine Distribution  $S$  so, daß  $DS = T$  ist? Wenn  $T$  speziell eine Distribution endlicher Ordnung ist, so wurde die Lösbarkeit früher nachgewiesen. In der vorliegenden Arbeit wird die vollständige Lösung des Divisionsproblems gegeben und sogar der Fall behandelt, daß  $D$  ein partieller Differential-Differenzen-Operator ist. Zunächst erhebt sich die Frage: Welche Distributionsräume haben die Eigenschaft, daß die Transformation  $f \rightarrow Df$  den Raum auf sich selbst abbildet? Während früher nur gezeigt wurde, daß der Raum der Distributionen endlicher Ordnung und der Raum der unbeschränkt differenzierbaren Funktionen diese Eigenschaft hat, wird jetzt dasselbe für den Raum  $\mathcal{D}'$  aller Distributionen bewiesen. Die genannten Probleme lassen sich übersetzen in Probleme bezüglich der Fourier-Transformierten des Duals des fraglichen Raumes. Sobald die Topologie des Raumes der Fourier-Transformierten explizit angeschrieben ist, läßt sich mit den früheren Methoden des Verf. zeigen, daß die Transformation  $Dh \rightarrow h$  eine stetige lineare Abbildung von  $D\mathcal{D}$  auf  $\mathcal{D}$  ist. Dann folgt aus dem Hahn-Banachschen Satz, daß die Gleichung  $DS = T$  für jedes  $T \in \mathcal{D}'$  lösbar ist. Die teilweise in der Überschrift genannten Räume, für die das Divisionsproblem gelöst wird, sind:  $\mathcal{H}$  der Raum der ganzen Funktionen;  $Q_A$  der Raum der ganzen Funktionen von einer Ordnung  $\leq A$ ;  $\mathcal{O}$  der Raum der formalen Potenzreihen;  $\mathcal{B}$  der Raum der konvergenten Potenzreihen;  $\mathcal{L}$  der Raum der unbeschränkt differenzierbaren Funktionen. G. Doetsch.

**Prodi, Giovanni:** Tracce sulla frontiera delle funzioni di Beppo Levi. Rend. Sem. mat. Univ. Padova 26, 36—60 (1956).

Soit  $\Omega$  un ouvert de  $R^n$  de frontière  $\Gamma$  variété de dimension  $n - 1$ , les cartes locales étant lipschitziennes;  $W(\Omega)$  est l'espace des distributions  $T$  sur  $\Omega$  telles que  $\partial T / \partial x_i \in L^2(\Omega)$  (espace de Beppo-Levi, cf. par ex. Demy-Lions, ce Zbl. 65, 99). L'A. caractérise l'espace image de  $W(\Omega)$  dans l'application qui à  $u \in W(\Omega)$  fait correspondre ses valeurs sur  $\Gamma$ . A l'aide de cartes locales il se ramène au cas d'un demi-espace et dans ce cas le problème est facile à résoudre par transformation de Fourier. Ce même problème a été résolu indépendamment par N. Aronszajn [Conference on partial differential equations, Univ. Kansas, Summer 1954, 77—93 (1955)] qui a en outre donné une définition directe, sans usage de cartes, de l'espace image. J. L. Lions.

**Bonsall, F. F. and G. E. H. Reuter:** A fixed-point theorem for transition operators in an  $(L)$ -space. Quart. J. Math., Oxford, II. Ser. 7, 244—248 (1956).

An abstract  $(L)$ -space is a Banach lattice [G. Birkhoff, Lattice Theory (this Zbl. 33, 101), p. 246] whose norm is additive on the elements of the positive cone:  $\|x + y\| = \|x\| + \|y\|$ . A contraction operator on an abstract  $(L)$ -space, is a bounded linear operator  $P$  such that for all  $x$  in the positive cone,  $Px \geq 0$  and

$\|Px\| \leq \|x\|$ . If  $Q_n = (P + P^2 + \dots + P^n)/n$ ,  $u \geq 0$  and  $\{n_k\}$  is a strictly increasing sequence of natural numbers, it is shown that (i)  $\liminf_{k \rightarrow \infty} Q_{n_k} u$  exists and is a fixed point under  $P$ , (ii) if  $\limsup_{k \rightarrow \infty} Q_{n_k} u$  exists, it is also a fixed point under  $P$ . The proofs make no use of the concrete representation. *J. E. L. Peck.*

**Leray, Jean:** La théorie des points fixes et ses applications en analyse. Univ. Politec. Torino, Rend. Sem. mat. 15, 65—74 (1956).

Vgl. dies. Zbl. 49, 88.

**Ogasawara, Tôzîrô and Shûichirô Maeda:** A generalization of a theorem of Dye. J. Sci. Hiroshima Univ., Ser. A 20, 1—4 (1956).

Soient  $M$  et  $N$  des algèbres de von Neumann sans projecteurs minimaux. Soit  $\varphi$  un isomorphisme du groupe  $M_U$  des opérateurs unitaires de  $M$  sur  $N_U$ . On suppose que  $\varphi$  est aussi un isomorphisme pour les structures uniformes déduites de la topologie faible. Alors  $\varphi$  admet un prolongement  $\Phi: M \rightarrow N$ , somme directe d'un \*-isomorphisme linéaire et d'un \*-isomorphisme antilinéaire. Ce théorème, dû à Dye pour  $M$  et  $N$  finies (ce Zbl. 50, 114) est étendu ici au cas général en modifiant la fin de la démonstration de Dye.

*J. Dixmier.*

**Turumaru, Takasi:** On the direct product of operator algebras. IV. Tôhoku math. J., II. Ser. 8, 281—285 (1956).

[Parts I, II, III voir ce Zbl. 49, 87; 51, 343; 57, 343]. Soient  $A$  une  $C^*$ -algèbre commutative à unité,  $B$  et  $C$  deux sous- $C^*$ -algèbres contenant 1. L'A. donne diverses conditions pour que  $A \simeq \mathcal{O}(X \times Y)$ ,  $B \simeq \mathcal{O}(X)$ ,  $C \simeq \mathcal{O}(Y)$ ,  $X$  et  $Y$  étant deux espaces compacts, et  $\mathcal{O}(X)$  l'espace des fonctions continues sur  $X$ . Il envisage aussi le cas non commutatif en liaison avec sa théorie des produits tensoriels de  $C^*$ -algèbres (ce Zbl. 49, 87).

*J. Dixmier.*

**Schreiber, M.:** Unitary dilations of operators. Duke math. J. 23, 579—594 (1956).

A contraction (proper contraction) is an operator  $A$  on a Hilbert space  $H$  whose bound does not exceed (is less than) 1. Sz.-Nagy and Schäffer showed that to each contraction  $A$  on  $H$  there are a new Hilbert space  $K$  containing  $H$  (with projection operator  $P$ ) and a unitary operator  $U$  on  $K$  such that  $A^n x = PU^n x$  for all  $x \in H$  and all non-negative integers  $n$ . The operator  $U$  is called a unitary dilation of  $A$ . The minimal unitary dilations of  $A$  are unique except for unitary equivalence. The author exhibits the structure of unitary dilations of proper contractions and of projection operators. For a separable space of dimension  $\alpha$ , the minimal unitary dilations of all proper contractions are equivalent to the direct sum of  $\alpha$  copies of the bilateral shift operator (which associates with each sequence  $\{f(n)\}_{n=-\infty}^{\infty}$  in  $l_2$  the sequence  $\{f(n-1)\}_{n=-\infty}^{\infty}$ ). The author also shows that, in any Hilbert space, any two projection operators having unitarily equivalent dilations are themselves unitarily equivalent. Spectral measure methods are used.

*L. F. Meyers.*

**Allen, H. S.:** The intersection of the Köthe-Toeplitz maximal matrix rings. Quart. J. Math., Oxford, II. Ser. 7, 277—279 (1956).

Es sei  $\alpha$  ein vollkommener Folgenraum,  $\Sigma(\alpha)$  der maximale Matrizenring aller  $\alpha$  in sich abbildenden unendlichen Matrizen. Es wird gezeigt, daß der über alle vollkommenen  $\alpha$  gebildete Durchschnitt  $\bigcap \Sigma(\alpha)$  ein Matrizenring ist, dessen Elemente die Form  $B + D$  haben,  $B = (\beta_{ik})$  eine unendliche Matrix mit nur endlich vielen  $\beta_{ik} \neq 0$ ,  $D$  eine Diagonalmatrix, deren Elemente dem Betrage nach beschränkt sind. Bedeutet  $G(\alpha)$  die Gruppe der Matrizen aus  $\Sigma(\alpha)$ , die eine zweiseitige Reziproke haben, so ist auch  $\bigcap G(\alpha)$  eine Gruppe. Ihre Elemente sind alle Matrizen, die über Eck in eine endliche quadratische invertierbare Matrix und eine Diagonalmatrix mit Diagonalelementen  $0 < m \leq \delta_{ii} \leq M$  zerfällt.

*G. Köthe.*

Éskin, G. I.: On a minimum problem in space  $L$ . Doklady Akad. Nauk SSSR 111, 547—549 (1956) [Russisch].

Die von R. Rado (dies. Zbl. 70, 113) stammende Verallgemeinerung eines die linearen Systeme mit unendlich vielen Unbekannten betreffenden Satzes von W. Rogosinski (dies. Zbl. 64, 371) wird auf den Raum  $L(a, b)$  der in  $(a, b)$  summierbaren Funktionen auf folgende Weise übertragen: sind die Funktionen  $x_\nu(t) \in L(a, b)$  ( $\nu = 1, 2, \dots, m$ ) linear unabhängig, so gibt es in der Menge  $M(a, b)$  der beschränkten meßbaren Funktionen  $\alpha(t)$ , die den Bedingungen  $\int_a^b x_i(t) \alpha(t) dt = c_i$ , ( $i = 1, 2, \dots, m$ ), genügen, eine Funktion  $\gamma(t)$ , deren absoluter Betrag höchstens  $m + 1$  verschiedene Werte  $\varrho_1 > \varrho_2 > \dots > \varrho_n$  annimmt; diese Funktion  $\gamma(t)$  läßt sich eindeutig so bestimmen, daß es für jede Funktion  $\alpha(t)$  aus  $M(a, b)$  ein  $\nu$  ( $\nu = 0, 1, \dots, n - 1$ ) gibt, das die Bedingungen

$$\alpha(t) = \gamma(t) \text{ fast überall falls } t \in E(|\gamma(t)| \geq \varrho_\nu), \\ \varrho_\nu \geq \text{vrai max } |\alpha(t)| > \varrho_{\nu+1} \text{ falls } t \in E(|\gamma(t)| < \varrho_\nu)$$

erfüllt.

J. Tagamlizki.

Sikkema, P. C.: Conditions for applicability of linear differential operators of infinite order with polynomial coefficients. Nederl. Akad. Wet., Proc., Ser. A 59, 181—189 (1956).

Verf. untersucht die Anwendbarkeit des unendlichen Differentialoperators  $F(x, D) = \sum_{n=0}^{\infty} (a_{0n} + a_{1n}x + \dots + a_{kn}x^k) D^n$  auf ganze Funktionen einer gegebenen Ordnung und eines gegebenen Typs. Die Koeffizienten sind Polynome eines von  $n$  unabhängigen festen Grades  $k$ . Der Operator  $F(x, D)$  heißt anwendbar auf die ganze Funktion  $y(x)$ , wenn die entstehende Reihe für jeden endlichen Wert von  $x$  konvergiert. Zunächst werden entsprechende Sätze für den Fall  $k = 0$  angegeben, wobei wesentlich die Ergebnisse aus dem Lehrbuch des Verf. benutzt werden (dies. Zbl. 51, 344). Anschließend werden für den allgemeinen Fall ausführlich notwendige und hinreichende Bedingungen hergeleitet, wobei die verschiedenen Typen gesondert behandelt werden.

H.-J. Kowalsky.

Višik (Vishik), M. I. and L. A. Ljusternik (Lusternik): Stabilization of solutions of certain differential equations in Hilbert space. Doklady Akad. Nauk SSSR 111, 12—15 (1956) [Russisch].

Es sei  $\mathfrak{H}$  der Hilbertsche Raum mit dem Skalarprodukt  $(u, v)$  und der Norm  $\|u\|$ ;  $\{A(t)\}$ ,  $t_0 \leq t < \infty$ , ist die Menge der linearen Operatoren mit gemeinsamem (von  $t$  unabhängigem) Definitionsgebiet  $\Omega$  ( $\Omega \in \mathfrak{H}$ ). Die Vektorfunktionen  $u(t)$ ,  $v(t)$  haben Werte in  $\Omega$ . Es wird der folgende Satz bewiesen: Die Lösung  $u(t)$  der Gleichung  $du(t)/dt + A(t)u(t) = f(t)$ ,  $u(t_0) = u_0$  ( $d/dt$  bedeutet die starke Ableitung) stabilisiert sich gegen die Lösung  $v(t)$  der Gleichung  $A(t)v(t) = f(t)$  [d. h.:  $\|u(t) - v(t)\|_{t \rightarrow \infty} \rightarrow 0$ ], wenn folgende Voraussetzungen erfüllt sind:

$$(A(t)u, u) \geq \gamma(t)(u, u), \gamma(t) > 0; \|A'_i(t)v\| \leq \delta(t)\|A(t)v\|,$$

wobei  $\gamma$  und  $\delta$  einer der drei Bedingungen genügen:

$$1. \gamma(t) \geq c > 0; \varepsilon(t) \stackrel{\text{df}}{=} \frac{1}{\gamma(t)} \|f'(t)\| + \frac{\delta(t)}{\gamma(t)} \|f(t)\| = O(t^{-r}), r > 0.$$

$$2. \gamma(t) = O(t^{-r_1}), 0 < r_1 < 1; \varepsilon(t) = O(t^{-r}), r > 0.$$

$$3. \gamma(t) = O(t^{-1}); \varepsilon(t) = O(t^{-r}), r > 0.$$

K. Maurin.

Lax, P. D.: A stability theorem for solutions of abstract differential equations, and its application to the study of the local behavior of solutions of elliptic equations. Commun. pure appl. Math. 9, 747—766 (1956).

Es sei  $\mathfrak{H}$  der Hilbertsche Raum mit dem Skalarprodukt  $(u, v)$  und der Norm  $\|u\|$ . Der Verf. beweist folgende drei Sätze: 1. Voraussetzungen: Es sei  $A$  ein solcher



linearer Operator in  $\mathfrak{H}$ , daß es zu ihm eine unendliche Folge  $\lambda_n \rightarrow -\infty$  gibt mit  $\|(A - \lambda)^{-3}\| \leq d^{-1}$  für  $\lambda_n = \operatorname{Re} \lambda$  ( $d$  positive Konstante). Es sei  $u(t)$  eine Abbildung von  $0 < t < \infty$  in das Definitionsgebiet von  $A$ .  $A u(t)$  sei stark stetig und  $u(t)$  besitze die starke Ableitung  $du/dt$ ;  $u(t)$  genüge weiter der Ungleichung  $\|du/dt - A u\| \leq K \|u\|$ ,  $0 < K < d$ . Behauptung: wenn  $u$  nicht identisch verschwindet, dann gibt es solche positive Konstanten  $a, b$ , daß  $\|u(t)\| \geq a e^{-bt}$ . 2. Vor.:  $A$  sei ein gleichmäßig elliptischer Operator zweiter Ordnung;  $L \stackrel{\text{df}}{=} \{u \in L^2(\Omega_n) : A u = 0\}$  wo  $\Omega_n$  ein beschränkter Bereich mit glatter Berandung ist.  $A_1$  sei ein elliptischer Operator und  $L_1$  sein Nulleigenraum. Beh.: Zu jedem  $\varepsilon > 0$  gibt es ein  $\delta > 0$  mit der Eigenschaft: wenn die  $C^2(\Omega_n)$ -Norm der Koeffizienten von  $A - A_1$  kleiner als  $\delta$  ist, dann ist der Winkel zwischen den Räumen  $L$  und  $L_1$  kleiner als  $\varepsilon$ . 3. Es seien  $A$  ein elliptischer Operator zweiter Ordnung und  $\Omega_n^1 \supset \Omega_n^2$  zwei einfach zusammenhängende Gebiete. Damit jede Lösung von  $A u = 0$  in  $\Omega_n^2$  sich auf jeder kompakten Untermenge gleichmäßig durch Lösungen von  $A u = 0$  in  $\Omega_n^1$  approximieren läßt, ist notwendig und hinreichend, daß die Lösungen von  $A u = 0$  eindeutig durch (Cauchy-) Anfangswerte längs einer beliebigen glatten Hyperfläche bestimmt sind.

K. Maurin.

Mizohata, Sigeru: Le problème de Cauchy pour les équations paraboliques. J. math. Soc. Japan 8, 269—299 (1956).

Verf. löst das Cauchyproblem für  $p$ -parabolische Gleichungen für eine große Klasse von Hilberträumen der Distributionen. Definitionen: Die Gleichung

$$(1) \quad \partial^m u(x, t) / \partial t^m = \sum_{k_0 \leq m-1} a^k(x, t) D^k u(x, t) + f(x, t)$$

$[k = (k_0, k_1, \dots, k_n), D^k = \partial^{|k|} / \partial t^{k_0} \partial x_1^{k_1} \dots \partial x_n^{k_n}, |k| = k_0 + \dots + k_n]$  heißt  $p$ -parabolisch (im Sinne von Petrowski) in  $0 \leq t \leq T \leq \infty$ , wenn  $1^\circ$  es ein ganzes positives  $p$  gibt, so daß  $k_0 p + k_1 + \dots + k_n \leq m p$ ;  $2^\circ$  Realteile der Wurzeln der Gleichung

$$g(\lambda) \stackrel{\text{df}}{=} \sum_{(k)_p} a^k(x, t) \prod_{\nu=1}^{k_n} (i \xi_\nu) \lambda^{k_0} - \lambda^m = 0,$$

wo  $\sum_{(k)_p}$  die Summation für  $k_0 p + k_1 + \dots + k_n = m p$  bedeutet, kleiner als  $-\delta$  ( $\delta > 0$ ) werden, wenn  $|\xi| = 1$  ( $\xi$  reell) und  $x \in E^n, t \in [0, T]$ ,  $a^k(\cdot, t), \partial^p a(\cdot, t) / \partial t^p \in (B)_x$  (d. h. beliebig oft differenzierbar und beschränkt). Der Raum  $D^p$  ist die Vervollständigung von  $D(E^n)$  (beliebig oft differenzierbare Funktionen mit kompakten Trägern) in der Norm  $\|u\|_p^2 \stackrel{\text{df}}{=} \int_{E^n} |\hat{u}(\xi)|^2 (1 + \xi^2)^p d\xi$ ,

$p \in E^1$ , wo  $\xi^2 = \xi_1^2 + \dots + \xi_n^2$ ,  $\hat{u}$  die Fouriertransformierte von  $u$ .  $D_q$  ( $q$  ganz) ist der Hilbertsche Raum der  $U \stackrel{\text{df}}{=} (u_1, \dots, u_m)$ , wobei  $u_i \in D^{q-(i-1)p}$  ( $i = 1, \dots, m$ ).  $\|U\|_{D_q}^2 \stackrel{\text{df}}{=} \sum_{i=1}^m \|u_i\|_{q-(i-1)p}^2$ . Man beweist, mit Hilfe der Theorie der Evolutionsgleichungen von T. Kato (vgl. dies. Zbl. 52, 126) den folgenden Existenzsatz: Wenn man (1) in der Gestalt der Evolutionsgleichung  $(1') \quad dU(t)/dt = A(x, t, D) U(t) + F(t)$  schreibt mit  $U_0 \in D_{q,p}$ ,  $F(t) \in D_{q+p}$  und starkstetig (in  $t$ ),  $q = 0, \pm 1, \dots$ , dann gibt es eine einzige Lösung  $U(t)$  von  $(1')$ :  $U(t) \in D_{q+p}$ ,  $U(0) = U_0$ , die starkstetig in der Norm  $\|\cdot\|_{D_q}$  ist. Es gilt ein analoger Satz für temperierte Distributionen, d. h.:  $(1+r^2)^{-k} U_0, (1+r^2)^{-k} F(t), (1+r^2)^{-k} U(t) \in D_{p+q}, k$  ganz  $> 0$ .

K. Maurin.

Bykov, Ja. V. (J. V.): On the problem of existence of characteristic vectors of non-linear operators. Doklady Akad. Nauk SSSR 111, 265—268 [Russisch].

Soit  $H$  un espace hilbertien réel séparable,  $\{e_k\}$  un système orthonormal complet dans  $H$  et  $A$  un opérateur non linéaire dans  $H$ , continu par rapport aux suites dans la topologie faible. On suppose l'existence d'une fonctionnelle  $B$ , telle que pour tout

$m$  fixe  $\frac{\partial B(h_m)}{\partial c_k} = \langle A(h_m), e_k \rangle$ , où  $h_m$  sont les fonctions  $h_m = \sum_{k=1}^m c_k e_k$ , définies

sur la sphère  $\sum_{k=1}^m c_k^2 = c$ . Dans ces conditions, l'A. énonce les théorèmes suivants: l'équation  $\lambda \varphi = A \varphi + f$  a au moins une valeur propre; si, en plus,  $A(0) = 0$  et il existe  $\lim_{m \rightarrow \infty} B(h_m)$  pour  $h_m \xrightarrow{f} 0$ , alors l'opérateur  $A$  admet au moins un ensemble dénombrable de vecteurs propres. Ces théorèmes sont appliqués ensuite aux équations intégrales.

G. Marinescu.

**Ljubovin, V. D.: Zur Spektralzerlegung selbstadjungierter Operatoren.** Uspechi mat. Nauk 11, Nr. 4 (70), 139—142 (1956) [Russisch].

In dieser Arbeit wird ein neuer Beweis für die Spektralzerlegung eines selbstadjungierten Operators  $A$  angegeben. Der Beweis benutzt die Zusammenhänge zwischen der Theorie der selbstadjungierten Operatoren eines Hilbert-Raumes und der Theorie der linearen halbgeordneten Räume ( $K$ -Räume). Insbesondere wird dabei der Satz über die Integraldarstellung der Elemente eines  $K$ -Raumes herangezogen. (Siehe hierzu z. B. L. V. Kantorovič, B. Z. Vulich, A. G. Pinsker: Halbgeordnete Gruppen und lineare halbgeordnete Räume; dies. Zbl. 43, 332.) Der hier benutzte  $K$ -Raum ist der folgende: Mit  $(A)'$  werde die Menge aller beschränkten selbstadjungierten Operatoren bezeichnet, die mit  $A$  vertauschbar sind. Ferner sei  $(A)''$  die Menge aller beschränkten selbstadjungierten Operatoren, die mit jedem Operator aus der Menge  $(A)'$  vertauschbar sind.  $(A)''$  ist dann ein stark abgeschlossener Ring. Eine teilweise Ordnung wird in  $(A)''$  dadurch eingeführt, daß man diejenigen Elemente aus  $(A)''$  als positiv bezeichnet, die im Sinne der Operatorentheorie positive Operatoren sind. Mit dieser Ordnung ist  $(A)''$  ein  $K$ -Raum mit Einheit; als Einheit wird hier der identische Operator gewählt. Der Beweis für den Spektralsatz wird zunächst für beschränkte Operatoren  $A$  ausgeführt und dann auf unbeschränkte Operatoren erweitert.

H. Krumhaar.

**Gonshor, Harry: Spectral theory for a class of non-normal operators.** Canadian J. Math. 8, 449—461 (1956).

Soit  $D(t) = (a_{ij}(t))$  une matrice carrée d'ordre  $n$  fini fonction mesurable bornée de  $t$ . Soit  $D_m(t)$  la matrice carrée d'ordre  $mn$  obtenue en répétant la matrice  $D(t)$   $m$  fois le long de la diagonale principale ( $m$  peut être infini). Soit  $H$  un espace hilbertien, intégrale hilbertienne (au sens de von Neumann) d'espaces  $H(t)$  de dimension  $mn$ . Soit  $(e_i(t))$  un champ mesurable de bases orthonormales. Soit  $A(t)$  l'opérateur de

matrice  $D_m(t)$  par rapport à  $(e_i(t))$  dans  $H(t)$ . Soit enfin  $A = \int_{\mathbb{R}} A(t) dt$ . Les opérateurs  $A$  ainsi construits sont, à quelques détails près, ceux que l'A. appelle  $J_n$ -opérateurs. Définition équivalente: l'algèbre de von Neumann engendrée par  $A$  et  $A^*$  contient au plus  $n$  projecteurs non nuls orthogonaux et équivalents. Les  $J_2$ -opérateurs sont les opérateurs binormaux de A. Brown (ce Zbl. 55, 339). L'A. construit leur théorie spectrale de la manière suivante: soient  $Z$  le plan complexe, et  $Q$  l'ensemble des triplets  $(\lambda, \mu, a)$  où  $\lambda, \mu \in Z$ , où  $\lambda \geq \mu$  (pour un ordre total convenablement choisi sur  $Z$ ), et où  $a$  est réel  $> 0$ ; alors  $A$  est intégrale hilbertienne sur  $Z \cup Q$  d'opérateurs  $A(t)$ , où  $A(t) = \begin{pmatrix} \lambda & 0 & \cdot \\ 0 & \lambda & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot \end{pmatrix}$  si  $t = \lambda \in Z$ , et  $A(t) = \begin{pmatrix} \lambda & a & \cdot \\ 0 & \mu & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot \end{pmatrix}$  si  $t = (\lambda, \mu, a) \in Q$ .

Il y a un théorème d'unicité pour cette représentation, utilisant une notion de multiplicité.

J. Dixmier.

**Wolf, Frantisek: Perturbation by changes one-dimensional boundary conditions.** Nederl. Akad. Wet., Proc., Ser. A 59, 360—366 (1956).

Seien  $A$  und  $B$  zwei selbstadjungierte Differentialoperatoren, die sich nur durch eine eindimensionale Randbedingung unterscheiden, und ihre Resolventenmengen  $\varrho A, \varrho B$  mögen den reellen Punkt  $\mu$  gemeinsam haben. Es existiert dann stets ein  $x_0$  und ein reelles  $\gamma$ , so daß  $(\mu - A)^{-1} - (\mu - B)^{-1} = x_0(\cdot, x_0)/\gamma$ . Ist  $\zeta \in \varrho A$ , so gilt

$(\mu - \zeta)^{-1} - (\mu - B)^{-1} = [(\mu - \zeta)^{-1} - (\mu - A)^{-1}] \cdot \{I - [(\mu - \zeta)^{-1} - (\mu - A)^{-1}]^{-1} \cdot x_0(\cdot, x_0)/\gamma\}$  oder auch wenn  $\zeta \in \sigma_c A$  und  $x_0 \in \mathfrak{R}(\zeta - A)$  ( $\sigma A$  Spektrum von  $A$ ,  $\sigma_p A$  Punktspektrum,  $\sigma_c A$  kontinuierliches Spektrum,  $\mathfrak{R}$  Rang). Der einzige nicht verschwindende Punkt im Spektrum von  $C(\zeta, \gamma) = [(\mu - \zeta)^{-1} - (\mu - A)^{-1}]^{-1} x_0(\cdot, x_0)/\gamma$  ist ein einfacher Eigenwert von  $g(\zeta, \gamma) = ((\mu - \zeta)/\gamma) \int [(\mu - \lambda)/(\zeta - \lambda)] \|E(d\lambda) x_0\|^2$  mit dem Eigenvektor  $v = \int [(\mu - \lambda)/(\zeta - \lambda)] E(d\lambda) x_0$  und

$$f(\zeta) = \int (\lambda - \mu) \|E(d\lambda) x_0\|^2 + \int [(\mu - \lambda)^2/(\zeta - \lambda)] \|E(d\lambda) x_0\|^2 - \gamma = 0$$

bedeutet, daß  $\zeta$  ein einfacher Eigenwert von  $B$  mit  $v$  als Eigenvektor ist.  $f(\zeta)$  ist abnehmend in  $\zeta$  in jedem Intervall von  $\varrho A$  und jedes Intervall von  $\varrho A$  enthält mindestens einen einfachen Eigenwert von  $B$ . Ist nun  $\zeta \in \sigma_p B$ , dann ist entweder  $\zeta \in \sigma_p A$  oder  $f(\zeta) = 0$  und  $\zeta$  ist ein einfacher Eigenwert von  $A$  und  $v$  ist Eigenvektor von  $B$  und  $C(\zeta, \gamma)$ . Durch Vertauschung von  $A$  und  $B$  folgt sofort, daß jeder mehrfache Eigenwert von  $A$  auch Eigenwert von  $B$  ist. Ist  $(a, b) \subseteq \varrho A$ ,  $\mu \in (a, b)$ ,  $\lim_{\alpha \rightarrow 0+} \|E(a - \alpha, a) x_0\|^2/\alpha = \delta_1 > 0$  und  $\lim_{\alpha \rightarrow 0+} \|E(b, b + \alpha)\|^2/\alpha = \delta_2 > 0$ , dann

gibt es einen einfachen Eigenwert innerhalb  $(a, b)$  und  $\zeta(\gamma)$  wächst von  $a$  nach  $b$  an, wenn  $\gamma$  von  $\infty$  nach  $-\infty$  fällt. Aus diesen Sätzen folgt sofort: Ist ein gewöhnlicher Differentialoperator bei einer Menge von Randbedingungen beschränkt, so auch bei jeder Menge (F. Rellich). Aus dem „special mapping theorem“ [N. Dunford, Spectral theory, Trans. Amer. math. Soc. **54**, 185—217 (1943) und Bull. Amer. math. Soc. **49**, 637—651 (1943)] folgt mit  $A$  und  $B$  beschränkt und selbstadjungiert  $B = A + x_0(\cdot, x_0)/\gamma$ . Existiert eine Zerlegung des Hilbertraumes  $\mathfrak{H} = \mathfrak{H}_0 + \mathfrak{H}_1$  und dementsprechend  $A = A_0 + A_1$ ,  $B = B_0 + B_1$  mit  $B_0 = A_0 + x_0(\cdot, x_0)/\gamma$ , so ist  $B_1 = A_1$  und  $A_0$  hat ein einfaches Spektrum. In diesem Fall existiert eine isometrische Abbildung von  $\mathfrak{H}_0$  auf  $L^2(\sigma)$  und  $A_0$  wird in den Operator  $x$  übergeführt. Dieser tiefliegende Satz gestattet leider nur qualitative, jedoch keine quantitativen (numerischen) Aussagen. Die von O. K. Friedrichs (dies Zbl. **31**, 312) erhaltenen Resultate können ergänzt werden: Ist  $z$  ein  $m$ -facher Eigenwert von  $A$ , dann ist seine Vielfachheit als Eigenwert von  $B$  entweder  $m - 1$  oder  $m$  und nur wenn  $f(z) = 0$ , ist auch  $m + 1$  möglich. Ändert sich ein Eigenwert bei Abänderung von  $\gamma$  nicht, so liegt der zugehörige Eigenraum nicht in  $\mathfrak{H}_0$  und umgekehrt. Eine endlichdimensionale Störung läßt die Vielfachheit des kontinuierlichen Spektrums invariant.

F. Selig.

**Browder, Felix E.: Eigenfunction expansions for formally self-adjoint partial differential operators. II.** Proc. nat. Acad. Sci. USA **42**, 870—872 (1956).

Diese Note ist der zweite Teil der unter demselben Titel erschienenen Abhandlung des Verf. (vgl. dies. Zbl. **71**, 98). Es wird eine hinreichende Bedingung gegeben dafür, daß die Eigendistributionen von  $(A - \lambda B) \xi(\lambda) = 0$  lokalintegrierbare Funktionen seien. Es wird nur verlangt, daß die Operatoren  $A, B$  lokal beschränkte und integrierbare Koeffizienten haben und ein sogenanntes elliptisches Paar bilden (wegen der Kompliziertheit dieser Bedingung geben wir sie nicht an). Wenn außerdem die Koeffizienten  $(m + j)$ -mal stetig differenzierbar sind, dann sind die Eigenfunktionen Elemente von  $C^{m+j-1}$ .

K. Maurin.

**Rechlickij (Rekhlitsky), Z. I.: On the stability of solutions of certain linear differential equations with a lagging argument in the Banach space.** Doklady Akad. Nauk SSSR **111**, 29—32 (1956) [Russisch].

L'A. applique la méthode de M. A. Rutman (ce Zbl. **64**, 119) aux équations de la forme  $dy/dt - A(t)y(t-a) = x(t)$ ,  $y(t) = \varphi(t)$  pour  $t \leq 0$  où  $A(t)$  sont des opérateurs linéaires et compacts dans un espace de Banach, tels que la fonction  $t \rightarrow A(t)$  soit dérivable et  $\lim_{t \rightarrow \infty} \|A'(t)\| = 0$ . La condition nécessaire et suffisante pour que l'équation ait une solution bornée pour toutes les fonctions continues et bornées  $x(t)$  et  $\varphi(t)$  est que l'équation  $1 - ze^{\lambda z} = 0$  ait toutes ces racines à l'extérieur



du cercle  $|z| \leq 1$ , pour tout  $\lambda$ , valeur propre d'un opérateur  $A = \lim_{t_n \rightarrow \infty} A(t_n)$ .  
G. Marinescu.

**Domb, C. and M. E. Fisher:** On iterative processes and functional equations. Proc. Cambridge philos. Soc. 52, 652—662 (1956).

Es wird zur Lösung der oft untersuchten Funktionalgleichung (1)  $F(x) = \chi(x) F[\theta(x)]$  im Falle (2)  $\chi(1) = 1$ ,  $\theta(1) = 1$ ,  $\theta'(1) < 1$  der Iterationsprozeß  $u_0 = F(1)$ ,  $v_0 = u_0 x$ ,  $u_{n+1} = \varphi(u_n, v_n) = u_n \chi(v_n/u_n)$ ,  $v_{n+1} = \psi(u_n, v_n) = u_n \chi(v_n/u_n) \theta(v_n/u_n)$  angegeben. Weitere praktische Betrachtungen beschäftigen sich mit Transformationen von Funktionalgleichungen (1), falls gewisse der Bedingungen (2) nicht erfüllt sind, in solche derselben Gestalt, wo diese schon gelten sowie in welchen die Ordnung höher als 1 ist, z. B.  $\theta'(1) = 0$  gilt. Die Behauptung der Verf. auf S. 653, Z. 17—22, daß  $\varphi(u, u) \equiv u$ ,  $\psi(u, u) \equiv u$  [oder, wie sie es ausdrücken  $\varphi(u, v) - u = 0$ ,  $\psi(u, v) - v = 0$  für  $u = v$  immer erfüllt sind] damit äquivalent wäre, daß  $\varphi(u, v)$ ,  $\psi(u, v)$  homogen mit Exponent 1 [und  $\varphi(1, 1) = 1$ ,  $\psi(1, 1) = 1$ ] sind, ist falsch, wie die Beispiele  $\varphi(u, v) = u + v^2 - u^2$ ,  $\psi(u, v) = \frac{1}{2} \log [\frac{1}{2}(a^u + a^v)]$  usw. zeigen. Dies beeinflußt aber die weiteren Betrachtungen glücklicherweise nicht.  
J. Aczél.

**Golab, S.:** Zum distributiven Gesetz der reellen Zahlen. Studia math. 15, 353—358 (1956).

Falls die reellen Funktionen  $f(x, y)$  und  $g(x, y)$  für alle reellen  $x$  und  $y$  definiert und überall mindestens einmal stetig differenzierbar sind, sowie zwei Konstanten  $a$  und  $e$  existieren, daß für alle  $x$  gilt:  $f(x, a) = f(a, x) = g(e, x) = x$  und  $g(a, x) = g(x, a) = a$ , wenn ferner die Gleichung  $f(b, x) = c$  für alle  $b$  und  $c$  nach  $x$  lösbar ist und für alle Tripel  $x, y, z$  das „linksseitige distributive Gesetz“  $g[f(x, y); z] = f[g(x, z); g(y, z)]$  zutrifft, dann erfüllt die streng monotone Funktion  $\omega(x) = g_y(x, a)$  mit ihrer Inversen  $\Omega$  die Gleichungen:

$$(I) \quad f(x, y) = \Omega[\omega(x) + \omega(y)] \quad \text{und} \quad g(x, y) = \Omega[\omega(x) \omega(y)];$$

dies wird in einem eleganten und überaus klar dargestellten Beweis gezeigt. — Das System (I) interessiert im Zusammenhang mit einem Problem aus der Algebra der geometrischen Objekte, wo hinreichende Bedingungen dafür gesucht werden, daß zwei Funktionen  $f$  und  $g$  eine Automorphie bezüglich der Zahlenaddition und -multiplikation darstellen.  
H. Töpfer.

**Paggi, Manlio:** Funzioni che soddisfano ai più comuni teoremi di addizione. Archimede 8, 222—226 (1956).

Verf. befaßt sich mit den differenzierbaren Lösungen der Funktionalgleichungen  $f(x+y) = f(x)g(y) + f(y)g(x)$ ;  $g(x+y) = g(x)g(y) - f(x)f(y)$  bzw.  $h(x+y) = [h(x) + h(y)]/[1 - h(x)h(y)]$ , die von sehr vielen Verf. behandelt und vollständig gelöst wurden, von denen wir N. H. Abel [Oeuvres complètes I, Christiania 1881, 1—10], V. Alaci [Bull. Sci. Techn. Inst. polytechn. Timișoara, 11, 174—178 (1944)], T. Anghelutza [Mathematica, Timișoara, 19, 19—22 (1942)], R. Caccioppoli [Giorn. Mat. Battaglini 66, 69—74 (1928)], O. Hájek [Časopis 80, 481—485 (1955)], O. Haupt [J. reine angew. Math. 186, 58—64 (1944)], M. Krafft (dies. Zbl. 21, 23), T. Levi-Civita [Rend. Accad. naz. Lincei 22, 181—183 (1913)], P. Montel (dies. Zbl. 60, 200), W. F. Osgood (Lehrbuch der Funktionentheorie, Leipzig 1912), H. W. Pexider [Arch. der Math. und Phys. 6, 45—59 (1903)], P. Stäckel [Rend. Accad. naz. Lincei 22, 392—393 (1913)], S. Stephanos [Rend. Circ. Mat. Palermo 18, 360—362 (1904)], J. Tannery (Introduction à la théorie des fonctions d'une variable, Paris 1886), L. Vietoris (dies. Zbl. 60, 191), R. Volpi [Giorn. Mat. Battaglini 41, 33—46 (1903)] erwähnen. Einige Druckfehler stören das Lesen. Die Lösungen  $f(x) = \pm \frac{1}{2} i e^{ax}$ ,  $g(x) = \frac{1}{2} e^{ax}$ ;  $f(x) = g(x) = 0$  werden wegen einer verfehlten Betrachtung auf S. 225 außer acht gelassen.  
J. Aczél.

## Praktische Analysis:

Wilkes, M. V.: Solution of linear algebraic and differential equations by the long-division algorithm. Proc. Cambridge philos. Soc. **52**, 758—763 (1956).

Die Auflösung eines gestaffelten Gleichungssystems läßt sich in die Form eines Divisionsalgorithmus bringen. Dieser kann auf die Dreieckszerlegung einer allgemeinen Matrix angewandt werden. Es folgt eine Anwendung des Verfahrens auf die Näherungslösung einer Differentialgleichung zweiter Ordnung mittels Differenzenquotienten, wobei zwei benachbarte Anfangswerte gegeben sind. Das Verfahren läßt sich verfeinern und auch auf allgemeinere Differentialgleichungen ausdehnen.

R. Zurmühl.

Popov, B. S.: Sur la résolution générale d'une classe d'équations. Acad. roy. Belgique, Bull. Cl. Sci., V. Sér. **42**, 1107—1109 (1956).

Vorläufige Mitteilung über eine Möglichkeit expliziter Darstellung der Wurzeln von Gleichungen der Form  $\sum_{i=1}^n [f(x)]^{a_i} - A = 0$  als Funktionen der als rational anzunehmenden Exponenten  $a_i$ , der Größe  $A$  und eines für den zu behandelnden Fall zu wählenden Parameters.

E. J. Nyström.

Slugin (Sluguin), S. N.: A Chaplyguin method of unlimited applicability for ordinary differential equations of order  $n$ . Doklady Akad. Nauk SSSR **110**, 936—939 (1956) [Russisch].

L'A. applique sa méthode (ce Zbl. **64**, 372), à l'équation  $y^{(m)} = f(t, y, y', \dots, y^{(m-1)})$ ,  $y^{(k)}(t_0) = \alpha_k$  ou  $B \leq \partial f / \partial y^{(k)} \leq A_k$  ( $k = 0, 1, \dots, m-1$ ).

G. Marinescu.

Douglas, A. S.: On the Sturm-Liouville equation with two-point boundary conditions. Proc. Cambridge philos. Soc. **52**, 636—639 (1956).

Die Eigenwertaufgabe  $P''(x) + [g(x) + \lambda f(x)] P(x) = 0$ , mit  $P(x_0) = 0$  und einer Randbedingung bei  $x = x_n$  wird numerisch durch ein Iterationsverfahren behandelt. Integriert man von  $x = x_0$  aus, so wird für  $P = P(x, \lambda)$  an einer Stelle  $X$

mit  $x_0 \leq X \leq x_n$  hergeleitet:  $P^2(x) \left[ \frac{\partial (P'/P)}{\partial \lambda} \right]_{x=X} = \int_{x_0}^X f P^2 dx$ . Ersetzt man

hier die Ableitungen durch Differenzenquotienten, so kann man aus einem Fehler  $\Delta \lambda$  angenähert auf den Fehler in der zugehörigen Eigenfunktion schließen und auch eine Verbesserung eines Näherungswertes für einen Eigenwert bestimmen. Anwendung auf die radiale Wellengleichung ( $f = 1$ ,  $P(x_n) = 0$ ) und Bericht über Erfahrungen an der EDSAC-Anlage in Cambridge.

L. Collatz.

Stiefel, E.: On solving Fredholm integral equations. Applications to conformal mapping and variational problems of potential theory. J. Soc. industr. appl. Math. **4**, 63—85 (1956).

Zur iterativen Lösung der Operatorgleichung (1)  $Ax = k$  ( $x$  gesucht,  $k$  gegeben in einem Raum  $R$ ,  $A$  linearer Operator) wird eine Folge von Elementen (2)  $x_n =$

$\sum_{j=1}^n \alpha_j A^{j-1} k$  gebildet. Mit Hilfe der Polynome  $R_n(\lambda) = 1 - \sum_{j=1}^n \alpha_j \lambda^j$  lassen sich dann die Residuen  $r_n = k - Ax_n$  in der Form schreiben  $r_n = R_n(A) k$  (wie bei E. Stiefel, dies. Zbl. **66**, 367) und es wird untersucht, wie man bei Kenntnis von Schranken für die Eigenwerte von  $A$  geeignete Residualpolynome  $R_n$  angeben kann und welche Vorteile die Verwendung von Orthogonalpolynomen hat. Diese Theorie wird angewendet auf eine Integralgleichung zur Bestimmung der Greenschen Funktion  $G(x, y)$  der Potentialtheorie; mit  $\gamma(s) = \partial G / \partial n_s = \partial \ln r / \partial n_s - \tau(s)$  (übliche Bezeichnungen, Bogenlänge  $s$  der Randkurve  $C$ , die stetig gekrümmt sei,  $r$  Abstand,  $n_s$  innere Normale) folgt für  $\tau(s)$  die für Iteration sehr geeignete Gleichung  $\tau(s) = -\frac{1}{\pi} \oint \frac{\partial \ln r}{\partial n_s} \tau(t) dt + k(s)$ . Aus  $\tau(s)$  gewinnt man auch leicht die konforme Abbildung des von  $C$  umschlossenen Gebietes auf eine Kreisscheibe. Beispiel

für einen nahezu kreisförmigen und einen länglichen Bereich. Pragers Integralgleichung für die Potentialströmung um einen Körper wird für eine Ellipse mit Achsenverhältnis 1:10 behandelt. — Im zweiten Teil wird (1) für einen selbstadjungierten Operator  $A$  in einem Hilbertschen Raume mit Skalarprodukt  $[x, y]$  mit Hilfe des Variationsproblems  $F = [A x, x] - 2[x, k] = \text{Min.}$  behandelt.  $x$  wird angenähert durch  $x_n$  nach (2) mit  $x_j$  als freien Parametern. Es wird ein Iterationsschema  $N_n = [r_n, r_n]$ ,  $q_n = [A r_n, r_n]/N_n - p_n$ ,  $p_n = N_n q_{n-1}/N_{n-1}$ ,  $\Delta r_n = r_{n+1} - r_n = (p_n \Delta r_{n-1} - A r_n)/q_n$  entwickelt. Es läßt sich auch unmittelbar die Abnahme des Funktionalen  $F$  bei jedem einzelnen Schritt angeben:  $\Delta F_n = -N_n/q_n$ . Anwendungen auf Gleichungssysteme „mit schlechter Kondition“ (ill-conditioned equations) und das Neumannsche Problem (2. Randwertaufgabe der Potentialtheorie), wobei zunächst eine singuläre Integralgleichung auftritt; durch eine Modifikation der Methode (Benutzung eines Hilfsraumes) lassen sich jedoch hier und bei der Prager'schen Gleichung singuläre Integrale vermeiden. L. Collatz.

Kislicyn, S. G.: Über die Bestimmung einer periodischen Lösung der Gleichung  $y' = f(x, y)$  nach der Newtonschen Methode. Izvestija Akad. Nauk Kazach. SSR, Ser. Mat. Mech. 5 (9), 101—104 (1956) [Russisch].

Es sei  $f(x, y)$  eine stetige Funktion mit beschränkter erster und zweiter partieller Ableitung nach  $y$ . Gesucht wird eine mod 1 periodische Lösung von (1)  $y' = f(x, y)$ , wobei  $f(x, y)$  in  $x$  mod 1 periodisch sei. Verf. leitet bei  $y_n(0) = y_n(1)$  eine hinreichende Bedingung dafür her, daß der Iterationsansatz

$$dy_n/dx = f(x, y_{n-1}) + (y_n - y_{n-1}) \partial f(x, y_{n-1})/\partial y_{n-1}$$

konvergiert. Als Spezialfall dieser nicht ganz einfachen Konvergenzbedingung

nennt Verf.  $\int_0^1 \frac{\partial f(x, y(x))}{\partial y} dx < 0$ .

W. Haacke.

Schröder, Johann: Über das Differenzenverfahren bei nichtlinearen Randwertaufgaben. II. Z. angew. Math. Mech. 36, 443—455 (1956).

Zur Lösung der Differenzengleichungen, die der Differentialgleichung  $\varphi'' + f(x, y) = 0$  mit Sturmschen Randbedingungen entsprechen, hat Verf. in der Mitteilung I (dies. Zbl. 71, 341) ein Iterationsverfahren angegeben. In dieser Mitteilung II werden die Fehler der mit dem Differenzenverfahren berechneten Werte  $u_i$  gegenüber den Werten  $\varphi_i$  der genauen Lösung ( $i = 0, 1, \dots, n$ ) abgeschätzt. Es werden Sätze aufgestellt, in denen  $|u_i - \varphi_i|$  durch eine Summe aus zwei Summanden abgeschätzt wird, von denen der erste eine Zahl ist, die aus den Näherungswerten unmittelbar berechnet werden kann, während der zweite Summand Schranken für die 4. und 6. Ableitung der Lösungsfunktion enthält, die allerdings nicht besonders scharf zu sein brauchen, da sie in Verbindung mit einer höheren Potenz von  $h$  auftreten. Es gelingen auch Abschätzungen  $u_i \geq \varphi_i$  bzw.  $u_i \leq \varphi_i$ , so daß dann die exakten Werte  $\varphi_i$  zwischen zwei Näherungen eingeschlossen werden können. Als Beispiel wird eine Fehlerabschätzung für  $\varphi'' - \frac{3}{2}\varphi^2 = 0$ ,  $\varphi(0) = 1$ ,  $\varphi(1) = \frac{4}{9}$  im Gebiet  $0 \leq x \leq 1$ ,  $0 \leq y \leq 1 - \frac{5}{9}x$  bei  $h = \frac{1}{8}$  ( $n = 8$ ) durchgeführt. W. Schulz.

Popov, E. P.: A generalization of Bogolubov's asymptotic method in the theory of non-linear oscillations. Doklady Akad. Nauk SSSR 111, 308—311 (1956) [Russisch].

Im Anschluß an Arbeiten von Bogoljubov gibt der Verf. ein asymptotisches Verfahren zur Lösung der nichtlinearen Gleichung einer gedämpften Schwingung  $\ddot{x} + 2b\dot{x} + c^2x = \varepsilon f(x, \dot{x})$  an. Die Lösung wird sowohl für  $x$  als auch für die Änderungen von Amplitude und Phase als Potenzreihe in  $\varepsilon$  angesetzt, und die Bestimmungsgleichungen werden für die in diese Reihen eingehenden Funktionen durch einen Koeffizientenvergleich gewonnen. Für den Fall, daß die Amplitudenänderung sowie die Phase nur wenig von der Amplitude selbst abhängen, werden Ergebnisse erhalten, die schon von Greenstedt auf völlig anderem Wege abgeleitet wurden. Unter be-



stimmten Voraussetzungen stimmt die erste Näherung der asymptotischen Lösung mit den bekannten Näherungsverfahren der äquivalenten Linearisierung überein.

*K. Magnus.*

**Ergin, E. I.: Transient response of a nonlinear system by a bilinear approximation method.** J. appl. Mech. **23**, 635—641 (1956).

In der Differentialgleichung mit nichtlinearer Rückstellkraft  $\ddot{x} + f(x) = F(t)$  wird die Funktion  $f(x) = k_1 x + h(x)$  ersetzt durch  $k_1 x$  für  $x < x_t$  und durch  $k_2 x + (k_1 - k_2) x_t$  für  $x > x_t$ , wobei der Anstieg  $k_2$  der zweiten Ersatzgeraden und die Knickstelle  $x_t$  innerhalb des Amplitudenbereiches nach der Methode der kleinsten Quadrate bestimmt werden. Die Ersatzgleichung läßt sich dann elementar lösen. Speziell wird dieses Verfahren auf die Differentialgleichung  $\ddot{x} + k_1 x + \varepsilon x^3 = F(t)$  angewandt, mit 1.  $F(t) = F_0 = \text{const}$  und 2.  $F(t) = \sin \omega t$  für  $0 < t < \pi/\omega$  und  $F(t) = 0$  für  $t > \pi/\omega$ , und mit auf anderem Wege gewonnenen Lösungen verglichen.

*H. Molitz.*

**Nehari, Zeev: On the numerical solution of the Dirichlet problem.** Proc. Confer. Differential equations, Maryland 1955, 157—178 (1956).

Soit  $A$  un domaine borné de frontière  $C$ , suffisamment régulière, dans l'espace à  $m \geq 2$  dimensions et  $H$  l'espace de Hilbert de toutes les fonctions  $u, v, \dots$  définies dans  $A$  dont l'intégrale de Dirichlet étendue à  $A$  est finie, le produit intérieur  $(u, v)$  des deux fonctions quelconques  $u$  et  $v$  de  $H$  étant défini par la formule  $(u, v) = \int_A (\text{grad } u, \text{grad } v) d\omega$  où  $d\omega$  est l'élément de volume de  $A$ . D'autre part, soit  $\{u_n\}$

un système orthonormal, au sens  $(u_\mu, u_\nu) = \delta_{\mu\nu}$ , et complet de fonctions harmoniques de  $H$ . S. Zaremba avait remarqué [Bull. Acad. Sci. Cracovie **1907**, 147—196 et **1909**, 125—195] que les coefficients de Fourier  $a_\nu = (u, u_\nu)$ ,  $\nu = 1, 2, \dots$ , d'une fonction  $u$  harmonique dans  $A$  et continue dans  $A + C$  par rapport au système  $\{u_n\}$  s'expriment, en vertu d'une formule de Green, par l'intégrale  $a_\nu = \int_C u \frac{\partial u_\nu}{\partial n} ds$

étendue à la frontière  $C$  de  $A$ . Par suite, la solution  $u(P)$  du problème de Dirichlet dans  $A$  correspondant à la valeur frontière  $U(Q)$ ,  $Q \in C$ , peut être recherchée par

la méthode du développement de Fourier  $u(P) \sim \sum_{\nu=1}^{\infty} a_\nu u_\nu(P)$ , où  $a_\nu = \int_C U \frac{\partial u_\nu}{\partial n} ds$ .

Le travail est consacré à l'étude de cette méthode et d'autres analogues dans lesquelles le produit intérieur  $\int_A (\text{grad } u, \text{grad } v) d\omega$  est remplacé par un autre.

*F. Leja.*

**Robertson, H. H.: Phase calculations for nuclear scattering on the Pilot ACE.** Proc. Cambridge philos. Soc. **52**, 538—545 (1956).

Verf. berichtet über die numerische Lösung der Integrodifferentialgleichung

$$(1) \quad \frac{d^2 f_l(r)}{dr^2} + \left( k^2 - \frac{l(l+1)}{r^2} + V(r) \right) f_l(r) = \int_0^\infty K_l(r, r') f_l(r') dr',$$

wobei insbesondere die asymptotische Phase  $\delta_l$  der sich im Unendlichen unter gewissen Bedingungen wie  $\sin(kr - \frac{1}{2}\pi l + \delta_l)$  verhaltenden Lösung  $f_l(r)$  gesucht ist. Falls die gestreuten Partikel ungeladen sind, nehmen  $V(r)$  und  $K(r, r')$  für großes  $r, r'$  genügend rasch ab, so daß man die obere Grenze  $\infty$  durch eine endliche Grenze  $R$  ersetzen kann. Durch Anwendung von Differenzenverfahren für das Intervall  $(0, R)$  geht (1) schließlich in ein lineares Gleichungssystem über, aus welchem man die Lösung  $f_l(r)$  und damit die Phase  $\delta_l$  angenähert bestimmen kann. Verf. beschreibt das Rechenverfahren sowie die Durchführung mit einem Rechenautomaten und gibt für ein konkretes Beispiel Resultate an, die die Wirksamkeit der Methode unter Beweis stellen.

*H. Rutishauser.*

Lotkin, Mark: Note on the sensitivity of least squares solutions. *J. Math. Physics* **35**, 309—311 (1956).

Gegeben sei das System von Normalgleichungen  $Nx = g$ ; mittels einer Matrizenmethode wird berechnet, wie sich der Lösungsvektor  $x$  und das zugehörige  $[pvv]$  ändern, wenn ein oder mehrere Meßpunkte verschoben werden. Ein einfaches Zahlenbeispiel ist angefügt. *E. Breitenberger.*

Wynn, P.: On a procrustean technique for the numerical transformation of slowly convergent sequences and series. *Proc. Cambridge philos. Soc.* **52**, 663—671 (1956).

Verf. benutzt die von Thiele mit Hilfe seiner reziproken Differenzen aufgestellte Interpolationsformel zur Extrapolation, um aus wenig Anfangsgliedern einer langsam konvergierenden Folge weit entfernte Glieder und damit gleich den Grenzwert zu extrapolieren. Der Erfolg wird an einigen Reihen, z. B. an  $\sum n^{-2}$  und an  $\sum (1/n + \log(1 - 1/n))$ , deren erste gleich  $\pi^2/6$  ist und deren zweite die Eulersche Konstante darstellt, demonstriert. Es ist verblüffend, daß hier aus den ersten drei Partialsummen, deren günstigste sich vom wahren Wert noch um mehr als 0,28 bzw. 0,15 unterscheidet, ein Wert ermittelt wird, der dem Grenzwert bis auf 0,005 bzw. 0,0006 nahek kommt, während z. B. die zwölfte Partialsumme noch einen Fehler von 0,08 bzw. 0,04 aufweist. Berücksichtigt man vier oder noch mehr Partialsummen, so wird die Approximation rasch noch besser. Dem Ref. kommt das fast wie Zauberei vor, und er sieht nicht recht, auf welcher Gutmütigkeit der Reihen dieser Erfolg eigentlich beruht. Doch weist Verf. immerhin auf einige Umstände hin, unter denen die Methode versagt. *O. Perron.*

Longman, I. M.: Note on a method for computing infinite integrals of oscillatory functions. *Proc. Cambridge philos. Soc.* **52**, 764—768 (1956).

Eine auf Untersuchungen Eulers über Reihen zurückzuführende Methode zur Auswertung unendlicher Integrale von oszillierenden Funktionen wird besprochen und für sonst schwer zu behandelnde Fälle durch ein besonderes alternierendes Verfahren ergänzt. *E. J. Nyström.*

Epstein, Leo F. and Nancy E. French: Improving the convergence of series: Application to some elliptic integrals. *Amer. math. Monthly* **63**, 698—704 (1956).

Eine beschriebene Methode zur Auswertung unvollständiger bzw. vollständiger elliptischer Integrale erster und zweiter Gattung scheint wegen ihrer guten Anwendbarkeit allgemeineres Interesse zu verdienen. Besonders beachtet sind Werte der vorhandenen Parameter nahe den Enden ihrer Variabilitätsbereiche. *E. J. Nyström.*

Artobolevskij (Artobolevsky), I. I.: The mechanism of a cissoid plotter for hyperbolas. *Doklady Akad. Nauk SSSR* **111**, 550—553 (1956) [Russisch].

Starting from the vector equation of a general cissoid  $\vec{\rho} = \vec{R} - \vec{r}$ , where  $R(\varphi)$  and  $r(\varphi)$  are the polar equations of the generates, the author shows that the cissoidograph can be used for plotting the hyperbolas in the case when the generates are two straight lines. The proposed mechanism with its modification represents the mechanism for plotting the large group of different hyperbolas as cissoidal curves. *D. Rašković.*

• Lebedev, S. A.: Elektronische Rechenmaschinen und Informationsprozesse. Moskau: Verlag der Akademie der Wissenschaften 1956. 47 S. 65 k. [Russisch].

Akušskij, I. Ja.: Einige Eigenschaften von Matrizen, die Gänge und Operationen von Rechenmaschinen wiedergeben. *Izvestija Akad. Nauk Kazach. SSR, Ser. Mat. Mech.* **4** (8), 86—100 (1956) [Russisch].

Verf. definiert, was er in den folgenden Noten unter einer (additiven) Rechenmaschine verstehen will. Sie besitzt  $n$  Zählwerke, deren Zustand durch den Vektor  $a$  dargestellt sei, und  $n$  (äußere) Speicher, deren Zustand  $b$  sei. Ein Programm besteht

aus einzelnen „Maschinengängen“, d. h. maschinentechnisch elementaren Lineartransformationen von  $a$  (Multiplikation mit „Gangmatrizen“), und evtl. einer Addition von  $b$  an beliebiger Zwischenstelle. Die Maschine heißt additiv, weil je Maschinengang nur Additionen ausgeführt werden können. Verschiedene Abläufe des Programms unterscheiden sich durch den Wert von  $b$  und den Anfangszustand von  $a$ . Tritt  $b$  nicht auf, so heißt das Programm homogen, sonst inhomogen. Das Produkt der Gangmatrizen heißt die „Operationsmatrix“ des Programms. Verf. gibt Eigenschaften und Beispiele solcher Matrizen an. — Derartige Rechenabläufe kennt man bei schaltungsprogrammierten Maschinen, vor allem bei Tabelliermaschinen.

*G. Beyer.*

**Akušskij, I. Ja.:** Die Operationsmatrizen eines Differenzenschemas. Izvestija Akad. Nauk Kazach. SSR, Ser. Mat. Mech. 4 (8), 101—111 (1956) [Russisch].

Wir schließen an vorstehendes Referat an. Die von Verf. hier — einschließlich ihrer Zerlegung in Gangmatrizen — angegebene Operationsmatrix  $\Omega$  und die zugehörigen Eingabevektoren  $b_r$  liefern nach dem  $r$ -ten Programmablauf den Differenzenvektor  $(f_r, \Delta f_r, \Delta^2 f_r, \dots, \Delta^{n-1} f_r)$  einer Tabelle  $f_r$ . Dabei entspricht  $\Omega$  der Beziehung  $\Delta^n f_{r+1} = f_{r+1} - f_r - \Delta f_r - \dots - \Delta^{n-1} f_r$ , und  $b_r$  ist der Vektor aus  $n$  gleichen Komponenten  $f_r$ . Man kann zwei Maschinengänge je Programmablauf sparen, wenn man zuläßt, daß das Programm von Ablauf zu Ablauf zyklisch verändert wird.

*G. Beyer.*

**Akušskij, I. Ja.:** Über die Bedingungen für die Lösbarkeit einer homogenen Rechenaufgabe. Izvestija Akad. Nauk Kazach. SSR, Ser. Mat. Mech. 4 (8), 112—127 (1956) [Russisch].

Wir schließen an das vorletzte Referat an. Die homogene Rechenaufgabe zur nicht-singulären Matrix  $U$  ist die Berechnung von  $y_{i+1} = Uy_i$  aus beliebigem Ausgangsvektor  $y_0$  ( $i = 0, 1, 2, \dots$ ). Die Aufgabe heißt lösbar vermöge der Operationsmatrix  $\Omega$  eines Programms, wenn sie sich transformieren läßt auf eine Aufgabe  $a_{i+1} = \Omega a_i$  vermöge  $a_i = Q_i y_i$ , wobei  $Q_i x$  und  $x$  einen, von  $x$  und  $i > 0$  unabhängigen nichtleeren Satz von Komponenten gemeinsam haben. Hieraus folgt  $Q_i = \Omega Q_{i-1} U^{-1}$ . Aus der Tatsache, daß alle  $\Omega^j Q_i U^{-j}$  ( $i$  fest) einen nicht-leeren Satz von Zeilen mit der Einheitsmatrix gemeinsam haben, scheint Verf. folgern zu können, daß es ein  $t$  und ein  $r$  gibt mit  $Q_{i+r} = Q_i$  für  $i \geq t$ . Damit ergibt sich als Theorem die Ähnlichkeit  $\Omega^r X = X U^r$ . Entsprechende Überlegungen werden für den allgemeineren Fall  $y_i = U^i y_0$  angestellt. Ref. konnte sich von der Richtigkeit der Ergebnisse nicht überzeugen, da die Beweisführung zumindest lückenhaft ist.

*G. Beyer.*

**Akušskij, I. Ja.:** Einige Fragen der Verbesserung der Lösbarkeit einer homogenen Rechenaufgabe. Izvestija Akad. Nauk Kazach. SSR, Ser. Mat. Mech. 5 (9), 71—89 (1956) [Russisch].

Verf. setzt seine Bemühungen fort, die Klasse der mit einer „additiven Rechenmaschine“ zu bewältigenden Rechenaufgaben  $y_{i+1} = Uy_i$  zu erweitern. Ähnlich wie in der vorstehend referierten Note wird ins Auge gefaßt, durch  $\Omega$  wenigstens einige Komponenten von  $U^i y_0$  zu berechnen. Ein anderer Gesichtspunkt ist der, eine Maschine mit mehr als  $n$  Zählern heranzuziehen und die Matrix  $U$  (oder auch  $\Omega$ ) geeignet zu rändern.

*G. Beyer.*

**Akušskij, I. Ja.:** Über die Lösbarkeit der inversen Matrix. Izvestija Akad. Nauk Kazach. SSR, Ser. Mat. Mech. 5 (9), 90—100 (1956) [Russisch].

Im Anschluß an die vorstehend besprochenen Noten betrachtet Verf. die Frage, ob mit  $y_{i+1} = Uy_i$  auch die Aufgabe  $y_{i+1} = U^{-1} y_i$  lösbar ist. Im wesentlichen muß dazu mit  $\Omega$  auch  $\Omega^{-1}$  existieren und Operationsmatrix sein. Das genügt wegen  $Q_{i+r} = Q_i$ . Die Matrix  $\Omega^{-1}$  ist leicht angebbar. Auch die Lösbarkeit durch ein inhomogenes Maschinenprogramm wird behandelt.

*G. Beyer.*



**Schecher, Heinz:** Maßnahmen zur Vereinfachung von Rechenplänen bei elektronischen Rechenanlagen. *Z. angew. Math. Mech.* **36**, 377—395 (1956).

Verf. geht von der Erfahrungstatsache aus, daß Rechenprogramme für das automatische Rechnen mehrheitlich aus organisatorischen Befehlen bestehen, d. h. aus Befehlen, die nicht der eigentlichen Rechnung dienen. Dies hat auch die bekannte Erscheinung zur Folge, daß solche Berechnungen wesentlich länger dauern, als man auf Grund der Rechengeschwindigkeit und des Umfangs des Problems vermuten würde. Verf. schlägt daher vor, durch geeignete Konstruktion der Rechenautomaten die Anzahl der organisatorischen Befehle zu vermindern. Damit wird als weiterer Vorteil eine Vereinfachung des Programmierens verbunden, denn die Hauptschwierigkeiten des Programmierens sind mit den organisatorischen Programmteilen verknüpft. Unter den vereinfachenden Maßnahmen steht wohl die vom Verf. erstmals vorgeschlagene und bei der PERM realisierte automatische Adressensubstitution im Vordergrund; sie gestattet, in einem Befehl nicht die Adresse der Größe selbst, sondern nur den Aufbewahrungsort dieser Adresse (d. h. die „Adresse der Adresse“) anzugeben, was das Rechnen mit Adressen entschieden erleichtert. Ferner schlägt Verf. zur Vereinfachung des Anschlusses von Bibliotheksprogrammen die Einführung eines besonderen Befehls „Sprung mit Änderung zweiter Art“ vor, welcher die freien Parameter automatisch vom Hauptprogramm ins Unterprogramm überträgt. Es wird gezeigt, wie sich diese Einrichtungen in verschiedenen Rechenstrukturen vereinfachend auswirken. Im übrigen berichtet Verf. über die Ausführung der sog. Änderungen I., II., III. Art mit der PERM.

*H. Rutishauser.*

**Muller, David E.:** A method for solving algebraic equations using an automatic computer. *Math. Tables Aids Comput.* **10**, 208—215 (1956).

Verf. beschreibt ein Iterationsverfahren zur Lösung algebraischer Gleichungen beliebigen Grades mit komplexen Koeffizienten. Das Polynom wird mit Hilfe der Lagrangeschen Interpolationsformel durch ein Ersatzpolynom 2. Grades angenähert. Ein Iterationsschritt besteht in der Auflösung des Ersatzpolynoms. Die Durchführung des Verfahrens ist auf die Lösung mittels programmgesteuerter Rechenggeräte zugeschnitten. Konvergenzuntersuchungen im Kleinen schließen sich an, wobei auch der Fall betrachtet wird, daß das Ersatzpolynom beliebigen Grades ist. Abschließend werden Genauigkeit und Rechenzeiten für einige auf dem Rechenggerät der Universität von Illinois gelösten Gleichungen angeführt.

*F. A. Willers.*

**Ljusternik, L. A. und I. Ja. Akušskij:** Über ein Verfahren der numerischen harmonischen Analyse bei einer großen Anzahl von Punkten. *Izvestija Akad. Nauk Kazach. SSR, Ser. Mat. Mech.* **4** (8), 80—85 (1956) [Russisch].

Verff. setzen an Stelle der Sinus- und Cosinusfunktionen in die Integraldarstellung der Fourierkoeffizienten eine aus Parabelbogen bestehende Kurvenfunktion ein, nämlich:  $S(x) = \pi x(\pi - x)/8$  für  $0 < x < \pi$ ,  $S(-x) = -S(x)$ ,  $S(x + 2\pi) = S(x)$ ,  $C(x) = S(x + \pi/2)$ . Es gelten die Beziehungen (in Original Vorzeichenfehler):

$$S(x) = \sin x + \frac{\sin 3x}{27} + \frac{\sin 5x}{125} + \dots, \quad \sin x = S(x) - \frac{S(3x)}{27} - \frac{S(5x)}{125} + \dots,$$

$$\cos x = C(x) - \frac{C(3x)}{27} + \dots$$

Es ist dann klar, daß man durch zweimalige partielle Integration, die mit  $S(nx)$  und  $C(nx)$  an Stelle von  $\sin nx$  und  $\cos nx$  berechneten „Fourierintegrale“ unmittelbar in die Funktionswerte der ein-, zwei-, oder dreimal nach  $x$  integrierten Funktion  $f(x)$  durch Summen darstellen kann. Verff. geben die explizite Darstellung für diese Summen und beschreiben, wie im Falle vieler gegebener Punkte  $(x, f(x))$  die Rechenarbeit für automatische Summierungsmaschinen in fünf Etappen programmiert werden kann.

*E. M. Bruins.*

Atkinson, C. P.: Electronic analog computer solutions of non-linear vibratory systems of two degrees of freedom. *J. appl. Mech.* **23**, 629—634 (1956).

Verf. untersucht ein schwingungsfähiges System von zwei Freiheitsgraden, das aus einer federgefestelten Hauptmasse und einer über eine zweite Feder angekoppelten Zusatzmasse besteht. Die Kennlinien der Federn werden durch Ausdrücke von der Form  $K_f = c(1 \pm \mu^2 z^2)$   $z$  dargestellt. Acht verschiedene Kombinationen, bei denen Haupt- bzw. Zusatzfedern entweder linear ( $\mu^2 = 0$ ), überlinear (+-Zeichen vor  $\mu^2$ ) oder unterlinear (—Zeichen vor  $\mu^2$ ) sind, und außerdem harmonische Erregerkräfte an der Hauptmasse angreifen können, werden behandelt. Ziel der Arbeit ist der Vergleich von Lösungen, die einerseits auf einem Analog-Rechner, andererseits analytisch durch Näherungsrechnung mit einem eingliedrigen Ritz-Ansatz erhalten wurden. Die Ergebnisse stimmen weitgehend überein. Ein von Klotter für nicht-lineare erzwungene Schwingungen von einem Freiheitsgrad aufgestelltes Stabilitätskriterium wird — ohne Beweis — für Systeme mit zwei Freiheitsgraden erweitert und durch Versuche auf dem Analog-Rechner verifiziert. *K. Magnus.*

● Boll, Marcel: *Tables numériques universelles*. Paris: Dunod Editeur 1956. IV, 882 p. fr. 12,760.

Lemaître, G.: *Le calcul élémentaire*. Acad. roy. Belgique, Bull. Cl. Sci., V. Sér. **42**, 1140—1145 (1956).

Um die Stellung der vom Verf. vorgeschlagenen Methode für die elementaren Berechnungen von Produkten und Quotienten relativ zu anderen Methoden klar darzulegen, muß man darauf hinweisen, daß die alten Ägypter, die in ihrer Zahlendarstellung für die verschiedenen Potenzen von 10 verschiedene Symbole verwendeten, mit Hilfe der Verdopplung und der Halbierung multiplizierten und dividierten. Der alte Ägypter würde also das Verdoppeln des Multiplikanden ( $n - 1$ )-mal iterieren, wenn  $2^n$  den Multiplikator gerade übertrifft, um dann diejenigen Zahlen zu addieren, für die die Summe der Zweierpotenzen gerade den Multiplikator liefert, z. B.  $17 \times 19$  lieferte: [1; 19], [2; 38], [4; 76], [8; 152], [16; 304], also  $[1 + 16; 19 + 304 = 323]$ . Für Divisionen wurde der Teiler wiederholt verdoppelt bis der Dividend überschritten wurde, z. B.  $83:7$  liefert [1; 7], [2; 14], [4; 28], [8; 56], also  $[8 + 2 + 1 = 11; 56 + 14 + 7 = 77]$ , Quotient 11, Rest 6. In den russischen Schulen wurde eine Verbesserung dieser Methoden gelehrt, die die dezimale Darstellung der Zahlen besser ausnutzt; man halbiert den Multiplikator und verdoppelt den Multiplikanden und addiert nur die Zahlen, die eine ungerade Zahl vor sich haben: z. B.  $83 \times 117$ ,  $41 \times 234$ ,  $20 \times 468$ ,  $10 \times 936$ ,  $5 \times 1872$ ,  $2 \times 3744$ ,  $1 \times 7488$ . Produkt  $117 + 234 + 1872 + 7488 = 9711$ . Verf. schlägt nun vor, die Vorteile der dezimalen Darstellung weiter auszunutzen, indem er die Verdopplungen nur bis 8 führt und jede Ziffer des Multiplikators dyadisch zerlegt. Eine Multiplikation mit 3687 wird wegen  $3 = 2 + 1$ ,  $6 = 4 + 2$ ,  $8 = 8$ ,  $7 = 4 + 2 + 1$  zurückgeführt auf  $[(1000 + 1) + (2000 + 200 + 2) + (400 + 4) + 80]$  mal Multiplikand. Eine Division wird entsprechend zurückgeführt auf Vervollständigung des Neunerkomplements des Dividenden durch Additionen zu einer nur aus Ziffern 9 bestehenden Zahl. *E. M. Bruins.*

## Wahrscheinlichkeitsrechnung und Anwendungen.

### Wahrscheinlichkeitsrechnung:

Vietoris, L.: Häufigkeit und Wahrscheinlichkeit. *Studium generale* **9**, 85—96 (1956).

Verf. verteidigt sehr scharfsinnig am Beispiel des Wahrscheinlichkeitsbegriffes die axiomatische Methode, d. h. die implizite Definition, gegen die Carnap'sche Forderung der „inhaltlichen Explikation“ mit dem Argument, daß einerseits in den Axiomen alles wissenschaftlich und praktisch Wesentliche erfaßt ist und anderer-

seits sowieso „außer gewissen Beziehungen zwischen den Dingen nichts mitteilbar“ sei. Die Axiomatik soll insbesondere das Verhältnis zwischen Wahrscheinlichkeit und empirischer Häufigkeit klären. Verf. unterstreicht, daß dies bei Verwendung der Limesdefinition durch die Interpretation des Bernoullischen Theorems mit Hilfe einer stillschweigenden Auswechslung des eingeführten Wahrscheinlichkeitsbegriffes gegen einen Wahrscheinlichkeitsbegriff im Sinne des „eher“ geschieht. Bei der klassischen Definition dagegen sei dieses Theorem ohne eine solche „Auswechslung“ eine Rechtfertigung dafür, daß das bekannte Zahlenverhältnis der Fälle als Wahrscheinlichkeit definiert wurde (was Ref. nicht versteht, da das fragliche Theorem bei der klassischen Definition auch nur wieder etwas über Anzahlenverhältnisse aussagen kann). — Anschließend gibt Verf. einen gegenüber früheren Darstellungen etwas modifizierten Abriß seiner eigenen Axiomatik und hebt schließlich die Bedeutung des axiomatisch einwandfrei interpretierbaren Bernoullischen Theorems als einer Grundlage für das Messen von Wahrscheinlichkeiten hervor. *H. Richter.*

**Thullen, Peter:** Über das Konvergenzproblem der relativen Häufigkeiten in der Wahrscheinlichkeitstheorie. *Math. Ann.* **131**, 346—353 (1956).

The author investigates the arithmetical problem as to whether in an unlimited sequence of „0's“ and „1's“ the relative frequency of „1“, say, approaches a limit. First, the concept of quasiconvergence is introduced: An infinite sequence  $\{b_n\}$  is quasiconvergent towards  $b_0$  if for any given  $\varepsilon > 0$ ,  $|b_n - b_0| < \varepsilon$  for „almost all  $n$ “; i. e., that for any set  $\{b_1, b_2, \dots, b_n\}$  the relative frequency of those  $b_i$  for which  $|b_i - b_0| \geq \varepsilon$  tends to zero as  $n \rightarrow \infty$ . Clearly, there are divergent sequences which are quasiconvergent (certain sequences with more than one limit point). It can however be shown that for the relative frequency of „1“ (in the unlimited sequence of „0“ and „1“) this distinction does not exist: If such a relative frequency is quasiconvergent, it is also necessarily convergent. This follows as a particular case of a theorem on arithmetical means. Next, Bernoulli sequences are defined and classified. The considerations are carried out with a view to the application in v. Mises' probability theory; the theorems are however of a more general character, they apply to arithmetical means of infinite sequences. *H. Geiringer.*

**Bottema, O.:** The Shylock game. *Nieuw Arch. Wiskunde*, III. Ser. **4**, 127—131 (1956).

In einem Kriminalroman von Herbert Adams wird ein Spiel mit 2 Würfeln für  $N$  Personen beschrieben. Verf. beweist eine allgemeine Formel für die mathematische Hoffnung des  $k$ -ten Spielers ( $k = 1, \dots, N$ ) und gibt Tabellen für  $N = 3$ ,  $N = 6$  und  $N = 10$ . *R. Sprague.*

**Dufresne, P.:** Problèmes de dépouillements. *Publ. Inst. Statist. Univ. Paris* **5**, 75—89 (1956).

Verf. bestimmt die Anzahl der Möglichkeiten bzw. die Wahrscheinlichkeit, daß während der ganzen Dauer der Stimmzählung nach einem Wahlgang die Zahl der Stimmen für den Kandidaten  $A$  beständig das  $k$ -fache der Stimmen für den Kandidaten  $B$  übersteigt.  $N(a, b) A > k B$  bezeichne die Zahl der möglichen Ziehungen der genannten Art mit insgesamt  $\theta = a + b$  Stimmen. Verf. beweist (durch vollständige Induktion): Falls  $a \geq kb$  ( $k$  bel. positiv),  $j = [k]$ , gilt

$$\frac{a - kb}{a + b} \frac{(a + b)!}{a! b!} \leq (N(a, b) A > k B) \leq \frac{a - jb}{a + b} \frac{(a + b)!}{a! b!}$$

und

$$\frac{a - kb}{a + b} \leq (P(a, b) A > k B) \leq \frac{a - jb}{a + b}.$$

Die Zahlen der möglichen Fälle werden in Tafeln mit den beiden Eingängen  $\theta$  und  $b$  dargestellt. Diese Tafeln für die Anzahl der Möglichkeiten bei der Stimmzählung lassen sich auch ausgehend von einer erzeugenden Zahl bzw. der ersten Zeile für  $\theta = 1$ ,  $b = 0$ , bzw. 1 mittels des Pascalschen Dreiecks konstruieren. Aus den



Feldern der Tafel kann man jene auswählen, welche vorgegebene Bedingungen erfüllen. Hiermit erhält man die gesuchte Anzahl für vorgegebene Bedingungen.

*J. Heinhold.*

**Pitman, E. J. G.:** On the derivatives of a characteristic function at the origin. *Ann. math. Statistics* **27**, 1156—1160 (1956).

Sia  $F(x)$  ( $-\infty < x < +\infty$ ) una funzione di distribuzione, e sia  $\Phi(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{itx} dF(x)$  la sua funzione caratteristica. L'A. dimostra il seguente teorema: Se  $k$  è un numero intero positivo dispari, allora condizioni necessarie e sufficienti per l'esistenza della derivata  $\Phi^{(k)}(0)$  sono  $\lim_{x \rightarrow 0} x^k \{F(-x) + 1 - F(x)\} = 0$ , e

l'esistenza del  $\lim_{T \rightarrow \infty} \int_{-T}^T x^k dF(x)$ . Quando queste due condizioni sono soddisfatte, è

$$\Phi^{(k)}(0) = i^k \lim_{T \rightarrow \infty} \int_{-T}^T x^k dF(x).$$

*S. Cinquini.*

**Császár, Á.:** Sur une caractérisation de la répartition normale de probabilités. *Acta math. Acad. Sci. Hungar.* **7**, 359—381, russ. Zusammenfassg. 381—382 (1956).

Das Problem einer Charakterisierung mit den geringsten Einschränkungen einer Statistik, welche dem Laplace-Gaußschen Gesetz folgt, beschäftigt genau so die Wahrscheinlichkeitstheoretiker, welche die Verallgemeinerung dieser Gesetze im abstrakten Raume verfolgen, wie auch die Statistiker, welche versuchen, es durch möglichst direkt an die Beobachtung gebundene Elemente herauszuheben. S. Bernstein hat eine solche Charakterisierung im Jahre 1907 gegeben, welche der Verf. noch mehr verallgemeinert, indem er folgende Verallgemeinerung eines Sierpinski'schen Satzes gebraucht: Wenn die reelle, auf dem offenen Intervall  $I$  meßbare Funktion  $\varphi(x)$  auf einer Teilmenge  $R$  von  $I$ , welche dasselbe Maß wie  $I$  hat, konvex ist, dann existiert eine endliche, kontinuierliche und konvexe Funktion  $\varphi^*(x)$  auf  $I$ , die auf  $R$  mit  $\varphi(x)$  gleich ist. — Der vom Verf. bewiesene Satz hat nachstehenden Inhalt: Wenn  $\Phi(x)$  eine monoton nicht abnehmende Funktion im Intervall  $(-r, +r)$  ist, so daß für jedes System  $x_i$  ( $i = 0, 1, 2, \dots, n$ ;  $n = 2, 3, \dots$ ) von reellen, nur durch die Bedingung  $\sum_{i=1,2,\dots,n} x_i = 0$  verbundenen Zahlen ein  $\delta > 0$  vorhanden ist,

derart daß  $\prod_1^n |\Phi(x_0 + x_i + h_i) - \Phi(x_0 + x_i)| \leq \prod_1^n |\Phi(x_i + h_i) - \Phi(x_i)|$ , wenn nur  $0 < |h_i| < \delta$  und die Argumente der Funktion  $\Phi$  sich im Intervalle  $(-r, +r)$  befinden, dann hat  $\Phi$  die degenerierte Form

$$\Phi(x) = A \text{ für } -r \leq x \leq 0, \text{ bzw. } = B \text{ für } 0 < x \leq r$$

oder die Laplace-Gaußsche Form.

*O. Onicescu.*

**Blum, J. R.:** On a characterization of the normal distribution. *Skand. Aktuarietidskr.* **1956**, 59—62 (1956).

Die charakteristischen Funktionen  $\varphi_1(t)$ ,  $\varphi_2(t)$ , welche die Funktionalgleichung  $\varphi_1(t) \varphi_2(t) = e^{ict} \varphi_1^{m_1}(t/\sqrt{n}) \varphi_1^{n-m_1}(-t/\sqrt{n}) \varphi_2^{m_2}(t/\sqrt{n}) \varphi_2^{n-m_2}(-t/\sqrt{n})$  verifizieren, sind die der Gaußschen Verteilung. Dasselbe gilt für die charakteristischen Funktionen  $\varphi(t)$ ,  $\psi(t)$ ,  $M(t)$ , die der Funktionalgleichung  $\varphi(\alpha t) \psi(t) = M(\sqrt{\alpha^2 + 1} t)$  genügen. Es läßt sich leicht aus der letzten Behauptung der bekannte Bernsteinsche Satz über die Gaußsche Verteilung folgern.

*O. Onicescu.*

**Basu, D.:** A note on the multivariate extension of some theorems related to the univariate normal distribution. *Sankhyā* **17**, 221—224 (1956).

Der  $p$ -dimensionale Zufallsvektor  $x$  wird als  $p$ -dimensional normal definiert ( $N_p$ ), wenn das Skalarprodukt  $t x'$  mit jedem beliebigen konstanten Vektor  $t$  ein-dimensional normal ist. Es wird gezeigt, daß diese Definition mit der sonst gebräuch-

lichen äquivalent ist. Mit elementaren Hilfsmitteln werden einige Sätze hergeleitet, die lineare Transformationen auf  $x$  und Linearkombinationen solcher Vektoren zum Gegenstand haben. Genannt werde Satz 5: Sind  $x_1, \dots, x_n$  gegenseitig unabhängige  $p$ -dimensionale Zufallsvektoren und sind  $y_1 = \sum_i a_i x_i$  und  $y_2 = \sum_i b_i x_i$  ebenfalls unabhängig für beliebig vorgegebene  $a_i, b_i, i = 1, \dots, n$ , dann sind alle  $x_i$ , für die  $a_i b_i \neq 0$ , nach  $N_p$  verteilt. Satz 6: Sei  $x$  ein  $p$ -dimensionaler Zufallsvektor mit endlicher Streuungsmatrix  $A$  und  $X = (x_{ij}), i = 1, \dots, p, j = 1, \dots, n$  die Matrix von  $n$  unabhängigen Beobachtungen von  $X$ , ferner  $s_i = \sum_j x_{ij}, s = (s_1, s_2, \dots, s_p)$ . Ist  $E(X A X' / s) = A$ , worin  $X A X'$  einen biasfreien Schätzwert für  $A$  bedeutet, dann ist  $x$  nach  $N_p$  verteilt. F. Wever.

**Watson, G. S.:** A note on the circular multivariate distribution. *Biometrika* **43**, 467 (1956).

**Heppes, A.:** On the determination of probability distributions of more dimensions by their projections. *Acta math. Acad. Sci. Hungar.* **7**, 403—410, russ. Zusammenfassg. 410 (1956).

Im Anschluß an Renyi (dies. Zbl. **48**, 108) wird in geometrischer Sprache sehr einfach gezeigt: Eine diskrete  $n$ -dimensionale Verteilung mit  $k$  Massenpunkten ist eindeutig durch ihre Projektionen auf  $k + 1$  Hyperebenen der Dimension  $m_i < n$  ( $i = 1, \dots, k + 1$ ) bestimmt, wenn je zwei dieser Hyperebenen in keinem  $(n - 1)$ -dimensionalen Teilraum enthalten sind. Dieser Satz läßt sich auch auf Räume von abzählbar unendlichen Dimensionen übertragen. Weiter: jede diskrete  $n$ -dimensionale Verteilung mit endlich vielen Massenpunkten ist für  $n \geq 3$  durch ihre Projektionen auf zwei passend gewählte  $(n - 1)$ -dimensionale Unterräume eindeutig charakterisiert. (Fragestellung und Beweis stammen von J. Molnár.) Für  $n = 2$  benötigt man drei passend gewählte Gerade. Ein Beispiel zeigt, daß diskrete Massenverteilungen mit abzählbar unendlich vielen Massenpunkten nicht notwendig durch abzählbar unendlich viele Projektionen eindeutig charakterisiert sind. Allerdings kann dieses Beispiel nur dann im Rahmen einer Wahrscheinlichkeitstheorie interpretiert werden, wenn man Ereignisse mit unendlich großen Wahrscheinlichkeiten zuläßt, wie sie z. B. Renyi angibt. Schließlich gilt: Eine zweidimensionale Verteilung mit Dichte  $f(x, y)$  ist sicher dann nicht durch ihre Projektionen auf endlich viele Geraden durch den Ursprung eindeutig festgelegt, wenn für einen Kreis  $K_r$  mit Radius  $r > 0$   $\inf_{K_r} f(x, y) = d > 0$  ist. L. Schmetterer.

**Simaika, J.:** Sur une mesure de la dispersion d'une distribution de directions. *Bull. Acad. Polon. Sci., Cl. III* **4**, 753—756 (1956).

In einer früheren Arbeit hat der Verf. einen typischen Wert der Menge der ebenen Richtungen  $\theta$  einer Verteilungsfunktion  $F(\theta)$  definiert, und zwar durch die (einzige) Lösung der Gleichungen

$$\sin \Theta / \sin \theta = \cos \Theta / \cos \theta = 1 / \sqrt{\sin^2 \theta + \cos^2 \theta}.$$

Dieser typische Wert ist von der Wahl des Ursprungs unabhängig, was für den Mittelwert  $\bar{\theta}$  nicht richtig ist. In dem gegenwärtigen Artikel schlägt der Verf. als Maß der Dispersion die Größe  $D$  vor, welche durch die Gleichheit  $\cos D = 1 / \sqrt{\sin^2 \theta + \cos^2 \theta}$  definiert ist. Dieser Wert ist — ebenso wie  $\Theta$  — von der Wahl des Ursprungs unabhängig.  $D$  nimmt seinen kleinsten Wert 0 an, wenn  $\theta$  eine fast sichere Größe ist, und das Maximum  $\pi/2$  im besonderen Falle  $\sin \theta = \cos \theta = 0$ , dessen Existenz den theoretischen Gebrauch dieser typischen Größen schwierig macht.

O. Onicescu.

**Sakovič, G. P.:** Notwendige und hinreichende Bedingungen der Attraktion an stabilen Verteilungen in einheitlicher Form. *Teor. Verojatn. Primen.* **1**, 357—361, deutsche Zusammenfassg. 361 (1956) [Russisch].

In this note the author gives necessary and sufficient conditions of attraction by a  $k$ -dimensional ( $k \geq 1$ ) stable law of characteristic exponent  $\alpha$  in an unitary form for both cases  $0 < \alpha < 2$  and  $\alpha = 2$ . After a slight modification, the conditions hold true also for  $\alpha = +0$ .

*R. Theodorescu.*

**Lipshutz, Miriam:** On the magnitude of the error in the approach to stable distributions. I, II. Nederl. Akad. Wet., Proc., Ser. A 59, 281—287, 288—294 (1956).

Es seien  $X_h, h = 1, 2, \dots$  unabhängige positive gleichverteilte Wahrscheinlichkeitsgrößen mit der Verteilungsfunktion  $F(x) = \int_{-\infty}^x \varphi(t) dt$ , wo

$$1 - F(x) = h(x)/x^\gamma \quad (x > 0), \quad 0 < \gamma < 2, \quad h(mx)/h(m) \rightarrow 1, \quad m \rightarrow \infty.$$

Wenn  $S_n = \sum_{k=1}^n X_k$  oder  $\sum_{k=1}^n \{X_k - E[X_k]\}$  je nachdem  $0 < \gamma < 1$  oder  $1 < \gamma < 2$  ist und wenn  $b_n$  so gewählt wird, daß  $F(b_n) = 1/n$ , gilt nach W. Doeblin  $P(S_n < b_n x) \rightarrow G_\gamma(x)$  ( $n \rightarrow \infty$ ) mit einer stabilen Verteilungsfunktion  $G_\gamma(x)$ . Die Differenz  $\Delta_n = |P(S_n < b_n x) - G_\gamma(x)|$  beruht natürlich auf  $h(x)$ . Hier werden nun ziemlich spezielle Voraussetzungen über  $h(x)$  eingeführt und entsprechende sehr komplizierte Abschätzungen des Restgliedes erhalten. Wegen der verschiedenen Voraussetzungen über  $h(x)$  ist es schwierig, diese Ergebnisse mit den früheren Ergebnissen von Bergström zu vergleichen. Die speziellen Voraussetzungen ( $X_k \geq 0$ , Existenz von  $\varphi(x)$ ) machen es hier möglich, die Fouriertransformation anzuwenden.

*H. Bergström.*

**Motoo, Minoru:** Some theorems on the sum of positive random variables. Ann. Inst. statist. Math. 7, 169—181 (1956).

If  $F(x)$  is a c. d. f. of a positive random variable with no first moment and  $\{c_n\}$  is defined so that  $n[1 - F(c_n)] \rightarrow 1$  ( $n \rightarrow \infty$ ), then, as is known,  $F(x)$  is in the domain of a stable law if and only if for  $\lambda > 1$ ,  $c_{[n\lambda]}/c_n$  has a limit as  $n \rightarrow \infty$ . The author discusses the behavior of the sums  $\{S_n\}$  of positive random variables when this ratio has no limit. Frequent misprints and confused notation make some of the proofs difficult.

*L. Cote.*

**Kloss, B. M.:** Limiting distributions of sums of independent random variables taking values from a bicomact group. Doklady Akad. Nauk SSSR 109, 453—455 (1956) [Russisch].

Unter Ausnutzung bekannter Sätze der Theorie der bikompakten Gruppen wird für Zufallsgrößen mit Werten aus einer bikompakten Gruppe  $G$  eine Reihe interessanter Sätze bewiesen. Die Gruppe  $G$  wird eingebettet in die Hausdorffsche bikompakte Halbgruppe  $S$  aller nichtnegativen,  $\sigma$ -additiven, regulären Maße  $\mu$  über  $G$  mit  $\mu(G) = 1$ . Ein Verteilungsgesetz wird stabil genannt, wenn das entsprechende Maß  $\mu$  ein Idempotent in  $S$  ist. Dann gilt speziell: Wenn der Limes einer anwachsenden Summe unabhängiger gleichverteilter Zufallsgrößen existiert, so ist das Grenzverteilungsgesetz stabil, und umgekehrt ist jedes stabile Gesetz Limes einer anwachsenden Summe unabhängiger gleichverteilter Summanden. Vergleiche auch für kommutative Gruppen  $G$  die Arbeit von Vorobev (dies. Zbl. 58, 120).

*W. Richter.*

**Udagawa, Masatomo:** On some limit theorems for the sums of identically distributed independent random variables. Kōdai math. Sem. Reports 8, 85—92 (1956).

This paper is in two parts. The first concerns the sums  $S_n = X_1 + \dots + X_n$  of independent, equi-distributed, integer valued random variables. Let  $N_n$  be the number of  $S_k$  ( $1 \leq k \leq n$ ) which are equal to some fixed integer,  $j$ . Two theorems give the limiting distribution of  $N_n$  under the conditions that (theorem 1)  $E X_i = 0$ ,  $E X_i^2 = \sigma^2$ , or (theorem 2) that the distribution of the  $X_i$  is in the domain of a symmetric stable law with characteristic exponent  $\alpha \neq 2$ . The proofs use the method of



moments as in Chung (this Zbl. 37, 83) or Kallianpur and Robbins (this Zbl. 55, 367). The second part discusses the relation between two limit theorems for the densities of sums of equi-distributed random variables: W. L. Smith (this Zbl. 53, 96) and Gnedenko-Kolmogorov (this Zbl. 56, 360). The author proves that the weaker hypothesis of the second implies the stronger conclusion of the first.

*L. Cote.*

**Prékopa, A. and A. Rényi: On the independence in the limit of sums depending on the same sequence of independent random variables.** Acta math. Acad. Sci. Hungar. 7, 319—325, russ. Zusammenfassg. 325—326 (1956).

If  $\{\xi_{nk}: k = 1, \dots, k_n, n = 1, 2, \dots\}$  is a double sequence of random variables in the sense of Gnedenko-Kolmogorov (this Zbl. 56, 360) and  $f_l(x)$ , ( $l = 1, \dots, r$ ), are Borel measurable functions such that  $f_j(x) f_k(x) = 0$  for  $j \neq k$ , consider the partial sums  $\xi_l^{(n)} = \sum_k f_l(\xi_{nk})$  of the  $r$  double sequences  $\{f_l(\xi_{nk})\}$  ( $l = 1, \dots, r$ ).

When the  $r$  double sequences are all infinitesimal and their partial sums have limit distributions, the authors give two conditions for which  $\{\xi_l^{(n)}: l = 1, \dots, r\}$  are asymptotically independent, i. e. for which

$$\lim_n P\{\xi_l^{(n)} < x_l, l = 1, \dots, r\} = \prod_{l=1}^r \lim_n P\{\xi_l^{(n)} < x_l\}.$$

These are: (theorem 1a) the  $f_l(x)$  are integer valued, and (theorem 1b)  $\lim_n \sum_k |\varphi_{lk}^{(n)}(u) - 1|^2 = 0$ , ( $l = 1, \dots, r$ ) where  $\varphi_{lk}^{(n)}$  is the characteristic function of  $f_l(\xi_{nk})$ . As an application the authors consider a left continuous independent increments process  $\{\xi_t: 0 \leq t \leq 1\}$  which is weakly continuous. Let  $v(I)$  denote the number of discontinuities of magnitude  $h$  in an interval  $I$ . Theorem 1a shows quickly that when  $I_l$  ( $l = 1, \dots, r$ ) are disjoint intervals in  $0 < t \leq 1$ , the random variables  $v(I_l)$  are mutually independent.

*L. Cote.*

**Weiss, George H.: A note on the coincidence of some random functions.** Quart. appl. Math. 14, 103—107 (1956).

Ein System sei nur zweier zufällig eintretender Zustände „An“ und „Ab“ fähig, wobei für jedes „An“ bzw. „Ab“ die Wahrscheinlichkeit einer zwischen  $l$  und  $l + dl$  bzw.  $m$  und  $m + dm$  betragenden Zeitdauer  $\alpha(l) dl$  bzw.  $\beta(m) dm$  sei. Die Wahrscheinlichkeit  $\eta(t)$ , daß zur Zeit  $t$  das System „An“ sei, und die Wahrscheinlichkeitsdichte  $\omega(t)$  für Beendigung eines „An“ im Zeitintervall  $(t, t + dt)$  genügen den Gleichungen

$$\eta(t) = \lambda(t) + \int_0^t \omega(\tau) \lambda(t - \tau) d\tau, \quad \omega(t) = \varphi(t) + \int_0^t \omega(\tau) \varphi(t - \tau) d\tau$$

mit

$$\lambda(t) = \int_0^t \beta(\tau) A(t - \tau) d\tau, \quad A(l) = \int_l^\infty \alpha(x) dx, \quad \varphi(t) = \int_0^t \beta(\tau) \alpha(t - \tau) d\tau,$$

die mittels Laplace-Transformation  $G^*(s) = \int_0^\infty e^{-st} G(t) dt$  gelöst werden:

$$\eta(t) = \frac{1}{2\pi i} \int_{c-i\infty}^{c+i\infty} e^{st} s^{-1} \beta^*(s) [1 - \alpha^*(s)] [1 - \alpha^*(s) \beta^*(s)]^{-1} ds.$$

Verf. beweist: Wenn  $\int_0^\infty l \alpha(l) dl$  und  $\int_0^\infty m \beta(m) dm$  existieren und  $\alpha(t), \beta(t)$  und  $t \lambda(t)$  für  $t \rightarrow \infty$  gegen 0 konvergieren, folgt aus  $\omega(t) \rightarrow B$  für  $t \rightarrow \infty$  notwendig  $\eta(t) \rightarrow C$  für  $t \rightarrow \infty$ .

*M. P. Geppert.*

**Akaike, Hirotugu: On a zero-one process and some of its applications.** Ann. Inst. statist. Math. 8, 87—94 (1956).

Es sei  $\{x_n(\omega); n = 0, 1, \dots\}$  ein stochastischer Prozeß mit  $x_0(\omega) = 1$ ,  $x_n(\omega) = 0$  oder 1, der durch die „Lücken-Verteilung“  $p\{x_{n+1} = x_{n+2} = \dots = x_{n+r-1} = 0; x_{n+r} = 1 | x_n = 1\} = p_r$  mit  $\sum p_r = 1$  definiert ist.  $P_n = p\{x_n = 1\}$  ist dann rekursiv gegeben durch  $P_0 = 1$ ,  $P_\mu = \sum_{r=1}^{\mu} p_r P_{\mu-r}$ . Ist der größte gemeinsame Teiler aller  $r$ , für die  $p_r > 0$ , gleich eins, dann gilt  $\lim_{n \rightarrow \infty} P_n = P = 1/L$  mit  $L = \sum r p_r = E\{r\}$ .

Allgemein heißt ein stochastischer Prozeß  $\{x_n(\omega), -\infty < n < \infty\}$  ein Lückenprozeß, wenn die  $x_n(\omega)$  fast überall in  $\omega$  nur 0 oder 1 sind und  $p\{x_n = 1, x_{n+r_1} = 1, \dots, x_{n+r_1+\dots+r_k} = 1\} = P P_{r_1} \dots P_{r_k}$  mit  $P, P_r$  aus einer Lückenverteilung  $\{p_r\}$ . Dieser Prozeß ist streng stationär mit  $E[x] = P$  und  $R(n) = P(P_n - P)$ . Es wird folgender Satz bewiesen: Wenn  $p_{r_i} \neq 0$ ,  $i = 1, \dots, \mu$ , und  $\sum_{i=1}^{\mu} p_{r_i} = 1$ ,  $(r_1, \dots, r_\mu) = 1$ , dann hat der Prozeß  $\{x_n - P\}$  die spektrale Dichte

$$G'(\lambda) = 2R(0) + 4 \sum_{n=1}^{\infty} R(n) \cos 2\pi n \lambda.$$

Die Konstruktion dieses Prozesses nimmt die Existenz einer maximalen Lücke der Länge  $r_\mu$  an, was praktischen Anwendungen in der Regel nicht entgegensteht. — Der Poissonprozeß nimmt eine exponentielle Wahrscheinlichkeit für das Eintreten einer Lücke bestimmter Länge zwischen zwei Einzelereignissen an. Dies ist gleichbedeutend damit, daß die Anzahlen von Ereignissen in sich nicht überdeckenden Zeitabschnitten voneinander unabhängig sind. Verf. beschreibt zwei praktische Beispiele, die in erster Näherung durch einen Poissonprozeß, in besserer Näherung durch einen Lückenprozeß der hier besprochenen Art gedeutet werden können.

F. Wever.

**Dvoretzky, Aryeh: On stochastic approximation.** Proc. 3rd Berkeley Sympos. math. Statist. Probability 1, 39—55 (1956).

The author regards stochastic approximation as a “deterministic” iterative procedure in classical analysis with a random component added to it. Denoting any convergent “deterministic” iterative procedure by

$$(a) \quad x_{n+1} = T_n(x_1, x_2, \dots, x_n) \quad (n = 1, 2, \dots)$$

he uses the following model for stochastic approximation:

$$(b) \quad X_{n+1} = T_n(X_1, X_2, \dots, X_n) + Y_n \quad (n = 1, 2, \dots),$$

where the  $Y$ , hence the  $X$ , are random variables. This opens a way of attack on a multitude of stochastic approximation problems which have not been considered heretofore. Imposing the conditions

$$(c) \quad E\{X_1^2\} < \infty; \sum_{n=1}^{\infty} E\{Y_n^2\} < \infty; E\{Y_n | x_1, \dots, x_n\} = 0 \text{ (with probability 1 for all } n)$$

upon the random variables  $X$  and  $Y$  and a condition, too lengthy to describe here, upon the above deterministic scheme (a), the author proves that the stochastic scheme (b) converges to the limiting value of the deterministic scheme (a). More precisely, he proves mean-square convergence and convergence with probability one, no convergence in distribution, no asymptotic distribution-theory. Thus he generalizes and, at the same time, sharpens a number of previous results of various authors. After the proof, which takes about four pages and is less transparent than the basic idea of the paper, a fair number of generalizations is given by which the conditions (c) on the  $X$  and  $Y$  and/or the conditions on the scheme (a) are appreciably weakened. However, a counterexample in section 6 then shows that even if the random variables  $X$  and  $Y$  are subjected to the relatively strong conditions (c), mere convergence of the deterministic scheme (a) is not sufficient for the convergence (even in probability) of the stochastic iteration (b). The author then applies his general results to the specific problems of Robbins-Monro and Kiefer-Wolfowitz

and in this way achieves notable improvements over some of the best results obtained by previous authors working on these specific problems. In section 8 a rule is given by which to choose the best (unique minimax in a non-asymptotic sense) Robbins-Monro scheme in the quasi-linear case. Finally a few remarks are made as to the case of random variables in normed linear spaces. The reviewer recorded a few printing errors: in line 5 of the second paragraph of section 6 the equation number (5. 1) is to be replaced by (6. 1); equation (7. 3) on p. 50 should read  $x_{n+1} = x_n - a_n z_n$ , where  $z_n$  is an observation on the random variable  $Z_{x_n}$ ; in equation (7. 5)  $a_n$  should be replaced by  $b_n$ ; it seems that assumption (7.10) should read  $E \{ [Z_u - f(u)]^2 \} \leq \sigma^2 < \infty$ ; the final term in (8. 4) should contain an additional factor  $F_1^2$ .

H. R. van der Vaart.

Čencov (Čentsov), N. N.: La convergence faible des processus stochastiques à trajectoires sans discontinuités de seconde espèce et l'approche dite „heuristique“ au tests du type de Kolmogorov-Smirnov. Teor. Verojatn. Primen. **1**, 155—160, engl. Zusammenfassg. 161. (1956) [Russisch].

A sequence of stochastic processes  $\xi_n(t)$  is weakly convergent to the stochastic process  $\xi_0(t)$ , if for any fixed set of time instants  $t_1, t_2, \dots, t_m$  the multivariate distribution function of the variables  $\{\xi_n(t_1), \dots, \xi_n(t_m)\}$  is weakly convergent to the corresponding multivariate distribution function of  $\{\xi_0(t_1), \dots, \xi_0(t_m)\}$ . The main result obtained by the author is the following: if (i) the sequence of separable stochastic processes  $\xi_n(t)$  is weakly convergent to the separable stochastic process  $\xi_0(t)$ ; (ii) the following condition is verified  $M |\xi_n(t_1) - \xi_n(t_2)|^p |\xi_n(t_2) - \xi_n(t_3)|^q < C |t_1 - t_3|^{1-r}$ , where  $p \geq 0, q \geq 0, r \geq 0, t_1 < t_2 < t_3, C$  a constant independent of  $n$  and  $t$ ; (iii) there exist two piecewise continuous functions  $g(t)$  and  $f(t)$  ( $g(t) < f(t)$ ) which are respectively upper and lower semicontinuous at discontinuity points so that

$\mathbf{P} \{g(t) + z \leq \xi_0(t) \leq f(t) - z; \text{ for all } t\} \xrightarrow{z \rightarrow +0} \mathbf{P} \{g(t) \leq \xi_0(t) \leq f(t); \text{ for all } t\}$ ,  
then  $\mathbf{P} \{g(t) \leq \xi_n(t) \leq f(t); \text{ for all } t\} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \mathbf{P} \{g(t) \leq \xi_0(t) \leq f(t); \text{ for all } t\}$ .

Finally, applications of this theorem to some tests are given. R. Theodorescu.

Dugué, Daniel: Incompatibilité de la convergence presque certaine et de l'écart. C. r. Acad. Sci., Paris **242**, 728—729 (1956).

In a probability space, consider all random „variables“  $X$  the values of which are elements of one and the same topological space. These random variables constitute a so-called stochastic space,  $\mathcal{X}$ , in which convergence in probability as well as almost sure convergence may be defined in an obvious manner. It is shown that, if these convergences are not equivalent, then there exists no semidistance in  $\mathcal{X}$ , i. e., no nonnegative function  $\varphi(X, Y)$  such that  $\varphi(X_n, X) \rightarrow 0$  is equivalent with  $X_n \rightarrow X$  a. s.

G. Elfving.

Geffroy, Jean: Sur une propriété de l'écart maximum entre les fonctions de répartition théorique et empirique d'un échantillon de  $n$  points à deux dimensions. C. r. Acad. Sci., Paris **242**, 2283—2285 (1956).

Let  $F(x, y)$  be the c. d. f. of a continuous twodimensional distribution, and let  $F_n(x, y)$  denote the corresponding empirical c. d. f. based on a sample of  $n$ . Let  $D_n = \max_{x, y} |F - F_n|$ . It is shown that, in contrast to the one-dimensional case, the distribution of  $D_n$  does depend on the joint distribution of  $x, y$ . G. Elfving.

Leader, Solomon: Convergence topologies for measures and the existence of transition probabilities. Pacific J. Math. **6**, 479—490 (1956).

Reprenant le point de vue de F. Riesz et Ito, l'A. considère les mesures comme des opérateurs, introduit diverses topologies dans l'espace des mesures (appelées topologie de la convergence simple, de la convergence bornée, de la convergence régulière) en signalant les inconvénients de certaines définitions classiques et étudie les propriétés de l'espace dual de l'espace des mesures. Ces notions lui permettent d'étudier l'existence des probabilités de passage dans les semi-groupes stochastiques.

R. Féron.



Špaček, Antonín: Zufällige Mengenfunktionen. Math. Nachr. 14, 355—360 (1956).

Dans cet article l'A. démontre plusieurs propositions concernant les espaces probabilisés  $\{F, \mathcal{F}, \mu\}$  (fonctions aléatoires d'ensemble) où  $F$  est l'ensemble des fonctions réelles définies sur une  $\sigma$ -algèbre  $S$  de parties d'un ensemble  $X$  et  $\mathcal{F}$  la  $\sigma$ -algèbre engendrée par  $\{\{\varphi | \varphi \in F, \varphi(A) < r\} | A \in S, r \text{ nombre réel}\}$ . Il donne d'abord des conditions nécessaires et suffisantes pour qu'on ait  $\mu(W) = 1$ , où  $W$  est l'ensemble des probabilités appartenant à  $F$ , ayant pour base une probabilité  $P$  définie sur  $S$  et  $\bar{\mu}$  la mesure extérieure, extension de  $\mu$ . Nous citons en particulier le théorème suivant: Si  $S$  est séparable, on a  $\mu(W) = 1$ , si et seulement si: a)  $\mu(\{\varphi | \varphi \in F, \varphi(A) \geq 0\}) = 1$  pour  $A \in S$ ; b)  $\mu(\{\varphi | \varphi \in F, \varphi(A \cup B) = \varphi(A) + \varphi(B)\}) = 1$  pour  $A, B \in S, A \cap B = \emptyset$ ; c)  $\mu(\{\varphi | \varphi \in F, \varphi(X) = 1\}) = 1$ ; d) pour  $\varepsilon > 0, \delta > 0$  il existe  $\varrho(\varepsilon, \delta) > 0$  tel que pour toute partie finie  $D \subset S$  on a

$$\mu\left(\left\{E \in D; P(E) < \varrho(\varepsilon, \delta)\right\} \{\varphi | \varphi \in F, \varphi(E) < \varepsilon\}\right) \geq 1 - \delta.$$

Ensuite, l'auteur considère l'ensemble  $M$ , des probabilités appartenant à  $F$ , muni de la distance usuelle, et établit quelques relations concernant la  $\sigma$ -algèbre des parties boréliennes de l'espace métrique  $M$  et la  $\sigma$ -algèbre  $\mathcal{F}$ . L'article se termine par un résultat sur la différentiation des fonctions aléatoires d'ensemble.

C. T. Ionescu Tulcea.

Špaček, Antonín: Sur l'inversion des transformations aléatoires presque sûrement linéaires. Acta math. Acad. Sci. Hungar. 7, 355—358, russ. Zusammenfassg. 358 (1956).

Etant donné un espace séparable du type  $G$  de Banach (groupe topologique distancié)  $X$ , une application aléatoire (définie par  $F, \mathcal{F}, \mu$ ) de  $X$  dans  $X$  sera dite presque sûrement linéaire au sens de l'A., si la mesure extérieure de l'ensemble  $T(X)$  des applications  $f \in F$  telles que  $f(x + y) = f(x) + f(y)$  et  $\varrho(f(x), f(y)) \leq C \varrho(x, y)$  (où  $C$  est une constante fixe pour tout  $f \in T(X)$ ) est égale à l'unité. L'A. donne une condition nécessaire et suffisante pour qu'une application soit presque sûrement linéaire et donne des conditions suffisantes pour que l'inverse d'une telle transformation aléatoire soit presque sûrement mesurable. R. Féron.

Mourier, Edith:  $L$ -random elements and  $L^*$ -random elements in Banach spaces. Proc. 3rd Berkeley Sympos. math. Statist. Probability 2, 231—242 (1956).

Une catégorie probabilisée d'épreuves étant définie par  $(U, T, m)$ , toute application  $x$  de  $U$  sur l'espace de Banach  $X$ , telle que  $\langle x^*, x(u) \rangle$  soit mesurable pour tout  $x^* \in X^*$  ( $X^*$  étant le dual fort de  $X$ ) définit un  $L$ -élément aléatoire dont on étudie les propriétés. De même toute application  $x^*(u)$  de  $U$  dans  $X^*$  telle que  $\langle x^{**}, x^*(u) \rangle$  soit mesurable pour tout  $x^{**} \in X$  définit un  $L^*$ -élément aléatoire.

L'A. donne notamment des généralisations de la loi forte des grands nombres, de la loi des grands nombres en moyenne d'ordre  $\lambda$  et du théorème central limite. Dans les démonstrations, la généralisation de Kolmogoroff de la notion de fonction caractéristique se révèle particulièrement précieuse et se prête à une généralisation du théorème de Bochner. L'A. donne de nombreuses applications pratiques de ces théorèmes, notamment aux fonctions statistiques de von Mises. R. Féron.

Bharucha-Reid, A. T.: On random elements in Orlicz spaces. Bull. Acad. Polon. Sci., Cl. III 4, 655—657 (1956).

L'A. donne sans démonstration deux énoncés de la loi des grands nombres pour les éléments aléatoires (au sens de Mourier) dans un espace de Orlicz. (Cf. Orlicz, *ce Zbl.* 6, 315.) R. Féron.

Lévy, Paul: Une nouvelle classe de fonctions symboliques: Les  $\sigma$ -fonctions. Bull. Sci. math., II. Sér. 80, 83—96 (1956).

Die beim Studium von Zufalls-Gauß-Prozessen bereits vom Verf. eingeführten  $\sigma$ -Funktionen (*dies. Zbl.* 70, 329) lassen sich als Elemente einer Erweiterung eines

$L_2$ -Hilbert-Raumes auffassen. Wird ein solcher Zufallsprozeß durch

$$X_n(V) = \int_V f_n(x) \varphi_x \sqrt{d\mu(x)}$$

( $V$  = Teilmengen des euklidischen Raumes,  $f_n$  = quadratisch integrierbare Funktionen,  $\varphi_x$  = unabhängige normalverteilte Zufallsgrößen) gegeben, so gilt

$$E(X_n(V) X_m(W)) = \int_{V \cap W} f_n(x) f_m(x) d\mu(x).$$

Der Faktor  $(*) f_n(x) \sqrt{d\mu(x)/dx}$  (falls vorhanden) ist eine „ $\sigma$ -Funktion“. Diese durch ihre Kovarianzen gegebenen Prozesse bzw. die ihnen entsprechenden Kurven in einem hinreichend großen Hilbert-Raum definieren umgekehrt alle solche  $\sigma$ -Funktionen, deren „kanonische Darstellung“  $(*)$  bis auf einen Faktor vom Betrage 1 bestimmt ist. Der Fischer-Rießsche Vollständigkeitssatz wird nachgewiesen, die Zerlegung einer  $\sigma$ -Funktion bez. einer anderen (entsprechend Karhunen bzw. Lebesgue) wird angegeben und auf weitere Verallgemeinerungen durch Verwendung unbeschränkt zerlegbarer oder stabiler Verteilungen an Stelle der Normalverteilungen wird hingewiesen.

*D. Morgenstern.*

**Kampé de Fériet, J.:** Random solutions of partial differential equations. Proc. 3rd Berkeley Sympos. math. Statist. Probability **3**, 199—208 (1956).

L'A. étudie ici la solution des équations aux dérivées partielles aux conditions aux limites aléatoires: Etant donnée l'équation aux dérivées partielles (1)  $\mathfrak{A}(u) = 0$  et le domaine ouvert  $D$  de frontière  $C$ , on se propose de trouver une fonction aléatoire  $u_\omega(P)$  (définie sur  $D$  au moyen de l'espace de probabilité  $\{\Omega, F, \mu\}$ ) à laquelle correspond la fonction aléatoire  $f_\omega(A)$  définie sur  $C$ . Ce qui signifie que a) pour tout  $\omega_0 \in \Omega - A$  [où  $\mu(A) = 0$ ] la fonction  $u_{\omega_0}(P)$  est une solution régulière de (1) et prend la valeur  $f_{\omega_0}(A)$  sur  $C$ ; b) pour tout  $P \in D$ ,  $u_\omega(P)$  est  $\mu$ -mesurable. L'A. traite ensuite en détail deux cas particuliers d'équations différentielles elliptiques et paraboliques sur lesquels il démontre des théorèmes d'existence et d'unicité. Il parvient ainsi à donner l'expression analytique des fonctions harmoniques aléatoires sur le cercle unité, ainsi que celle des solutions aléatoires de l'équation de la chaleur sur une barre infinie.

*R. Féron.*

**Bljumentfel'd (Blumenfeld), V. N.:** On the uniqueness of limit distribution for a system of stochastic differential equations. Doklady Akad. Nauk SSSR **111**, 739—741 (1956) [Russisch].

Let us consider the bidimensional forward Kolmogorov equation

$$(*) \quad \frac{\partial p}{\partial t} = - \frac{\partial(A_1 p)}{\partial x} - \frac{\partial(A_2 p)}{\partial y} + \frac{1}{2} \left[ \frac{\partial^2(B_1 p)}{\partial x^2} + 2 \frac{\partial^2(C p)}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2(B_2 p)}{\partial y^2} \right],$$

( $B_1 B_2 - C^2 \geq 0$ ) and suppose that conditions under which there exists a continuous solution of  $(*)$  satisfying the initial condition  $(**)$   $p(x, y, 0) = p_0(x, y)$  are verified. Assuming that the domain of  $x$  and  $y$  is the entire plane, the author proves that the equation  $(*)$  for  $0 < t < T$  has a unique continuous solution satisfying  $(**)$ , if A. for any fixed  $t = t^0$ ,  $\lim_{R \rightarrow \infty} \left[ \max_{x^2 + y^2 \geq R^2} p(x, y, t^0) \right] = 0$ ; B.  $p(x, y, t)$

is a continuous function of  $t$ , uniformly with respect to  $x$  and  $y$ . *R. Theodorescu.*

**Miller, Irwin and John E. Freund:** Expected arc length of a Gaussian process on a finite interval. J. roy. statist. Soc., Ser. B **18**, 257—258 (1956).

The expected arc length of a stationary Gaussian process is given by the help of a function introduced by Erdelyi.

*H. Bergström.*

**Mihoc, G.:** Sur les lois limites des variables vectorielles enchaînées au sens de Markoff. Teor. Verojatn. Primen. **1**, 103—112, russ. Zusammenfassg. 112 (1956).

Verf. beweist folgendes Theorem: Sind  $v(j)$ ,  $j = 1, 2, \dots$ , zufällige  $s$ -dimensionale Vektoren, die eine einfache und konstante Markoffsche Kette bilden, deren Werte  $v^1, v^2, \dots, v^m$  einer einzigen Endmenge angehören, dann hat der zufällige

Vektor

$$\frac{1}{\sqrt{n}} \left[ \sum_{j=1,2,\dots,n} v(j) - n a \right].$$

— wobei  $a$  ein entsprechender  $s$ -dimensionaler Vektor ist — ein asymptotisches Gaußsches  $s$ -dimensionales Verteilungsgesetz. Wenn  $s \geq m$ , dann ist das asymptotische Gesetz ein singuläres, dessen Rang kleiner oder gleich  $m - 1$  ist. Wenn  $s < m$ , — ausgenommen spezielle Fälle, für welche der Verf. nicht nur Beispiele, sondern auch theoretische Erklärungen gibt —, so ist das asymptotische Verteilungsgesetz ein nichtsinguläres. Die Methode, die Verf. für den Nachweis dieses Theorems verwendet, ist die der charakteristischen Funktionen, betrachtet als Objekte eines linearen Operators eines diesbezüglichen Banachschen Raumes. Die erschöpfende Analyse, zu der diese Methode führt, ist auch in diesem Falle ein neuer Beweis ihrer Stärke.

*O. Onicescu.*

**Ambarcumjan, G. A.:** Die Momente der Verteilung eines Markovschen Prozesses. Akad. Nauk Armjan. SSR, Izvestija, Ser.-fiz.-mat. estestv. techn. Nauk 9, Nr. 5, 25—41 (1956) [Russisch].

The author considers real valued Markov processes,  $X(t)$ , with transition probability distributions  $F(s, x, t, y) = P\{X(t) < y | X(s) = x\}$  and initial distributions  $G(0, x) = P\{X(0) < x\}$ . These are assumed to have densities and to be solutions of Kolmogorov's differential equations. Adding, when needed, additional conditions on the regularity of these densities, the author derives differential equations involving the moments,

$$E\{[X(s)]^i [X(t)]^j\} = \iint x^i y^j g(s, x) f(s, x, t, y) dx dy$$

( $i, j = 0, 1, 2, \dots$ ), for the stationary and non stationary cases. Since the differential equations also involve expectations of  $\lim_{\Delta \rightarrow 0} \frac{1}{\Delta} \int (y - x)^p f(s, X, s + \Delta, y) dy$ , ( $p = 1, 2$ ), they are useful in finding moments only when these functions are polynomials. Several examples of this sort are worked out.

*L. Cote.*

**Ray, Daniel:** Stationary Markov processes with continuous paths. Trans. Amer. math. Soc. 82, 452—493 (1956).

The paper is concerned with the relation of the continuity properties of paths of Markov processes to properties similar to those considered by Feller (this Zbl. 57, 98). Let  $P(x, t, E)$  be a stationary transition probability function on the real line  $R$ . For each point  $x \in R$ , denote by  $\Omega_x$  the space of paths  $\omega = x(\cdot, \omega)$  in the extended real line  $R^+$ :  $-\infty \leq x(\tau, \omega) \leq +\infty$ ,  $\tau \geq 0$ , verifying the following conditions: 1°  $x(0, \omega) = x$ ; 2° for every compact subset  $F \subset R$ , for every  $t_0 > 0$ , and for every  $\delta > 0$ , there is  $\Delta > 0$  so that  $|x(t, \omega) - x(t', \omega)| \leq \delta$  whenever  $0 \leq t < t' < t + \Delta \leq t_0 + \Delta$ ,  $x(t, \omega) \in F$ . Let  $\Pr\{\cdot | x\}$  be for each  $x$  a measure defined on the Borel field of subsets of  $\Omega_x$  generated by cylinder sets and: 1°  $\Pr\{\Omega_x | x\} = 1$ ; 2°  $P(x, t, E) = \Pr\{x(t, \omega) \in E | x\}$  for  $x \in R$ ,  $t \geq 0$ ,  $E$  a Borel subset of  $R$ , defines stationary transition probabilities on  $R$ ; 3° for every cylinder set in  $\Omega_x$ ,  $\Pr\{x(\tau_j, \omega) \in E_j, j = 1, \dots, n | x\} = \int_{E_1} \dots \int_{E_n} P(x, \tau_1, dy_1) P(y_1, \tau_2 - \tau_1, dy_2) \dots P(y_{n-1}, \tau_n - \tau_{n-1}, dy_n)$ . Each pair  $\{\Omega_x, \Pr\{\cdot | x\}\}$  forms a Markov process; one will say that the collection of Markov processes is determined from stationary transition probabilities. It is assumed that each measure  $\Pr\{\cdot | x\}$  has been completed on  $\Omega_x$ . Denote by  $E\{\Phi(\omega) | x\}$  the integral of a function  $\Phi$  defined on  $\Omega_x$  and by  $E\{\Phi(\omega), \omega \in A | x\}$  the integral over a measurable subset  $A$  of  $\Omega_x$ . Consider now a point  $x \in R$  and let  $(\Omega_x, \Pr\{\cdot | x\})$  be a Markov process on  $R$ , whose paths have the properties mentioned above. For any interval  $I \subset R$ ,  $x \in I$ , let  $\mathcal{I}_I(\omega) = \mathcal{I}_I(\omega, x) = \inf\{\tau \geq 0 | x(\tau, \omega) \notin I\}$  for each  $\omega \in \Omega_x$ . If  $I$  is bounded,  $x(\mathcal{I}_I(\omega), \omega)$  can only be one of the two end points  $a_1$  and  $a_2$  of  $I$  and the distribution function of the first



passage time satisfies the following relation

$$(*) \quad \Pr \{ \mathcal{I} \leq t | x \} = \Pr \{ J_I \leq t, x(\mathcal{I}) = a_1 | x \} + \Pr \{ \mathcal{I} \leq t, x(\mathcal{I}) = a_2 | x \} = \\ = P_0(t, x; I, a_1) + P_0(t, x; I, a_2).$$

A point  $y \in R$  is accessible from the right (left) with respect to the process  $(\Omega_x, \Pr \{ \cdot | x \})$ , if there exists a bounded open interval  $I$  whose left (right) end point is  $y$ , for which  $P_0(t, x; I, y)$  does not vanish for all  $t > 0$ . The strong Markov property for linear processes is formulated as follows: if  $I = (a_1, a_2)$ ,  $x \in I$ , if  $f$  is a bounded Borel measurable function on  $R$  and if  $t > 0$ , then

$$(**) \quad E \{ f(x(t)) | x \} = E \{ f(x(t)); \mathcal{I} > t | x \} + \\ + \int_0^t E \{ f(x(t-t')) | a_1 \} d_t' P_0(t', x; I, a_1) + \int_0^t E \{ f(x(t-t')) | a_2 \} d_t' P_0(t', x; I, a_2).$$

The processes  $\{ \Omega_x, \Pr \{ \cdot | x \} | x \in R \}$  satisfy the first passage time relation if  $(**)$  holds true for any  $f, t, x$  and  $I$ . The author suggests the following definition for diffusion processes: a collection  $\{ \Omega_x, \Pr \{ \cdot | x \} | x \in R \}$  of Markov processes on the real line determined from stationary transition probabilities is a diffusion process if the space  $\Omega_x$  for each  $x \in R$  has the properties mentioned above and if the processes satisfy the first passage time relation  $(**)$ . We can now state the main results given by the author: let  $\{ \Omega_x, \Pr \{ \cdot | x \} | x \in R \}$  be a collection of Markov processes determined from stationary transition probabilities on the real line  $R$ , with the path spaces  $\{ \Omega_x | x \in R \}$  described as above. For each point  $x \in R$ , let  $P_0(t, x; I, a_j)$  be the distribution function of the first passage time from the bounded open interval  $I$  by way of its end point  $a_j$ , as defined in  $(*)$ : A. The processes are connected by the first passage time relation  $(**)$  if for every bounded continuous function  $f$  on  $R$

and for every  $s > 0$ , the Laplace transform  $R_s f(x) = \int_0^\infty E \{ f(x(t)) | x \} e^{-st} dt$ ,

$x \in R$ , is right (left) continuous at every point which is right (left) accessible with respect to at least one process  $(\Omega_x, \Pr \{ \cdot | x \})$ . B. Conversely, if the processes are connected by the first passage time relation  $(**)$ , then for every  $x \in R$ , for every bounded Borel measurable function  $f$  on  $R$  for which  $f(x+)f(x-)$  exists, and for every  $s > 0$ ,  $R_s f$  has right (left) limits at  $x$ ; the same statement holds if  $x = \pm \infty$ . Except for at most a countable number of points, independent of  $f$  and  $s$ ,  $R_s f$  is continuous at every point  $x$  where  $f$  is continuous; the exceptional points are all inaccessible from either the right or the left for each process  $(\Omega_x, \Pr \{ \cdot | x \})$  (theorem I). It is also proved that if  $P(x, t, E)$  are stationary transition probabilities on the real line  $R$ , then either of the two following conditions is sufficient that there be a collection of Markov processes  $\{ \Omega_x, \Pr \{ \cdot | x \} | x \in R \}$  determined from the given transition probabilities, with each path space  $\Omega_x$ ,  $x \in R$ , described as above: A. 1° for every bounded continuous function  $f$  on  $R$  and for every  $t > 0$ ,  $\int f(y) P(x, t, dy)$  is a continuous function of  $x$  in  $R$ , 2. for every  $x \in R$  and for every  $\delta > 0$ ,  $\lim_{t \rightarrow 0} t^{-1} P(x, t, I'(x, \delta)) = 0$ , where  $I'(x, \delta)$  is the

complement of  $I(x, \delta) = (x - \delta, x + \delta)$ . B. For every  $\delta > 0$  and for every bounded interval  $F \subset R$ ,  $\lim_{t \rightarrow 0} t^{-1} P(x, t, I'(x, \delta)) = 0$  uniformly for  $x \in F$

(theorem II). Several corollaries of these theorems are examined. Finally, five examples are discussed.

R. Theodorescu.

Harris, T. E.: The existence of stationary measures for certain Markov processes. Proc. 3rd Berkeley Sympos. math. Statist. Probability 2, 113—124 (1956).

For recurrent Markov chains (countable state space), Derman [Proc. Amer. math. Soc. 5, 332—334 (1954)] proved that there is a set of numbers  $q_j$ , not all zero, given to a positive constant multiplier, which form an essentially unique stationary

measure, i. e.  $q_i = \sum_j q_j p_{ji}$  ( $i = 0, 1, \dots$ ). An analogous result is proved here for Markov processes (arbitrary state space). Let  $\{x_n\}$  be a Markov process with stationary transition function  $P(x, E)$  whose state space,  $X$ , is a separable measure space, and which satisfies a recurrence condition, to wit: a sigma finite measure  $m(E)$  is defined on the measurable sets of  $X$  so  $m(E) > 0$  implies  $P\{x_n \in E \text{ i. o. } |x_0\} = 1$  for all  $x_0 \in X$ . Then there is a stationary measure — a sigma finite measure  $Q(E)$ , defined on the measurable sets of  $X$ , satisfying  $Q(E) = \int_x Q(dx) P(x, E)$  for all measurable  $E \subset X$ .  $Q(E)$  is unique to a constant multiplier and  $m(E)$  is absolutely continuous with respect to it. The proof is divided into six lemmas and has some similarity to that of the countable case.

L. Cote.

**Chung, K. L. and C. Derman: Non-recurrent random walks.** Pacific J. Math. 6, 441—447 (1956).

Es wird eine Folge von unabhängigen zufälligen Größen  $X_j$  ( $j = 1, 2, \dots$ ) betrachtet, welche das gleiche Verteilungsgesetz und als Werte nur ganze Zahlen haben, die zueinander prim sind. K. L. Chung und W. H. J. Fuchs haben gezeigt, daß  $S_n = \sum_{j \leq n} X_j = x$  für eine unendliche Zahl von Werten  $n$  mit der Wahrscheinlichkeit 1 gilt, wenn  $\bar{X}_j = 0$ , oder für eine endliche Zahl von Werten von  $n$  ebenfalls mit der Wahrscheinlichkeit 1 gilt, wenn  $\bar{X}_j \neq 0$  (vorausgesetzt daß  $\bar{X}_j < \infty$ ). Die Verff. beweisen folgende Sätze: (i) Wenn  $\bar{X}_j = \mu$ ,  $0 < \mu < \infty$  und  $A$  eine Menge von unendlich vielen positiven ganzen Zahlen ist, dann haben wir, mit der Wahrscheinlichkeit 1,  $S_n \in A$  für unendlich viele Werte von  $n$ . (ii) Wenn aber  $\bar{X}_j = \infty$ , dann existiert eine Menge  $A$ , welche unendlich viele ganze Zahlen umfaßt, für welche wir, mit der Wahrscheinlichkeit 1,  $S_n \in A$  nur für eine endliche Zahl von Werten von  $n$  haben. Die Beweise stützen sich auf die Beobachtung, daß die  $S_n$  eine Markoffsche Kette bilden. Die Verff. untersuchen auch den speziellen und besonders interessanten Fall, daß alle Veränderlichen eine (gemeinsame) Verteilungsdichte haben.

O. Onicescu.

**Derman, Cyrus: A note on nonrecurrent random walks.** Proc. Amer. math. Soc. 7, 762—765 (1956).

Verf. erforscht einige besondere asymptotische Eigenschaften betreffs der Dichte  $h(x)$ , die in der vorstehend besprochenen Arbeit definiert wird. [Sei  $H(x) = \sum_{n=0}^{\infty} P(S_n < x)$ . Dann existiert  $H'(x)$  außer auf einer Menge  $N_0$  vom Lebesgueschen Maß Null. Wir setzen  $h(x) = H'(x)$  für  $x \notin N_0$ ,  $h(x) = 1$  für  $x \in N_0$ ,  $x \geq 0$ ,  $h(x) = 0$  für  $x \in N_0$ ,  $x < 0$ .] Verf. beweist hier, als Folge eines ergodischen Satzes bezüglich der Markoffschen Kette, folgende Behauptung: (i) Wenn  $\mu < \infty$  und  $\limsup_{x \rightarrow \infty} h(x) < \infty$ , dann ist  $\liminf_{x \rightarrow \infty} h(x) > 0$  und folglich

$$(1) \quad P(S_n \in A) = 0 \text{ für unendlich viele } n, \quad m(A) < \infty,$$

$$(2) \quad P(S_n \in A) = 1, \text{ für unendlich viele } n, \quad m(A) = \infty,$$

wobei  $A$  eine Borelsche Menge von positiven reellen Zahlen und  $m(A)$  ihr Lebesguesches Maß ist. (ii) Wenn  $\liminf_{x \rightarrow \infty} h(x) > 0$ , dann gilt (1). (iii) Wenn  $\mu < \infty$  und wenn eine Konstante  $\alpha > 0$  und ein Intervall  $(a, b)$  existieren, so daß  $f(x) > \alpha$  für  $x \in (a, b)$ ; dann ist  $\liminf_{n \rightarrow \infty} h(x) > 0$ .

O. Onicescu.

**Feller, William and Henry P. McKean jr.: A diffusion equivalent to a countable Markov chain.** Proc. nat. Acad. Sci. USA 42, 351—354 (1956).

Es wird ein interessantes Beispiel eines stationären Markoffschen Prozesses mit abzählbar vielen Zuständen, den rationalen Zahlen  $r_i$  in  $[0, 1]$ , gegeben. Ausgehend von der Diffusionsgleichung  $u_t(t, x) = D_{m(x)} D_x[u(t, x)]$  mit geeigneten Rand-

bedingungen, wobei  $D_x$  die partielle Differentiation nach  $x$ ,  $D_{m(x)}$  die Differentiation bezüglich der Belegung  $m(x) = \sum_{r_i < x} m_i$  ( $m_i > 0$ ;  $\sum m_i < \infty$ ) bezeichnet, und unter Benutzung der Halbgruppentheorie wird gezeigt, daß ein Markoffscher Prozeß mit den rationalen Punkten  $r_i$  als Zuständen entsteht, bei dem, im Gegensatz zu einer Bemerkung bei P. Lévy [Ann. sci. École. norm. sup., III. Sér. 68, 327—381 (dies. Zbl. 44, 338), insbes. p. 375] alle Zustände instabil sind. Weiterhin werden für diesen Prozeß auch die Analoga der Kolmogoroffschen Gleichungen aufgestellt.

*D. Morgenstern.*

**Fuchs, Aimé et Jean-Pierre Vigier:** *Tendance vers un état d'équilibre stable de phénomènes soumis à une évolution markovienne.* C. r. Acad. Sci., Paris 242, 1120—1122 (1956).

Let  $F(t, x; \tau, E)$  and  $\Phi(t, E)$  be the transition and the absolute probability function, respectively, of a Markov process. Extending work of Doob, the present paper enounces sufficient conditions for the exponential convergence of  $\Phi(t, E)$  to a limiting distribution. The conditions are given separately for the time-homogeneous, and the general case.

*G. Elfving.*

**Sarmanov, O. V.:** *The necessary and sufficient conditions for the existence of a discrete limit law in the Markoff chain of two states.* Doklady Akad. Nauk SSSR 110, 735—738 (1956) [Russisch].

Für  $n = 1, 2, \dots$  seien einfache, zeitlich nicht notwendig homogene Markoffsche Ketten mit zwei Zuständen  $A$  und  $\bar{A}$  gegeben. In der  $n$ -ten Kette seien für das Eintreten von  $A$  die zugehörigen Wahrscheinlichkeiten:  $p_{1,n}$  beim 1. Glied,  $\alpha_{k,n}$  (bzw.  $\beta_{k,n}$ ) beim Übergang vom  $(k-1)$ -ten zum  $k$ -ten Glied der Kette, wenn vorher Zustand  $A$  (bzw.  $\bar{A}$ ) herrschte. Erfüllt seien die Bedingungen (B):  $\lim_{n \rightarrow \infty} p_{1,n} = p_1$  und  $\lim_{n \rightarrow \infty} \beta^{(n)} = 0$ , wobei  $\beta^{(n)} = \sup_{2 \leq k \leq n} \beta_{k,n}$  ist.  $P_{s,n}$  sei die Wahrscheinlichkeit dafür, daß bei der  $n$ -ten Kette der Zustand  $A$  genau  $s$ -mal unter den ersten  $n$  Gliedern vorkommt. Man spricht von einem diskreten Grenzwesetz, wenn die Beziehungen (G<sub>1</sub>):  $\lim_{n \rightarrow \infty} P_{s,n} = P_s$  für  $s = 1, 2, \dots$  und (G<sub>2</sub>):  $\sum_{s \geq 1} P_s = 1$  gelten. Unter Voraussetzung von (B) werden notwendige und hinreichende Bedingungen dafür angegeben, daß (G<sub>1</sub>) und (G<sub>2</sub>) bei jedem  $p_1$  gelten. Im Falle der Existenz eines diskreten Grenzwesetzes läßt sich die zugehörige charakteristische Funktion in Gestalt einer unendlichen Reihe angeben, deren Koeffizienten sich durch Grenzwerte gewisser Ausdrücke aus den Vorgaben  $p_{1,n}$ ,  $\alpha_{k,n}$  und  $\beta_{k,n}$  ausdrücken. An einem Beispiel wird gezeigt, daß  $\sum_{s \geq 1} s P_s$  nicht zu existieren braucht und daß daher frühere von B. O. Koopman (dies. Zbl. 43, 134) angegebene Bedingungen unnötig scharf waren.

*H. Richter.*

**Ramakrishnan, A. et S. K. Srinivasan:** *Sur les intégrales stochastiques associées aux processus ponctuels.* Publ. Inst. Statist. Univ. Paris 5, 95—106 (1956).

Seien  $f(t)$  eine integrierbare zufällige Funktion und  $\{\Phi_n(t)\}$  eine Reihe von integrierbaren gewissen Funktionen für  $t \geq 0$ . Dann sucht der Verf. die zufällige Funktion

$$(1) \quad y_m = \int_0^t \Phi_m(t_m) dt_m \int_0^{t_m} \Phi_{m-1}(t_{m-1}) dt_{m-1} \cdots \int_0^{t_1} \Phi_1(t_1) f(t_1) dt_1$$

als solche näher zu prüfen und insbesondere deren verschiedene Momente sowie möglicherweise das bezügliche Verteilungsgesetz zu bestimmen. Es wird erst der Fall des Furry-Prozesses geprüft, wobei  $f(t) = n(t)$  die Zahl der elementaren Ereignisse ist, die im Zeitintervall  $0, t$  stattfinden, mit der Wahrscheinlichkeit  $\pi(n; t) = e^{-\lambda t}(1 - e^{-\lambda t})^n$ . — [Siehe auch O. Onicescu, Gh. Mihoc und C. Ionescu Tulcea, Calculul

Probabilităţilor (dies. Zbl. 70, 360), p. 456 ff.]. Wenn  $F(t, t_0) = \Phi_0(t_0) \int_{t_0}^t \Phi_1(t_1) dt_1$ .



$\int_1^t \Phi_2(t_2) dt_2 \cdots \int_{t_{m-1}}^t \Phi_m(t_m) dt_m$ , so kann man noch allgemeiner als in (1) setzen

$$(2) \quad y_m(t) = \int_0^t F(t, t_0) dn(t_0),$$

wobei  $n(t)$  positive Sprünge gleich Eins in  $n$  zufälligen Punkten des Intervalls  $0, t$  besitzt (M. S. Bartlett, *Stochastic Processes*, Cambridge 1955). Seien  $\pi(y_m, t)$  die Wahrscheinlichkeitsdichte von  $y_m(t)$ ,  $\pi(y_m, n, t)$  die konjugierte Wahrscheinlichkeitsdichte von  $y_m$  und  $n$  und  $p(s, t)$  die Laplace-Transformierte von  $\pi(y_m, t)$ .

Es wird gefunden  $p(s, t) = e^{-st} \left[ 1 - \lambda \int_0^t e^{-sF(a, \tau) - \lambda(t-\tau)} d\tau \right]^{-1}$ . Die Momente werden direkt daraus bestimmt. Eine andere Methode, die das Dichte-Produkt benutzt, gibt auf einem ganz anderen Wege dieselben Momente. Im zweiten Teil wird ein allgemeiner multiplikativer Prozeß mit denselben Methoden und einer interessanten besonderen Anwendung auf Servo-Mechanismen betrachtet. *O. Onicescu.*

**Wise, J.: Stationarity conditions for stochastic processes of the autoregressive and moving-average type.** *Biometrika* **43**, 215—219 (1956).

For the existence of a stationary autoregressive (discrete) process  $\{x_t\}$  fulfilling a given regression equation  $\sum_0^k \alpha_i x_{t-i} = \varepsilon_t$ , with  $\{\varepsilon_t\}$  stationary and non-autocorrelated, a well-known necessary and sufficient condition requires that all roots of the equation  $\sum \alpha_i z^i = 0$  lie within the unit circle; similarly for the more general autoregressive moving-average process. In the present paper, the condition mentioned is converted into criteria involving only rational expressions in the coefficients  $\alpha_i$ . *G. Elfving.*

**Udagawa, Kanehisa and Gisaku Nakamura: On a certain queuing system.** *Kōdai math. Sem. Reports* **8**, 117—124 (1956).

In this paper it is assumed that intervals between arrived times of queuers as well as service times follow a negative exponential law, and that the queue discipline is „first come, first served“. Such a queue is discussed by the method of imbedded Markov chains. The author considers also the case where the probability of new arrivals depends on the length of the queue. *S. Vajda.*

**Homma, Tsuruchiyo: On the theory of queues with some types of queue-discipline.** *Yokohama math. J.* **4**, 55—64 (1956).

The assumptions of the queueing problem discussed in this paper are as follows: Poisson law of arrivals, general service time, and given probabilities of  $r$  queuers leaving the queue when the service of the first arrival begins. Conditions for ergodicity, for null-recurrence, and for transiency are discussed by the method of imbedded Markov chains. *S. Vajda.*

**Takács, L.: On the generalization of Erlang's formula.** *Acta math. Acad. Sci. Hungar.* **7**, 419—432, russ. Zusammenfassg. 432—433 (1956).

Suppose that at a telephone center calls are arriving at the time instants  $\tau_1, \tau_2, \dots, \tau_n, \dots$  ( $\tau_1 < \tau_2 < \dots < \tau_n < \dots$ ). Let  $m$  be the number of the available trunk lines; a connection is realised if the incoming call finds an idle channel (trunk line) and the incoming call is lost if all the channels are busy. Let  $\eta(t)$  be the number of busy channels at the instant  $t$ ,

$$\eta(\tau_n - 0) = \eta_n; \quad P_k^* = \lim_{t \rightarrow \infty} P\{\eta(t) = k\}, \quad P_k = \lim_{n \rightarrow \infty} P\{\eta_n = k\}$$

( $k = 0, 1, 2, \dots, m$ ). The following conditions are assumed: A.  $\tau_n$  is a sequence of recurrent events; denote by  $F(x)$  the common distribution function of  $\tau_{n+1} - \tau_n$  ( $n = 1, 2, \dots$ ),  $\alpha = \int_0^\infty x dF(x)$ ,  $\varphi(s) = \int_0^\infty e^{-sx} dF(x)$  ( $\Re(s) \geq 0$ ); B. let  $\chi_n$  be the duration of the connection beginning at the instant  $\tau_n$ ;  $\chi_n$  are supposed to be

independent random variables which are independent also of  $\{\tau_n\}$ . Suppose  $P\{\chi_n \leq x | \eta_n = k\} = H(x)$  if  $k = 0, 1, \dots, m-1$  and  $\chi_n = 0$  if  $\eta_n = m$ , where  $H(x) = 1 - e^{-\mu x}$  if  $x \geq 0$ ,  $= 0$  if  $x < 0$ . Firstly the case  $m < \infty$  is examined; thus, in case  $\{\tau_n\}$  and  $\{\chi_n\}$  fulfil the conditions A. and B., then the limiting distribution  $\{P_k^*\}$  exists independently of the initial distribution of  $\eta(0)$  and we have

$$P_k = \sum_{r=k}^m (-1)^{r-k} \binom{r}{k} B_r,$$

where  $B_r$  is the  $r$ -th binomial moment of  $\{P_k\}$  and is given by the formula

$$B_r = C_r \left\{ \sum_{j=r}^m \binom{m}{j} \frac{1}{C_j} \middle/ \sum_{j=0}^m \binom{m}{j} \frac{1}{C_j} \right\},$$

where  $C_0 = 1$  and

$$(*) \quad C_r = \prod_{i=1}^r \frac{\varphi(i\mu)}{1 - \varphi(i\mu)} \quad (r = 1, 2, \dots).$$

Under the same conditions, if  $F(x)$  is not of lattice type and  $x < \infty$ , then the limiting distribution  $\{P_k^*\}$  exists, is independent of the initial distribution of  $\eta(0)$  and we have

$$P_k^* = \sum_{r=k}^m (-1)^{r-k} \binom{r}{k} B_r^*,$$

where  $B_r^*$ , the  $r$ -th binomial moment of  $\{P_k^*\}$ , is given by the formulae  $B_0^* = 1$  and

$$B_r^* = \frac{C_{r-1}}{r\mu\alpha} \left\{ \sum_{j=r}^m \binom{m}{j} \frac{1}{C_j} \middle/ \sum_{j=0}^m \binom{m}{j} \frac{1}{C_j} \right\} \quad (r = 1, 2, \dots, m),$$

where  $C_j$  is defined by (\*). It is also shown that  $P_k^* = P_{k-1}/k\mu\alpha$  ( $k = 1, 2, \dots, m$ )

and  $P_0^* = 1 - \frac{1}{\alpha\mu} \sum_{k=1}^m \frac{P_{k-1}}{k}$ . Further, the stationary process is discussed. The limiting case  $m = \infty$  is also investigated; the results obtained for this case are similar to those given for  $m < \infty$ . R. Theodorescu.

**Fortet, Robert M.: Random distributions with an application to telephone engineering.** Proc. 3rd Berkeley Sympos. math. Statist. Probability 2, 81—88 (1956).

Der Verf. beginnt mit der Erörterung über eine allgemeinere Definition der Poissonschen Verteilung in einem Ereignisfelde, auf dem ein Maß  $m(e)$  ( $e \in B$ ) bestimmt ist. Die zufällige Familie  $F$  von Elementarereignissen des Feldes  $\{X, B\}$  ist eine Poissonsche, wenn die Zahl  $M(e)$  der Ereignisse von  $F$ , die zu  $e(e \in B)$  gehören, eine Poissonsche zufällige Größe mit dem Parameter  $m(e)$  ist ( $m(e) < \infty$ ), und wenn noch, für irgendeine Menge von Ereignissen  $e_1, e_2, \dots, e_k$  ( $e_j \in B$ ,  $e_j \cap e_k = \emptyset$ ) von endlichem Maß, die entsprechenden zufälligen Größen  $M(e_1), M(e_2), \dots, M(e_k)$  untereinander unabhängig sind. Verschiedene Eigenschaften solcher Poissonschen zufälligen Familien von Ereignissen werden abgeleitet. Es folgen Erörterungen über die zufälligen Distributionen, die von Gelfand definiert wurden, sowie die möglichen Beziehungen zwischen diesen funktionalen Begriffen und den von R. Fortet selbst und E. Mourier entwickelten. Im letzten Teile seiner Arbeit beschäftigt sich Verf. mit einem nichtlinearen Problem der Telephontechnik, das zu folgender Integralgleichung führt:

$$(1) \quad Y(t) = \int_{t_0}^{t-0} X(u) R(u, t) dN(u),$$

wobei  $R(u, t)$  eine gewisse zufällige Funktion, welche die Werte 0 und 1 annimmt, und  $N(u)$  eine zufällige Verteilungsfunktion ( $N(u) - N(t)$ , die Anzahl der Telefonanrufe im Zeitintervall  $u, t$ ) sind. — Nehmen wir weiter an, daß ein ganzzahliger Wert  $n$  mit  $Y(t) \leq n$  und eine Funktion  $V(u)$  existiert ( $V(k) = 1$  für  $k = 0, 1, \dots$ ).

...,  $n - 1$ ;  $V(u) = 0$  für  $u \geq n$ ) so daß man eine Beziehung  $X(t) = V(Y(t))$  zu (1) hinzufügen kann. Es wird bewiesen, daß unter der Voraussetzung, daß  $N(t) - N(0)$  fast sicher endlich ist, die Gleichung (1) eine einzige fast sicher bestimmte Lösung mit den Anfangswerten  $X(0) = 1$ ,  $Y(0) = 0$  besitzt. Eine Anwendung im Falle  $n = 1$  wird gegeben.

*O. Onicescu.*

## **Statistik:**

• **Società Italiana di Statistica:** Atti della XV e XVI riunione scientifica. Roma, aprile 1955 — giugno 1956. Roma 1956. 394 p.

Die Arbeiten werden in diesem Zbl. einzeln angezeigt.

• **Veneckij, I. G. und G. S. Kil'dišev:** Leitfaden der mathematischen Statistik. Moskau: Staatsverlag für Statistik 1956. 204 S. R. 4.65 [Russisch].

Der Leitfaden wendet sich an Studierende der Wirtschaftswissenschaften und soll helfen, die Methoden der mathematischen Statistik bei verschiedenen Problemen anzuwenden. Dementsprechend ist der mathematische Gehalt auf ein Minimum reduziert: die einschlägigen Formeln werden ohne Beweis und mitunter auch falsch zitiert. Der in der Einleitung ausgesprochene Verzicht auf Vollständigkeit ist gerechtfertigt; denn die moderne statistische Fragestellung kommt gar nicht zur Behandlung. Es erscheint Ref. fraglich, ob ein solches Rezeptbuch trotz seiner vielen aus der Praxis entnommenen Beispiele den Studierenden fördert, zumal die Formulierung wesentlicher Grundbegriffe an Schärfe manches zu wünschen übrig läßt. Unerklärte Termini und unmotivierte Wechsel in den Bezeichnungen wecken den Eindruck einer nicht vollkommenen Verarbeitung zusammengetragener Ergebnisse der älteren mathematischen Statistik. — Teil I behandelt die Darstellung empirischer Versuchsreihen und ihre Charakterisierung durch Lage- und Streuungsparameter usw. — Teil II befaßt sich mit den Elementen der Wahrscheinlichkeitstheorie, auf der Laplaceschen Formel fußend. — In Teil III lernt der Leser die wichtigsten Stichprobenmethoden kennen. Die Formeln für die Streuung des Stichprobenmittelwertes bei rein zufälligen, bei geschichteten und bei serienmäßigen Stichprobenentnahmen mit oder ohne Wiederholung sind zusammengestellt und an Beispielen demonstriert. Hier findet man auch die Anwendungen der Student-Verteilung. — Als besonders wichtige Verteilungskurven werden in Teil IV die Binomial-, die Gauß-, die Poisson- und die Maxwell-Verteilung vorgestellt. Als Anpassungskriterien werden insbesondere das Pearsonsche  $\chi^2$  und Kolmogoroffs  $\lambda$  besprochen. — In Teil V findet man die Formeln für den gewöhnlichen, den multiplen und den partiellen Korrelationskoeffizienten, für das Korrelationsverhältnis und für die Berechnung eines Regressionspolynoms nach der Methode der kleinsten Quadrate. — Im Anhang stehen Aufgaben, die sich mit der Bearbeitung von drei tabellarisch wiedergegebenen Meßreihen beschäftigen; des weiteren findet man Tabellen für die Gauß-, Student- und F-Verteilung, für Pearsons  $\chi^2$  und Kolmogoroffs  $\lambda$ .

*H. Richter.*

**Chernoff, Herman:** Large-sample theory. Parametric case. Ann. math. Statistics 27, 1—22 (1956).

Expository lecture. Part I recalls certain less known techniques for dealing with convergence in probability theory. Part II surveys some recent results in the large sample theory of estimation, design, and testing.

*G. Elfving.*

**Royston, Erica:** Studies in the history of probability and statistics. III: A note on the history of the graphical presentation of data. Biometrika 43, 241—247 (1956).

**Johnson, D. L.:** Generating and testing pseudo random numbers on the IBM type 701. Math. Tables Aids Comput. 10, 8—13 (1956).

Die vorhandenen Tafeln für gleichmäßig verteilte Zufallsvariable eignen sich nicht zur Verwendung in elektronischen Rechenautomaten. Das Laden und Speichern dieser Zahlen ist unzweckmäßig, die Erzeugung dieser Folgen im Automaten selbst



ist vorzuziehen. Hierzu sind verschiedene Vorschläge gemacht worden, z. B. die „mid-square method“. Auf Nachteile in Form unentdeckter Zyklen ist hingewiesen worden. Zur Vermeidung solcher Zyklen hat Lehmer die Methode der Kongruenzen vorgeschlagen. Für die IBM-701 — einer Dualmaschine mit einer Wortlänge von 35 Bits — wurde die Rekursion  $x_n \equiv 23 x_{n-1} \pmod{2^{35} + 1}$  mit  $x_0 = 10987654321$  gewählt. Insgesamt wurden 172900 Zahlen (35-stellig) ermittelt und auf einem Band gespeichert. In Anlehnung an den „frequency test“, den „serial test“ und den „poker test“ nach Kendall und Smith wurden drei Prüfungen durchgeführt deren Ergebnisse in Tabellen mitgeteilt werden. — Das betrachtete Problem erforderte 10-Bit-Zufallsvariable. Zum Testen wurden die ersten 112000 Zahlen mit 35 Bits herangezogen, so daß 392000 Zahlen mit 10 Bits gegeben waren. Diese Zahlen wurden in 28 Blocks à 14000 Zahlen eingeteilt und untersucht. Test I: Es wurde gezählt, wie oft jede der 1024 möglichen Zahlen in einem Block auftritt. Test II: Zählen der „Einsen“. Test III: Es wurde gezählt, wie oft jede der 11 möglichen Quersummen einer 10-stelligen Dualzahl auftritt. *H. Unger.*

**Durand, David:** A note on matrix inversion by the square root method. *J. Amer. statist. Assoc.* **51**, 288—292 (1956).

A positive definite matrix  $A$  may be written  $A = S'S$  with  $S$  triangular. Many statistics involving an inverted matrix  $A^{-1}$  may be conveniently computed directly from  $S^{-1}$  which in turn is easily obtained from  $S$ . This labor-saving method is illustrated. *G. Elfving.*

**Akaike, Hirotugu:** On the distribution of the product of two  $\Gamma$ -distributed variables. *Ann. Inst. statist. Math.* **8**, 53—54 (1956).

If  $X_1$  and  $X_2$  are independent with  $\Gamma$ -distributions, a simple formula for the density of  $X_1 X_2$  is found in terms of a Bessel  $K$ -function. When the degrees of freedom differ by  $n + \frac{1}{2}$  ( $n$  an integer) this is integrated to obtain, for the distribution function, a more complicated formula involving incomplete  $\Gamma$ -functions. *L. Cote.*

**Higuti, Isao:** Note on the sums of the independent variates of K. Pearson's type V. *Ann. Inst. statist. Math.* **8**, 55—59 (1956).

The author finds the Laplace transform of a Pearson type V distribution. This generally involves a Bessel  $K$ -function, but in the case where the „degree of freedom“ is an integer plus  $\frac{1}{2}$ , it becomes simply the product of a polynomial and an exponential function. By inverting a general product of the latter, he finds a formula for the density function of the sums described in the title. Then, on the basis of two conjectures, he gives a method of computing coefficients in this formula for equidistributed summands. Tables are given for a few cases. *L. Cote.*

**Philipson, Carl:** Explicit expressions for the first four moments of a truncated distribution defined by Pearson type VI. *Skand. Aktuarietidskr.* **1956**, 63—69 (1956); *Errata, Ibid.* **1957**, 18—19 (1957).

Verf. beweist die folgende Gleichung: Eine gestutzte Pearsonsche Verteilung, Typus VI hat die Form:

$$H_q^*(z) = 0 \text{ für } z < 0, = \frac{{}_{12}G_0(z, -\lambda_0)}{{}_{12}G_0(q, -\lambda_0)} \text{ für } 0 \leq z \leq q, = 1 \text{ für } z \geq q$$

mit den Momenten  $\alpha_\nu$ , wobei

$$\alpha_\nu = \frac{{}_{12}G_\nu(q, -\lambda_0)}{{}_{12}G_0(q, -\lambda_0)}; \quad {}_{12}G_\nu(x, -\lambda_0) = \frac{\lambda_0^2 \Gamma(\lambda_1 + \lambda_2)}{\Gamma(\lambda_1) \Gamma(\lambda_2)} \int_0^x \frac{(u-x)^\nu u^{\lambda_1-1}}{(u+\lambda_0)^{\lambda_1+\lambda_2}} du.$$

*W. Saxer.*

**Huzurbazar, V. S.:** Sufficient statistics and orthogonal parameters. *Sankhyā* **17**, 217—220 (1956).

The problem dealt with is that of an earlier paper by the same author (this Zbl. **36**, 93), viz. to find orthogonal parameters of a probability distribution by transfor-

mation. It is shown that the problem can be solved for a distribution dependent on two parameters, which admits jointly sufficient statistics. *S. Vajda.*

**Waerden, B. L. van der:** The computation of the  $X$ -distribution. *Proc. 3rd Berkeley Sympos. math. Statist. Probability* **1**, 207—208 (1956).

Let  $x_i$  ( $i = 1, \dots, g$ ) and  $y_j$  ( $j = 1, \dots, h$ ) be independent observations and  $r_i$  the rank of  $x_i$  among the aggregate of  $x_i$  and  $y_j$ . The hypothesis to be tested is the identity of the parent distributions of the  $x_i$  and of the  $y_j$ . The author's  $X$ -test uses the test statistic  $X = \sum_i \psi [r_i / (g + h + 1)]$ , where  $\psi$  is the inverse function to the cumulative normal distribution function.  $X$  is asymptotically normal under conditions mentioned in this *Zbl.* **50**, 361. The present paper shows how the test limits can be computed to a better approximation than assuming a normal distribution for small  $g$  and  $h$ . The procedure is based on a separate evaluation of the terms with  $r = 1$ , and  $r = g + h$  (which are not necessarily included in the sum), since the absolute value of the corresponding  $\psi$  is rather large. Numerical tables will be published. *S. Vajda.*

**David, F. N.:** A note on Wilcoxon's and allied tests. *Biometrika* **43**, 485—488 (1956).

**Hudimoto, Hiroshi:** On the distribution-free classification of an individual into one of two groups. *Ann. Inst. statist. Math.* **8**, 105—112 (1956).

Es seien  $\pi_1, \pi_2$  Grundgesamtheiten mit den Verteilungsfunktionen  $F_1(x)$  und  $F_2(x)$ . Daraus werde eine Grundgesamtheit  $\pi$  zusammengesetzt, in der mit den Wahrscheinlichkeiten  $p, q$  Elemente zu  $\pi_1$  bzw.  $\pi_2$  gehören.  $\pi$  hat dann die Verteilungsfunktion  $p F_1(x) + q F_2(x)$ . Wird eine einzelne Beobachtung ausgeführt und diese in  $\pi_1$  oder  $\pi_2$  klassifiziert, je nachdem ihr Wert kleiner oder größer als ein vorherbestimmtes  $x$  ist, dann ist  $C(x) = p F_1(x) + q [1 - F_2(x)]$  die Wahrscheinlichkeit für richtige Klassifizierung. — Verf. behandelt die Aufgabe, aus einer aus  $\pi$  entnommenen Stichprobe vom Umfang  $N$  einen Schätzwert für das  $x_0$  zu finden, bei dem  $C(x)$  maximal wird. Dieser Schätzwert soll ohne eine Annahme über  $F_1$  und  $F_2$  bzw.  $p$  und  $q$  gefunden werden. Es seien  $u_1, \dots, u_m$  und  $v_1, \dots, v_{N-m}$  die Einzelwerte der Stichprobe, und zwar  $u_k$  aus  $\pi_1$  und  $v_h$  aus  $\pi_2$  jeweils der Größe nach geordnet. Es bezeichne dann

$$c_m^{(1)}(x) = k/m \text{ für } u_k \leq x < u_{k+1} \text{ und } c_{N-m}^{(2)}(x) = h/(N-m) \text{ für } v_h \leq x < v_{h+1}.$$

Dann ist  $c_N(x) = (m/N) c_m^{(1)}(x) + [(N-m)/N] [1 - c_{N-m}^{(2)}(x)]$  erwartungstreuer Schätzwert für  $C(x)$ . Ist die Bedingung erfüllt, daß  $p f_1 \geq q f_2$  genau dann gilt, wenn  $x \leq x_0$ , dann besitzt  $C(x)$  nur ein Maximum bei  $x_0$ . Aus der Stichprobe ist dann noch ein Schätzwert für  $C(x_0)$  zu errechnen. Ist diese Bedingung nicht erfüllt, dann muß unter Kenntnis einer Abstandsbeziehung  $r(F_1, F_2) = \int_K \sqrt{f_1} \sqrt{f_2} dx$

und unter Kenntnis von  $p$  und  $q$  ein Schätzwert für  $C(x_0)$  angegeben werden. Die Arbeit enthält noch Genauigkeitsabschätzungen und die Erläuterung der Methode an einem Zahlenbeispiel. *F. Wever.*

**Matusita, Kameo and Hirotugu Akaike:** Decision rules, based on the distance, for the problems of independence, invariance and two samples. *Ann. Inst. statist. Math.* **7**, 67—80 (1956).

The authors prove that for any set of distributions  $\omega$  and for any  $\eta > 0$ ,

$$\Pr \left\{ \inf_{F \in \omega} \delta(F - S_n) \leq \eta \right\} \geq 1 - \frac{k-1}{n\eta^2}$$

when  $F_0 \in \omega$  and

$$\Pr \left\{ \inf_{F \in \omega} (F - S_n) > \eta \right\} \geq 1 - \frac{k-1}{n(\varepsilon - \eta)^2}$$

when  $\inf_{F \in \omega} \delta(F - F_0) \geq \varepsilon > \eta$ . This is a modification of a theorem in this *Zbl.* **65**, 121

q. v. for definitions. A second theorem contains formulae with different r. h. s. s.

These theorems lead to decision rules, the second being preferable for large  $n$ . — These rules are then applied to the problems of independence of two random variables, of invariance of a joint probability distribution under a group of permutations, and of the „two sample problem“, i. e. the decision about whether the joint distribution of random variables  $X$  and  $Y$ ,  $F_0$ , belongs to  $\omega$  or whether  $\inf_{F \in \omega} \delta(F - F_0) > \varepsilon > 0$

holds. Examples are given.

*S. Vajda.*

**Matusita, Kameo and Minoru Motoo:** On the fundamental theorem for the decision rule based on distance  $\| \|$ . Ann. Inst. statist. Math. **7**, 137—142 (1956).

The theorem

$$\Pr \{ \delta(F - S_n) > \eta \} \leq \frac{k^2 + k - 1}{n^2 \eta^4} \leq \frac{1,25 k^2}{n^2 \eta^4}$$

for  $k \geq 2$ ,  $n > k$  is proved. For definitions see this Zbl. **65**, 121. See also the review above.

*S. Vajda.*

**Jung, Jan:** On linear estimates defined by a continuous weight function. Ark. Mat. **3**, 199—209 (1956).

Aus den Stufwerten (order-statistics)  $x_{(1)} \leq x_{(2)} \leq \dots \leq x_{(n)}$  einer zufälligen Stichprobe von  $n$  unabhängigen Beobachtungen einer der kumulativen Verteilungsfunktion  $F[(x - \mu)/\sigma]$  bekannter Form folgenden Variablen  $X$  sollen deren unbekannte Parameter  $\mu$ ,  $\sigma$  linear geschätzt werden durch  $\theta^* = \sum_{v=1}^n h_v^{(n)} x_{(v)}$ . Verf.

untersucht unter hinreichenden Bedingungen für  $h(u)$  Erwartungswert, Varianz und Kovarianz solcher Schätzer für Gewichtsfunktionen der Form  $h_v^{(n)} = h(v/(n+1))/n$ . Er beweist sodann, daß, wenn  $g_1(u)$ ,  $g_2(u)$  mit  $g(0) = g(1) = 0$  in  $(0, 1)$  stetige, beschränkte  $g''(u)$  mit  $|g''(u)| = O(u^{-1})$  für  $u \rightarrow 0$ ,  $|g''(u)| = O(1-u)^{-1}$  für  $u \rightarrow 1$

haben, eine einzige Funktion  $\varphi(u)$  existiert, die  $\int_0^1 \int_0^1 k(u, v) \varphi(u) \varphi(v) du dv$  mit  $k(u, v) = u(1-v)$  für  $0 \leq u \leq v \leq 1$ , bzw.  $v(1-u)$  für  $0 \leq v \leq u \leq 1$  unter den Nebenbedingungen  $\int_0^1 \varphi(u) g_j(u) du = \alpha_j$  ( $j = 1, 2$ ) zum Minimum macht.

Mittels dieses Satzes wird die Gewichtsfunktion  $h(u)$  asymptotisch optimal bestimmt, d. h. so, daß  $\theta^*$  konsistent und für  $n \rightarrow \infty$  asymptotisch effizient (minimal-variant) sei. Verf. wendet die Resultate auf Student-Verteilung und Pearson-Verteilung Typ III an.

*M. P. Geppert.*

**Cox, D. R.:** A note on the theory of quick tests. Biometrika **43**, 478—480 (1956).

**Taylor, J.:** Exact linear sequential tests for the mean of a normal distribution. Biometrika **43**, 452—455 (1956).

**Moore, B. G.:** The estimation of the mean of a censored normal distribution by ordered variables. Biometrika **43**, 482—485 (1956).

**Fisher, R. A. and M. J. R. Healy:** New tables of Behrens' test of significance. J. roy. statist. Soc., Ser. B **18**, 212—216 (1956).

Die Signifikanz des Unterschiedes zwischen den Mittelwerten zweier normaler Stichproben wird gewöhnlich mittels des bekannten Tests nach Behrens überprüft. Tafeln dafür fehlen bisher für den Vergleich kleiner Stichproben. Hier werden numerisch auswertbare Formeln für den Fall entwickelt, daß beide Proben eine kleine, ungerade Zahl von Freiheitsgraden haben. Damit berechnete Tafeln sollen in der fünften Auflage der Statistical Tables von R. A. Fisher und F. Yates (4. Aufl. 1953 bei Oliver and Boyd in Edinburgh und London) abgedruckt werden.

*E. Breitenberger.*

**Moran, P. A. P.:** A test of significance for an unidentifiable relation. J. roy. statist. Soc., Ser. B **18**, 61—64 (1956).

Zwei linear abhängige Gauß-Variablen  $v = u + \lambda$  und  $w = \beta u + \mu$  seien bei Beobachtungen mit Gauß-verteilten Fehlern  $\varepsilon$  und  $\eta$  behaftet. Die gemeinsame



Verteilung von  $X = v + \varepsilon$  und  $Y = w + \eta$  ist durch fünf Parameter eindeutig bestimmt, von denen  $\beta$  unabhängig ist.  $\beta$  ist daher „unidentifiable“; für  $\beta$  ergeben sich lediglich scharfe Schranken als Funktionen der fünf Parameter. An Stelle von Schätzverfahren für diese Schranken schlägt Verf. einen Test vor zur Prüfung der Nullhypothese  $w = \beta v$ , also  $\mu = \beta \lambda$  (eventuell nach geeigneter Koordinaten-Verschiebung).

*D. Bierlein.*

**Doornbos, R. and H. J. Prins:** Slippage tests for a set of gamma-variates. Nederl. Akad. Wet., Proc., Ser. A 59, 329—337 (1956).

For a set of normal populations the authors derive tests for the equality of variances against the alternatives  $H_1$ ,  $H_2$  respectively, that exactly one of the variances has slipped to the right or left. The tests generalize Cochran's test [Ann. Eugenics 11, 47—52 (1941)] in that they do not require equal sample sizes for estimating the variances. By means of the test statistic also the decision rule given by D. R. Truax (this Zbl. 51, 361) to decide whether one and, if so, which one of the variances has slipped to the right (or to the left) is adapted to unequal sample sizes. Upper and lower bounds for the probability of making the correct decision under  $H_1$  and  $H_2$  are given. Since both bounds and tests involve the incomplete  $B$ -integral references are made to suitable tables and nomograms.

*W. Gautschi.*

**Bradt, Russell N. and Samuel Karlin:** On the design and comparison of certain dichotomous experiments. Ann. math. Statistics 27, 390—409 (1956).

This interesting paper is concerned with the comparison of experiments intended to decide between two hypotheses  $H_1$  and  $H_2$ , with a loss of one unit in case of a false decision. Attention is focused on the Bayes risk  $R(\xi) = \min_{\delta} r(\xi, \delta)$ ,  $\xi$  being the a priori probability of  $H_1$ ; and in particular on the relation  $R_X \leq R_Y$ , meaning that experiment  $X$  yields a uniformly smaller risk than experiment  $Y$ . The results, impossible to review in detail, comprise i. a. (i) criteria for uniform equality and inequality of Bayes risks, (ii) connections with the Kullbach-Leibler information numbers, (iii) transformations of the distribution space generated by a group of transformations in the sample space, (iv) gaussian experiments, (v) an explicit optimal design for a three-stage binomial experiment in which, at each stage, one of two possible observations may be performed. The last example shows that optimal designs tend to be exceedingly complicated.

*G. Elfving.*

**Bartholomew, D. J.:** A sequential test for randomness of intervals. J. roy. statist. Soc., Ser. B. 18, 95—103 (1956).

Nullhypothese: die beobachteten Punkte (auf einer Geraden) sind „zufällig“, d. h. unabhängig wiederholte Realisationen einer gleichverteilten Zufallsvariablen; der Abstand zwischen zwei benachbarten Punkten genügt dann der Exponentialverteilung, also dem für  $a = 1$  ausgearteten Pearstyp III. Als Gegenhypothese wählt Verf. in Übereinstimmung mit Moran (dies. Zbl. 31, 60; 45, 87) für die Verteilung des Abstandes den Pearstyp III mit einem  $a \neq 1$ . Verf. baut den Test als Sequ.-Prob.-Ratio-Test auf und untersucht eingehend Operationsscharen und ASN-Kurve.

*D. Bierlein.*

**Berkson, Joseph:** Estimation by least squares and by maximum likelihood. Proc. 3rd Berkeley Sympos. math. Statist. Probability 1, 1—11 (1956).

Es wird für den klassischen Fall der Bio-Auswertung eine Reihe von Verfahren zur Gewinnung von Schätzfunktionen verglichen (Maximum-Likelihood-Methode, Methode von Neyman, die klassische Methode der kleinsten Quadrate, Chi-Quadrat-Verfahren und Methoden des Verf.). Es handelt sich dabei vielfach um eine zusammenfassende Darstellung früherer Ergebnisse: dies. Zbl. 34, 78; 51, 110; 64, 141. Die genannten Verfahren liefern asymptotisch äquivalente Schätzungen. Ein numerisches Beispiel macht deutlich, daß für endliche Stichproben die Methoden nicht als gleich gut angesehen werden können.

*L. Schmetterer.*

Bailey, Norman T. J.: Significance tests for a variable chance of infection in chain-binomial theory. *Biometrika* **43**, 332—336 (1956).

Gilbert, N. E. G.: Likelihood function for capture-recapture samples. *Biometrika* **43**, 488—489 (1956).

David, H. A.: Revised upper percentage points of the extreme studentized deviate from the sample mean. *Biometrika* **43**, 449—451 (1956).

Walsh, John E.: Estimating population mean, variance, and percentage points from truncated data. *Skand. Aktuarietidskr.* **1956**, 47—58 (1956).

Verf. gibt eine ihrer Kompliziertheit wegen im Original nachzulesende — Vorschrift zur Schätzung von Mittelwert  $\mu$ , Varianz  $\sigma^2$  und  $\beta$ -Fraktilen  $\theta_\beta$  einer unbekannten Verteilung  $F(x)$  auf Grund einer durch Abschneiden der  $n_1$  kleinsten und  $n_2$  größten Werte gestutzten  $n$ -gliedrigen Stichprobe. Die Verteilungsfunktion wird vom Typ

$$F(x) = \Phi[(x-A)/B] + C \cdot \Phi^{(4)}[(x-A)/B] + D \cdot \Phi^{(6)}[(x-A)/B] + g[(x-A)/B]$$

mit  $\Phi(z) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^z e^{-y^2/2} dy$  und  $g(z) =$  beliebiger stetiger gerader Funktion vorausgesetzt, der u. a. alle durch die ersten sieben Glieder ihrer Edgeworth-Reihe approximierbaren Verteilungen umfaßt. Die im Anhang motivierten Einzelschritte des Verfahrens dienen zuerst der Schätzung der wahren Parameter  $A, B, C, D$ , sodann derjenigen von  $\mu, \sigma$  (aus  $A, B$ ) und  $\theta_\beta$ , und sichern gleichzeitig die Gültigkeit der  $n, n_1, n_2$  und  $\beta$  aufzuerlegenden Einschränkungen. Eingehende Effizienzbetrachtungen werden durch die Vermutung ersetzt, daß die Varianzen der erzielten Schätzer für  $\mu, \sigma, \theta_\beta$  von der Größenordnung  $n^{-1}$  seien. M. P. Geppert.

Žarković, S. S.: Einige Bemerkungen über das Problem der relativen Wirksamkeit. *Mitteil.-Bl. math. Statistik* **8**, 131—140 (1956).

Der Schätzwert für das arithmetische Mittel aus einer proportional aufgeteilten geschichteten Stichprobe ist wirksamer als der einfache erwartungstreue Schätzwert, d. h. die Streuung des ersten ist kleiner als die des zweiten. Verf. untersucht die Möglichkeit, die — in der Praxis unbekannte — Streuung durch ihren Schätzwert  $s^2$  zu ersetzen. Er stellt dabei fest, daß man in gewissen Fällen bei Anwendung der zweiten Methode mit geringerem Stichprobenumfang auskommt, um den Variationskoeffizienten für  $s^2$  unter eine vorgegebene Schranke zu drücken, als bei der ersten Methode. D. Bierlein.

Welch, B. L.: On linear combinations of several variances. *J. Amer. statist. Assoc.* **51**, 132—148 (1956).

In estimating linear combinations of variances, one is led to the study of statistics of the form  $\sum \lambda_i s_i^2$ , where the  $s_i^2$  are independent and distributed like  $\sigma_i^2 \chi_i^2/f_i$ . The distribution of such a statistic may sometimes be approximated by an appropriately fitted Pearson III or normal curve. The main contribution of the present paper is an improvement of the latter method by introducing a stochastic correction term so as to make the approximation closer. G. Elfving.

Gaylor, D. W.: Equivalence of two estimates of product variance. *J. Amer. statist. Assoc.* **51**, 451—453 (1956).

The author proves the equivalence of the covariance technique of Grubbs (this Zbl. **30**, 407) and the usual components of variance estimate of the variance of a product apart from measurement variance. R. L. Anderson (M. R. **18**, 244).

Chapman, Douglas G.: Estimating the parameters of a truncated gamma distribution. *Ann. math. Statistics* **27**, 498—506 (1956).

A table is given to simplify the estimation of an incomplete gamma distribution. A new procedure is also suggested for estimating the parameters of a truncated distribution. (From the author's summary.) G. Elfving.

**Raj, Des:** A note on the determination of optimum probabilities in sampling without replacement. *Sankhyā* 17, 197—200 (1956).

Given a population consisting of  $N$  units, where each unit is characterized by two quantities,  $X$  and  $Y$ ,  $(X_1, Y_1), \dots, (X_N, Y_N)$ . It is assumed that  $Y_i = \alpha + \beta X_i$  where  $\alpha$  and  $\beta$  are unknown. The  $X_i$  are known and an estimate of  $\bar{Y} = N^{-1} \sum Y_i$  is wanted on the basis of a sample of two units. The problem is how to select the two units when it is required that the variance of the estimate should be as small as possible and each unit has a probability of selection proportional to  $X_i$ . The method of selection is defined by the probabilities  $\pi_{ij}$  of selecting unit  $i$  and unit  $j$ . It is shown that the  $\pi_{ij}$  must be determined such that  $\pi_{ij} \geq 0$ ,  $\sum_{j \neq i} \pi_{ij} = 2X_i / \sum X_i$  and  $\sum' \pi_{ij} / \pi_i \pi_j$  is minimized, where  $\sum'$  denotes summation over all  $\binom{N}{2}$  pairs of units. This is a problem in linear programming and can be solved by the simplex method.

*E. Sverdrup.*

**Chernoff, Herman and Herman Rubin:** The estimation of the location of a discontinuity in density. *Proc. 3rd Berkeley Sympos. math. Statist. Probability* 1, 19—37 (1956).

Die Arbeit behandelt ein interessantes Problem. Ausgehend von der bekannten Tatsache, daß sich der Lokationsparameter einer Gleichverteilung mittels der Maximum-Likelihood-Methode „besonders gut“ schätzen läßt (vergleiche z. B. Cramér, *Mathematical methods of statistics*, Princeton 1946, S. 485), zeigen die Verff. für den Spezialfall einer Klasse von Verteilungen, deren Dichte durch  $f(x, \alpha, \beta, \gamma) = \beta$ ,  $0 \leq x \leq \alpha$ ;  $f(x, \alpha, \beta, \gamma) = \gamma$ ,  $\alpha < x \leq 1$  mit  $\beta\alpha + \gamma(1 - \alpha) = 1$ ,  $0 < \alpha < 1$  gegeben ist, die Konsistenz der Maximum-Likelihood-Schätzung von  $x$ . Hierzu wird insbesondere ein bekanntes Ergebnis von Kolmogoroff benutzt. Im allgemeinen Fall liegt eine Klasse von Dichten mit  $\lim_{x \rightarrow \alpha - 0} f(x, t, \alpha) = \beta(t, \alpha)$ .

$\lim_{x \rightarrow \alpha + 0} f(x, t, \alpha) = \gamma(t, \alpha)$  zugrunde, wobei  $t$  ein beliebiger mehrdimensionaler Parameter sein kann. Unter gewissen Regularitätsbedingungen wird das Problem der asymptotischen Verteilung der Maximum-Likelihood-Schätzung der Unstetigkeitsstelle  $\alpha$  mit einem Zufallswegproblem verknüpft. Es wird angedeutet, daß sich dieser Weg auch beim Vorliegen von mehr als einer Unstetigkeit beschreiten läßt. Bemerkte Druckfehler: Seite 19, 4. Z. v. unten  $\alpha < x \leq 1$  statt  $\alpha < 1 \leq 1$ . S. 22, 1. Z. v. oben (4) statt (2).

*L. Schmetterer.*

**Elfvig, G.:** Selection of nonrepeatable observations for estimation. *Proc. 3rd. Berkeley Sympos. math. Statist. Probability* 1, 69—75 (1956).

The observable random variables  $x_1, x_2, \dots, x_N$  can be written in the form  $x_i = u_{i1}\alpha_1 + \dots + u_{ik}\alpha_k + \xi_i$  where the vectors  $u_i = (u_{i1}, \dots, u_{ik})$  are known, the parameters  $\alpha_1, \dots, \alpha_k$  are unknown and the error terms  $\xi_i$  are unobservable random variables with mean zero and variance 1. It is required on the basis of observations of a subset consisting of  $n$  of the  $N$  observable variables, to estimate a given linear combination of the parameters. The problem is to select the observations such as to make the variance of the least square estimate as small as possible. It is assumed that the vectors  $u_1, \dots, u_N$  are more or less smoothly distributed such that they may be considered as repeated realizations of a random variable  $u$  with probability density  $f(u)$ . The problem is then reduced to a variational problem which can be treated by an argument which is similar to the one used by Neyman and Pearson to construct most powerful tests. The selection rate  $\varepsilon = n/N$  plays the role of the level of significance. The solution is given both for a general  $f(u)$  and in the special case where  $f(u)$  is spherically symmetric about the origin, or can be transformed to that form.

*E. Sverdrup.*



Grenander, Ulf and Murray Rosenblatt: Some problems in estimating the spectrum of a time series. Proc. 3rd Berkeley Sympos. math. Statist. Probability 1, 77—93 (1956).

Zu stochastischen Prozessen  $y_t = x_t + m_t$ , worin  $E x_t = 0$ ,  $x_t$  stationär und  $m_t = E y_t$  werden die Begriffe Kovarianzfunktion, spektrale Verteilung erläutert. Die Spektraldarstellung unter Verwendung eines orthogonalen Prozesses wird beschrieben, ebenso die Darstellung durch gleitenden Durchschnitt. Ohne Beweis werden eine Reihe von Schätzfunktionen für die Spektraldichte bzw. Spektralverteilung angegeben und deren Eigenschaften, insbesondere Konsistenz und Erwartungstreue diskutiert. F. Wever.

Parzen, Emanuel: On consistent estimates of the spectral density of a stationary time series. Proc. nat. Acad. Sci. USA 42, 154—157 (1956).

Es seien  $x(t)$ ,  $t = 1, 2, \dots, T$ , die Werte einer beobachteten stationären Zeitreihe, deren Kovarianzfunktion absolut und quadratisch summierbar ist, die also eine stetige nicht-negative spektrale Dichtefunktion  $f(w)$  besitzt. Zur Bildung einer konsistenten Schätzfunktion für  $f(w)$  werden Kernfunktionen  $k(z)$  eingeführt, die für reelle  $z$  gerade, beschränkt, quadratisch integrierbar und durch  $k(0) = 1$  normiert sind. Sie sollen der Bedingung  $\int_{-T}^T |k(z)| dz \leq M T^{1/2-\varepsilon}$  für beliebige  $M, \varepsilon$  genügen. Ein Kern gehört zur Klasse  $K_r$ ,  $r > 0$ , wenn  $r$  die größte positive Zahl ist, für die  $k^{(r)} = \lim_{z \rightarrow 0} |z|^{-r} (1 - k(z))$  noch existiert und endlich ist. Mit  $R_T(v)$  werde wie üblich die Kovarianzfunktion bezeichnet,  $B_T$  bedeute eine Zahlenfolge für die  $B_T T \rightarrow \infty$ .  $f_T^*(w) = \frac{1}{2\pi} \sum_{|v| \leq T} e^{-i w v} k(B_T v) R_T(v)$  ist dann eine allgemeine Form für Schätzfunktionen für  $f(w)$ . Zum Beispiel erhält man die Schätzfunktion nach Bartlett, wenn  $k(z) = 1 - |z|$  für  $|z| < 1$  und  $k(z) = 0$  sonst gesetzt wird und für  $B_T = 1/M$ . Es wird die Kovarianz der Schätzfunktion angegeben. Ist weiter  $r > 0$  mit  $\sum_v |v|^r R(v) < \infty$  und  $k(z)$  ein Kern von der Klasse  $r$ , dann besteht

$$\lim_{T \rightarrow \infty} B_T^{-2r} |E f_T^*(w) - f(w)|^2 = |k^{(r)} f^{(r)}(w)|^2$$

gleichmäßig, worin  $f^{(r)}(w) = \frac{1}{2\pi} \sum_v e^{-i w v} |v|^r R(v)$ . Beweise sind nicht mitgeteilt.

F. Wever.

Derman, Cyrus: Stochastic approximation. Ann. math. Statistics 27, 879—886 (1956).

Dies ist eine überaus klare und knapp gefaßte Einführung in das Problem der parameterfreien stochastischen Iteration. Es handelt sich hier (1) um die Bestimmung der Wurzel der Gleichung in  $x$ :  $M(x) = \alpha$ , wo  $M(x)$  eine Regressionskurve definiert, deren analytische Form nicht gegeben sei, und (2) um die Bestimmung des  $x$ -Wertes, für welchen die Regressionsfunktion  $M(x)$  maximal ist, sowie (3) um einige mehrdimensionale Verallgemeinerungen dieser beiden Probleme. Es wird hingewiesen auf die Schätzung von Quantilen (z. B. bei der Auswertung von Dosis-Wirkungskurven) als einen Sonderfall des ersten Problems. Der größte Teil der Untersuchung ist einer vergleichenden Auswertung der Bedingungen und Resultate, enthalten in den Arbeiten von Blum, Burkholder, Chung, Derman, Dvoretzky, Hodges-Lehmann, Kallianpur, Kiefer-Wolfowitz, Robbins-Monro, Schmetterer und Wolfowitz gewidmet. Der Leser sollte beachten, daß der Verf. die Begriffe Konvergenz im Mittel und Konvergenz im quadratischen Mittel im gleichen Sinne anwendet. Im übrigen sollte diese Arbeit einem jeden empfohlen werden, der sich über das Problem der stochastischen Iteration orientieren will.

H. R. van der Vaart.

Hodges jr., J. L. and E. L. Lehmann: Two approximations to the Robbins-Monro process. Proc. 3rd Berkeley Sympos. math. Statist. Probability 1, 95—104 (1956).

The authors give some results complementing earlier work by Chung on the asymptotic distribution of the Robbins-Monro stochastic approximations. Moreover, they investigate certain features of the performance characteristic of these estimators. The problem considered is to find by an iterative procedure the single root  $\theta$  of the equation  $M(x) = \alpha$  if instead of values of the function  $M(x)$  itself only observations on the random variable  $Y(x)$ , for which  $E[Y(x)] = M(x)$  are available. Chung [Ann. math. Statistics 25, 463—483 (1954), theorem 9] proved that under a number of conditions  $\sqrt{n}(X_n - \theta)$  tends in law to a normal distribution. Here  $X_n$  is the result of the  $n$ -th iterative step, defined by

$$(a) \quad X_{n+1} = X_n - a_n [Y(X_n) - \alpha], \quad a_n = c/n.$$

One of Chung's conditions excluded  $M(x)$  being bounded as  $x \rightarrow \infty$ . If  $M(x)$  is bounded, Chung uses different coefficients  $a_n$ , which result in slower convergence of  $X_n$  to  $\theta$ . The present authors use a truncation method (referring to Ch. M. Stein as co-author) in order to show that even when  $M(x)$  is bounded convergence to a normal distribution still exists for both  $n a_n = c$  (see (a) above) and  $n a_n \rightarrow c$ . However, as a result of this truncation they lose control over the variance of  $X_n$  though the variance of the limiting distribution remains the same as in the non-bounded case. They devote section 3 to the explanation of the differences between the variance of the limiting distribution and the limit (if any) of the variance. Section 4 is concerned with the choice of the constant  $c$  in (a). Instead of the limiting distribution of the actual estimators, the actual variance (for finite  $n$ ) of the estimators obtained from the approximating linear model:

$$(b) \quad M(x) = \alpha + \beta(x - \theta); \quad \text{Var } Y(x) = \tau^2 = \text{constant}$$

is now studied. The aim is to check to which extend asymptotic and small-sample theory might agree, and to obtain in this way a more solid basis for choosing good values for  $c$  and  $n$ . It turns out that for  $c \geq 1/\alpha_1$ , where  $\alpha_1 = dM(x)/dx$  (assumed positive), agreement is fairly good, whereas for  $c < 1/\alpha_1$  the increase of the variance of  $X_n$  as  $c$  decreases is appreciably slower than the asymptotic theory seemed to indicate; finally,  $c = 1/\alpha_1$  is a good value from both points of view. Usually  $\alpha_1$  is not exactly known, of course, and this makes it important to know how  $\text{Var } X_n$  depends on  $c$ . Reference is made to sampling experiments indicating that agreement between models with linear  $M(x)$  and quite non-linear  $M(x)$  is reasonably good (unpublished work by Teichrow). A final section deals with the case where one wants to know not so much  $\theta$  itself as a parameter  $\gamma$  which is now supposed to determine the distribution of  $Y(x)$  ( $\theta = f(x, \gamma)$ ). Here the bio-assay form of the quantal response problem and the Darrois-Koopman-Pitman family of distributions are receiving special attention.

H. R. van der Vaart.

Mikami, Misao: On a multi-level sampling inspection plan for continuous production. Bull. math. Statist. 7, 1—10 (1956).

Den nur für nicht zerstörende laufende Qualitätsprüfungen brauchbaren, von G. J. Liebermann u. H. Solomon (dies. Zbl. 65, 125) entwickelten mehrstufigen Stichprobenplan modifiziert Verf., so daß er auch für zerstörende Stückprüfungen verwendbar wird. Die laufende Produktion bestehe aus Losen von je  $N$  Stück; jedem Los wird eine zufällige Stichprobe, ( $f$ )-Stichprobe, vom Umfang  $n = Nf$  entnommen, und es wird dann und nur dann abgenommen, wenn in dieser die Anzahl der defekten Stücke 0 ist. Der Plan beruht auf vorgegebenen Stichprobenquoten  $1 \geq f_0 > f_1 > \dots > f_k > 0$  und zugeordneten ganzen Zahlen  $i_0, i_1, \dots, i_k$  und lautet: Man prüft aus sukzessiven Losen ( $f_0$ )-Stichproben solange, bis  $i_0$  sukzessive ( $f_0$ )-Proben ausschuffrei sind, und geht dann zu ( $f_1$ )-Stichproben über; wenn die

nächsten  $i_1$  ( $f_1$ )-Stichproben ausschußfrei sind, geht man zu ( $f_2$ )-Proben über, andernfalls kehrt man bei der ersten nicht ausschußfreien ( $f_1$ )-Probe zu ( $f_0$ )-Proben zurück, usw. In strenger Analogie zu der zitierten Arbeit wird dem Plan eine irreduzible, aperiodische, endliche Markoff-Kette zugeordnet, wird die Wahrscheinlichkeit  $P_j$  dafür, daß ein Los ( $f_j$ )-stichgeprüft werde, berechnet und schließlich daraus die Operationscharakteristik  $\sum_{j=0}^k P_j p_j$  mit  $p_j = \binom{N - Np}{n_j} / \binom{N}{n_j}$  in Abhängigkeit von der Ausschußwahrscheinlichkeit  $p$  bestimmt bei vorgegebenen Abnehmer- und Produzentenrisiken  $\alpha, \beta$  für  $p = p'$  bzw.  $p''$ .  
M. P. Geppert.

Cox, D. R.: A note on weighted randomization. Ann. math. Statistics 27, 1144—1151 (1956).

It is shown that in simple statistical designs in which a covariance adjustment is made for concomitant variation, an unbiased between treatment mean square can be produced by weighted randomization, i. e., by selecting an arrangement at random from a set of arrangements, giving different arrangements in the set unequal chances of selection. (Authors Summary.)  
H. B. Mann.

Scheffé, Henry: Alternative models for the analysis of variance. Ann. math. Statistics 27, 251—271 (1956).

This is an excellent survey article on the various analysis of variance models: Fixed, random, and mixed effects; randomization. The paper includes an extensive bibliography, and some history.  
G. Elfving.

Scheffé, Henry: A „mixed model“ for the analysis of variance. Ann. math. Statistics 27, 23—36 (1956).

The paper is concerned with the analysis of variance of a two-way ( $I \times J$ ) lay-out with  $K$  ( $\geq 1$ ) replications. The model proposed is  $y_{ijk} = m_{ij} + e_{ijk}$ , where the  $e_{ijk}$  are independent error terms as usual, whereas the columns  $m_j = (m_{1j}, \dots, m_{Ij})$  are independently and identically distributed stochastic vectors, with component means  $\mu + \alpha_i$  ( $\sum \alpha_i = 0$ ) and component covariance matrix ( $\sigma_{ih}$ ). Let  $m$  denote a typical  $m_j$ , let  $m_i$  be its  $i^{\text{th}}$  component, and  $\bar{m}$  the mean of all components. In this model, the theoretical variance components are conveniently defined as

$$\sigma_A^2 = \sum \alpha_i^2 / (I - 1), \quad \sigma_B^2 = \text{var}(\bar{m}), \quad \sigma_{AB}^2 = \sum \text{var}(m_i - \bar{m}) / (I - 1).$$

The expectations of the customary mean squares are derived, and estimates of the variance components constructed. The distribution theory (under normality) differs in some points from that of the classical fixed effects model.  
G. Elfving.

Nash, Stanley W.: Contribution to the theory of experiments with many treatments. Univ. California Publ. Statist. 2, 167—183 (1956).

The paper deals with a phenomenon in analysis of variance which may be most easily described by means of the following strongly simplified model. Let the variables  $\xi_i$  and  $e_{ij}$  ( $i = 1$  to  $m$ ,  $j = 1$  to  $n$ ) be normal ( $0, \sigma^2$ ) and ( $0, 1$ ), respectively, and let  $x_{ij} = \xi_i + e_{ij}$  be observables. Consider the following tests: (a) On the basis of all  $x_{ij}$ , test the hypothesis  $\sigma = 0$  by an ordinary  $F$ -test. (b) Let  $I$  be the subscript set of the  $r$  largest and the  $r$  smallest means  $\bar{x}_i$  ( $2r < m$ ); with the „varieties“ in  $I$  (i. e., retaining the  $\xi_i, i \in I$ , of the first experiment), perform a second experiment, with observations  $x'_{ij} = \xi_i + e'_{ij}$  ( $i \in I, j = 1$  to  $n$ ), and apply the  $F$ -test anew, on the same level as in (a) and with appropriate degrees of freedom. It will then often happen that (a) yields a significant result whereas (b) does not. It is shown in the paper, that this may indeed happen with a probability arbitrarily close to  $1 - \alpha$  ( $\alpha$  being the test level), for appropriate values  $m, n, r, \sigma$ . The models considered are much more general than the one sketched above.  
G. Elfving.

Archbold, J. W. and N. L. Johnson: A method of constructing partially balanced incomplete block designs. Ann. math. Statistics 27, 624—632 (1956).

On sait que, parmi les méthodes de construction des „balanced incomplete block designs“ partiels, l'une d'elles utilise les géométries finies qui sont associées à un



champ de Galois. (Cf. Henry B. Mann, *Analysis and design of experiments*, New York 1950.) Plus généralement, en prenant pour coordonnées des points d'une géométrie les éléments d'une algèbre associative linéaire d'ordre  $n$ , les AA. construisent des BIBD dont ils présentent des exemples explicites. *A. Sade.*

**Thompson jr., W. A.:** A note on the balanced incomplete block designs. *Ann. math. Statistics* 27, 842—846 (1956).

Au moyen d'une proposition sur les racines caractéristiques d'une matrice dont tous les éléments de la diagonale principale sont égaux à  $a$  et tous les autres éléments égaux à  $b$ , on établit que tout incomplete block design dans lequel les effets des traitements sont évalués avec la même précision, c'est-à-dire dans lequel les estimations ont la même variance et la même covariance, est un balanced incomplete block design. *A. Sade.*

**Kempthorne, Oscar:** The efficiency factor of an incomplete block design. *Ann. math. Statistics* 27, 846—849 (1956).

The efficiency factor ( $EF$ ) of an incomplete block design is defined to be  $EF = MW/M'W'$ ,  $M$  = mean variance of treatment differences in complete block design,  $M'$  = mean variance of intrablock estimates of treatment differences in incomplete block design,  $W$  = within-block variance in incomplete block design,  $W'$  = within-block variance in complete block design. The efficiency factor  $EF$  of an incomplete block design is equal to  $r$  times the harmonic mean of the latent roots of the matrix of coefficients of the reduced normal equations for the intrablock estimates, excluding the always-present zero root, whose characteristic vector consists of the same number repeated  $t$  times. *A. Sade.*

**Rao, C. Radhakrishna:** On the recovery of inter block information in varietal trials. *Sankhyā* 17, 105—113 (1956).

L'A. expose deux procédés, ( $Q$ ) et ( $P$ ), pour l'analyse des designs. Il applique le premier ( $Q$ ) aux „balanced incomplete blocks“ ordinaires, partiels et liés. (Pour les définitions, cf. ce Zbl. 60, 313 en bas—314). Un „linked block“ (LB) [Youden, *Biometrics* 7, 124 (1951)] est un ensemble de  $b$  blocs de  $K$  éléments chacun, choisis avec répétition ( $r$  fois chacun) parmi  $v$  éléments ou variétés donnés, de manière que deux blocs aient toujours  $\lambda$  éléments communs. Exemple: 0123, 2345, 4501. La seconde méthode ( $P$ ), qui convient particulièrement aux „linked blocks“, est une extension de celle de Roy et Laha (cf. l'article suivant) et utilise une matrice de  $b$  lignes et de  $v$  colonnes. Si le  $i^{\text{ème}}$  bloc contient la  $j^{\text{ème}}$  variété, on inscrit un 1 à l'intersection de la  $i^{\text{ème}}$  ligne et de la  $j^{\text{ème}}$  colonne. Sinon, on inscrit un 0. *A. Sade.*

**Roy, J. and R. G. Laha:** Classification and analysis of linked block designs. *Sankhya* 17, 115—132 (1956).

Lorsque le nombre des variétés à comparer est considérable, la méthode des blocs complets devient impraticable et il faut la remplacer par celle des „balanced incomplete block“ (BIB). Pour limiter le nombre des blocs dans ce cas on est conduit à utiliser les „linked blocks“ (LB) (cf. le compte-rendu précédent). L'analyse de variance se fait alors très aisément. On peut obtenir les (LB) par dualité, à partir des BIBD, en prenant les blocs pour variétés et vice versa. Les AA. exposent une méthode élégante pour l'analyse intra-bloc des (LB) et donnent l'expression d'un facteur d'efficacité du design. Exemple numérique. Table complète des (LB) pour  $k, r$  inférieurs à 11. Classification en designs symétriques (1), partiels (2), et irréguliers (3). Le plan des types (1) et (3) est présenté en détail. Pour ceux du type (2), (PBIBD) (pour la définition, cf. Roy-Laha, ce Zbl. 72, 368) on s'est référé aux numéros de série des deux classes associées des PBIBD énumérés par Bose, Clatworthy et Shrikhande [*Techn. Bull. Univ. North Carolina*, Ser. 50, 107 (1954)]. Détermination des paramètres. *A. Sade.*

**Ramakrishnan, C. S.:** On the dual of a PBIB design, and a new class of designs with two replications. *Sankhyā* 17, 133—142 (1956).

On sait (Cf. l'analyse précédente) que les LBIBD peuvent être obtenus par corrélation, à partir des BIBD. L'A. donne l'analyse et décrit la structure du dual d'un PBIBD (pour la définition cf. Roy-Laha ce Zbl. 72, 368) avec deux classes associées. En transformant par dualité une simple classe avec deux plots par bloc, il obtient une nouvelle classe de designs ayant encore deux répétitions et qui se trouvent être de PBIBD avec 5 classes associées. Mais l'analyse de ces derniers par la méthode duale est immédiate alors qu'une analyse directe du design en tant que PBIB avec 5 classes associées serait des plus laborieuses. Exemple numérique pour  $v = 24, m = 4; b = 8, k = 6$ . Tables pour  $r = 2$ . *A. Sade.*

**Chakravarti, I. M.:** Fractional replication in asymmetrical factorial designs and partially balanced arrays. *Sankhyā* 17, 143—164 (1956).

Les designs avec répétition fractionnaire ont été introduits par Finney [Ann. Eugenics 12, 291 (1945)] pour remédier aux difficultés qui l'on rencontre, dans l'emploi des tableaux orthogonaux (pour la définition, cf. Bush, ce Zbl. 47, 17) et ce qui concerne les interactions. Dans ce travail, on étudie la construction d'arrangements avec répétitions fractionnaires dans des designs non symétriques (pour la définition, cf. Kerawala, ce Zbl. 53, 204). Il est montré que les tableaux orthogonaux peuvent être utilisés pour obtenir la répétition fractionnaire dans des cas de designs non symétriques permettant une grande économie dans l'expérimentation. Construction et tables de solutions utilisables dans le champ actuel des recherches industrielles. Etude d'une classe nouvelle de tableaux: les „partially balanced arrays“. *A. Sade.*

**Rao, C. Radhakrishna:** A general class of quasifactorial and related designs. *Sankhyā* 17, 165—174 (1956).

Un design quasifactoriel est un arrangement satisfaisant aux conditions suivantes: Soient  $v = p_1 p_2 p_3 \cdots p_n$  éléments  $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)$  avec  $x_i = 1, 2, \dots, \dots, p_i; i = 1, 2, \dots, n$ ; et soit un tableau de  $b$  blocs contenant chacun  $k$  éléments distincts, de manière que (i) chaque élément figure exactement  $r$  fois dans le tableau, (ii) les deux éléments  $(x_1, x_2, \dots, x_n)$  et  $y = (y_1, y_2, \dots, y_n)$  apparaissent simultanément dans  $\lambda(c_1, c_2, \dots, c_n)$  blocs avec  $c_i = 0$  ou 1 suivant que  $x_i = y_i$  ou que  $x_i \neq y_i$ . L'A. étudie le cas  $n = 2$ . La construction de ces solutions fait intervenir les carrés Eulériens [Opera omnia, du Pasquier, 7, 231—392]. Analyse des designs. *A. Sade.*

**Roy, J. and R. G. Laha:** Two associate partially balanced designs involving three replications. *Sankhyā* 17, 175—184 (1956).

Un „partially balanced incomplete block design“ (PBIBD) est un arrangement de  $v$  éléments distincts, distribués avec répétitions dans  $b$  blocs composés chacun de  $k$  éléments inégaux satisfaisant aux conditions suivantes: (1) Tout élément apparaît dans  $r$  blocs; (2) étant donnés deux éléments quelconques, ils peuvent être associés de deux manières différentes, l'une excluant l'autre; on dit qu'ils sont I-associés ou II-associés; (3) si  $a$  est un élément quelconque, il existe exactement  $n_1$  éléments qui sont I-associés avec  $a$  et  $n_2$  éléments qui sont II-associés avec  $a$ , quel que soit  $a$ ; (4) si  $a$  et  $b$  sont deux éléments quelconques  $i$ -associés ( $i = \text{I ou II}$ ) le nombre  $p_{11}$  des éléments qui sont I-associés avec  $a$  et  $b$  à la fois est indépendant de la paire initiale  $a, b$ ; (5) le nombre  $\lambda_i$  des blocs qui contiennent une paire donnée quelconque  $a, b$  d'éléments  $i$ -associés ( $i = \text{I ou II}$ ), ne dépend que de  $i$ . L'A. donne une énumération complète des PBIBD avec deux classes associées et  $r = 3$ . *A. Sade.*

**Sprott, D. A.:** Some series of balanced incomplete block designs. *Sankhyā* 17, 185—192 (1956).

L'A. utilise une méthode précédemment exposée par lui (ce Zbl. 55, 377) pour construire des séries de „balanced incomplete block designs“ en utilisant deux

théorèmes de R. C. Bose sur les différences symétriquement répétées [R. C. Bose, Ann. Eugenics 9, 353—399 (ce Zbl. 23,1): th. 2 p. 368, th. 3, p. 370]. Exemples. A. Sade.

**Terpstra, T. J.:** A generalization of Kendall's rank correlation statistic. I, II. Nederl. Akad. Wet., Proc., Ser. A 58, 690—696 (1955), 59; 59—66 (1956).

Consider random variables  $X_h^\alpha$ ,  $\alpha = 1, \dots, m$ ;  $h = 1, \dots, k$ . Observations on these variables are  $x_{h\xi}^\alpha$ ,  $\xi = 1, \dots, n_h^\alpha$ . Three situations are considered. I. For each  $h$ ,  $X_h^1, \dots, X_h^m$  have the same joint distribution and the  $k$  sets are completely independent of each other. The hypothesis to be tested is that all the variables are completely independent against the alternative that the correlations are predominantly positive. II. All the variables are completely independent. The hypothesis to be tested is that for each  $\alpha$  the  $X_h^\alpha$  have the same distribution function against the alternative that upon rearrangement of columns (permutation of  $1, \dots, k$ ) the  $X_1^\alpha, \dots, X_k^\alpha$  exhibit predominantly the same trend for all  $\alpha$ . III.  $m = 2$  and the first row consists of the integers  $1, \dots, k$  in that order and the remaining  $k$  variables are completely independent. The hypothesis to be tested is that the  $X_h^\alpha$  have the same distribution against the alternative that these variables exhibit a trend. If  $\text{sgn } z$  is  $+1, 0, -1$  according as  $z > 0, z = 0, z < 0$  then define  $V_{h,j}^\alpha = \sum_{\xi, \eta} \text{sgn}(x_{h\eta}^\alpha - x_{h\xi}^\alpha)$  and let  $S_{\alpha\beta} = \sum_{h \neq j} \left[ \frac{V_{h,j}^\alpha V_{h,j}^\beta}{n_h^\alpha n_h^\beta n_j^\alpha n_j^\beta} \right]$ . The statistic  $S$  for testing any of the above hypotheses is  $S = \frac{1}{2} \sum_{\alpha \neq \beta} S_{\alpha\beta}$ . For  $m = 2$ ,  $n_h^1 = n_h^2 = 1$ ,  $S$  is identical with Kendall's rank correlation statistic. The mean and variance of  $S$  are derived under the hypotheses with ties in the observations considered. Under certain conditions asymptotic normality is proved. Conditions leading to asymptotic non-normality are given. The first article contains the definitions and the statements of the theorems, the second contains the proofs. D. R. Whitney.

**Stuart, Alan:** Bounds for the variance of Kendall's rank correlation statistic. Biometrika 43, 474—477 (1956).

**Aigner, Alexander:** Anordnungen mit der Rangkorrelation Null. Arch. der Math. 7, 346—348 (1956).

Es wird bemerkt, daß der Spearmansche Korrelationskoeffizient nicht 0 sein kann, wenn die Anzahl der Elemente von der Form  $4k + 2$  oder gleich 3 ist. Ferner wird gezeigt, daß in allen anderen Fällen Anordnungen existieren, die die Rangkorrelation 0 haben. H. Bergström.

**Raj, Des:** On the method of overlapping maps in sample surveys. Sankhya 17, 89—98 (1956).

Verf. geht aus von der National Sample Survey (NSS) of India als Beispiel, bei der es sich u. a. um eine gleichzeitige Statistik der Haushalte (Basis: Bevölkerung) und der Bodennutzung (Basis: Fläche) handelte. Das statistische Problem war dabei die Wahl der Stichproben-Einheiten (Dörfer) für die beiden Statistiken so, daß sie repräsentativ und doch örtlich möglichst dicht beieinander, wenn möglich identisch waren. Lahiri hat (1954) zwei Auswahlmethoden gegeben, genannt „die Serpentin-Methode“ und „die zweidimensionale Methode“, ohne jedoch die mathematische Seite zu erörtern. Gegenstand der vorliegenden Arbeit ist, das Problem mathematisch darzustellen und allgemeine Lösungen zu bieten. Ausgang dafür ist die Darstellung der kombinierten Wahrscheinlichkeiten  $x_{ij}/G$  für die beiden Auswahlprinzipien in einer symmetrischen Matrix. Das Problem ist, diejenigen  $x_{ij}$  zu finden, für welche

$$\sum_{j=1}^n x_{ij} = a_i, \quad \sum_{i=1}^n x_{ij} = b_j, \quad \sum_i a_i = \sum_j b_j = G, \quad x_{ij} \geq 0 \quad \text{und} \quad Z = \sum_i \sum_j c_{ij} x_{ij}$$

Minimum wird, wobei die Größen  $a, b$  und  $c$  (die Entfernung in direktem oder übertragenem Sinne) bekannt sind. So dargestellt handelt es sich um das bekannte „Transport-Problem“ und es ist interessant zu sehen, daß Lahiris „Serpentin-Methode“



de übereinstimmt mit der Methode Dantzig's, die von einer willkürlichen Lösung ausgeht, wie Verf. an einem Zahlenbeispiel demonstriert. Verf. untersucht weiter, ob die Serpentin-Methode optimalen Charakter hat und weist auf den wichtigen Umstand hin, daß jede Anordnung der Dörfer, wenn sie nur schlangenförmig ist, zu demselben Minimum der erwarteten „Entfernung“ führt. Schließlich diskutiert er die Zusammenhänge mit den Problemen von Keyfitz sowie Goodman und Kish.

*P. Lorenz.*

**Guest, P. G.:** Grouping method in the fitting of polynomials to unequally spaced observations. *Biometrika* 43, 149—160 (1956).

Zur Vereinfachung der Rechnung wird man bei der Ausgleichung von sehr vielen Beobachtungen  $y_i = y(x_i)$  gruppieren. Hierdurch wird jedoch ein Verlust an Information eintreten, eine Zunahme der Standardabweichung, eine Abnahme der Wirksamkeit und eine Verzerrung der Schätzwerte. Der Verf. berechnet in Fortführung früherer Arbeiten (s. dies. Zbl. 55, 360) über Gruppierungsmethoden bei gleichen Abständen in der vorliegenden Arbeit die Wirksamkeit und die Verzerrung bei einer vom Verf. angegebenen nicht äquidistanten Gruppierungsmethode und gibt hierzu ein Zahlenbeispiel. Weiter wird für die Ausgleichung durch Polynome erster Ordnung die Verwendung von Treppenfunktionen behandelt und der Zeitbedarf der verschiedenen Methoden für das bearbeitete Zahlenbeispiel angegeben. Die Methode der kleinsten Quadrate ohne Gruppierung ist wirksam und ohne Verzerrung aber aufwendig, mit Gruppierung, schnell, von großer Wirksamkeit aber nicht verzerrungsfrei. Am schnellsten führt das Verfahren der einfachen Treppenfunktion zum Ziel. Es ist von brauchbarer Wirksamkeit und verzerrungsfrei, Schätzwerte für die Standardabweichungen lassen sich jedoch in einfacher Weise damit nicht gewinnen.

*J. Heinhold.*

**Huttly, N. A.:** The fitting of regression curves with autocorrelated data. *Biometrika* 43, 468—474 (1956).

### **Biomathematik. Versicherungsmathematik. Wirtschaftsmathematik:**

**Kostitzin, Vladimir:** Sur le développement des populations bactériennes. *C. r. Acad. Sci., Paris* 242, 611—612 (1956).

**Bailey, Norman T. J.:** On estimating the latent and infectious periods of measles. II. Families with three or more susceptibles. *Biometrika* 43, 322—331 (1956).

**Wangersky, P. J. and W. J. Cunningham:** On time lags in equations of growth. *Proc. nat. Acad. Sci. USA* 42, 699—702 (1956).

Berücksichtigt man bei deterministischer Betrachtung einer mit Wachstums-koeffizienten  $b$  wachsenden Bevölkerung konstant angenommene Latenzzeiten  $\tau_1$  und  $\tau_2$ , in welchen sich die durch Fortpflanzungsvorgang und Selbstregulierungsreaktion bedingten Verzögerungen ausdrücken, so genügt der Umfang  $N(t)$  der Bevölkerung zur Zeit  $t$  der rekursiven Differentialgleichung  $dN(t)/dt = b N(t - \tau_1) \cdot [1 - \{N(t - \tau_2)/K\}]$  mit zwei Gleichgewichten:  $N \equiv 0$  und  $N \equiv K$ . Die Untersuchung der Lösungen in der Umgebung der Singularitäten zeigt, daß das Verhalten von  $N(t)$  für  $N(t) \sim 0$  im wesentlichen von  $b \tau_1$  abhängt, während sich bei  $N(t) \sim K$  je nach dem Wert  $b \tau_2$  näherungsweise harmonische bzw. gedämpfte Schwingungen um  $K$  ergeben. Somit resultieren drei biologisch interessierende Lösungstypen: 1. Langsame monotone Zunahme bis zur Sättigung  $K$ ; 2. gedämpfte Oszillation bzw. 3. asymptotisch stationäre Oszillation um Sättigung als stabiles Gleichgewicht.

*M. P. Geppert.*

**Castoldi, Luigi:** Sulla distribuzione dei tempi di estinzione nelle discendenze biologiche. *Boll. Un. mat. Ital., III. Ser.* 11, 158—167 (1956).

Verf. greift das von I. F. Steffensen [Om Sandsinligheden for at Afkommet uddør. *Mat. Tidsskr. B* 1930, 19—23] u. a. gelöste Problem des Aussterbens von

Familiennamen auf und knüpft an die Darstellung desselben [vgl. M. S. Bartlett: An introduction to stochastic processes (dies. Zbl. 70, 150), S. 39—41] im Rahmen einer multiplikativen Markoff-Kette an, wo die wahrscheinlichkeitserzeugende Funktion  $G^{(r)}(z)$  der Verteilung  $p_j^{(r)}$  der Zahl  $j$  männlicher Nachkommen eines Stammvaters in der  $r$ -ten Nachkommen-Generation durch  $r$ -fache Iteration aus der für  $r = 1$  entsteht:

$$G^{(r)}(z) = \sum_{j=0}^{\infty} p_j^{(r)} z^j; \quad G^{(r)}(z) = G(G^{(r-1)}(z)).$$

Als notwendige und hinreichende Bedingung für sicheres Aussterben ( $\lim_{r \rightarrow \infty} p_0^{(r)} = 1$ ) folgt hieraus bekanntlich  $m = E(N_1) \leq 1$  für den Erwartungswert der Anzahl von Söhnen. Durch Betrachtung der durch schließliches Aussterben bedingten Verteilung der Ordnungsnummer  $N$  derjenigen Generation, welche ausstirbt,

$$\Pr \{N = r\} = (p_0^{(r)} - p_0^{(r-1)})/p_0^{(\infty)} = \sum_{j=1}^{\infty} p_j^{(r-1)} [p_0^{(1)}]^j / p_0^{(\infty)}$$

beweist Verf. unter Benutzung der Tschebyscheff-Ungleichung, daß die mittlere „Aussterbezeit“  $E(N)$  endlich bzw. unendlich ist, je nachdem  $m < 1$  oder  $m \geq 1$ . Beweis und Resultat werden analog auf alle höheren Momente der Aussterbezeit  $N$  angewendet.

M. P. Geppert.

Penrose, L. S., Sheila Maynard Smith and D. A. Sprott: On the stability of allelic systems, with special reference to haemoglobins A, S and C. Ann. Hum. Genetics 21, 90—93 (1956).

Verff. untersuchen Stabilitätsbedingungen für eine Reihe von  $n$  Allelen  $A_1, \dots, A_n$  mit Eignung  $1 + k_{ij}$ , also Selektionsvorteil  $k_{ij}$ , des Genotyps  $A_i A_j$ , wobei erwartungsgemäß die Kinderzahl eines Elternpaares dem Produkt aus deren Eignungen proportional sei. Durch Betrachtung der Eigenwerte der Matrix  $\{k_{ij} / a_i a_j\}$  erweist sich das Gleichgewicht  $a_1, \dots, a_n$  der Genhäufigkeiten  $x_1, \dots, x_n$ , falls die Matrix  $\{k_{ij}\}$  vom Rang  $n - 1$  ist, als stabil dann und nur dann, wenn deren Hauptminoren der Ordnung  $b$  Vorzeichen  $(-1)^b$  haben ( $b = 1, \dots, n - 1$ ). Ist  $\{k_{ij}\}$  vom Rang  $r < n - 1$ , so herrscht Semi-Stabilität; d. h. der an Stelle einer eindeutigen Lösung sich ergebende  $(n - r - 1)$ -dimensionale Unterraum spielt die Rolle einer stabilen Gleichgewichtslage, während innerhalb desselben indifferentes Gleichgewicht herrscht. Für  $k_{ij} \equiv 0$ , also  $r = 0$ , führt dieses Resultat auf den Satz von Hardy und Weinberg.

M. P. Geppert.

Finetti, Bruno de: Verso l'era elettronica nell'assicurazione? Giorn. Ist. Ital. Attuari 19, 31—43 (1956).

● Cissell, Robert and Helen Cissell: Mathematics of finance. Boston: Houghton Mifflin Company 1956. IX, 198, 88 p. \$ 4,50.

Dieses Buch führt an Hand zahlreicher aus der Praxis des Geld-, Bank- und Börsenwesens und der Lebensversicherung entnommener Beispiele in die Zins-, Zinseszins- und Versicherungsrechnung ein. Dabei werden mit Hilfe von Diagrammen die wichtigsten Formeln (insgesamt 41) elementar entwickelt und die Anwendung der beigegebenen Zinseszins- und Rententabellen und Hilfstafeln für 18 jährliche Zinssätze aus dem Bereich von 0,25% bis 8% zur Lösung der verschiedensten Aufgaben gezeigt.

G. Friede.

Palomba, Giuseppe: La teoria matematica del bilancio contabile. Ricerca, Rivista Mat. pur. appl. II. Ser. 7, Nr. 1, 3—17 (1956).

L'A. parte dalla seguente equazione differenziale che riproduce, con soddisfacente approssimazione, le condizioni per la determinazione del netto aziendale  $y(t)$  a fine esercizio, supposto che esso possa considerarsi una funzione continua e derivabile del tempo  $t$ :  $y(t) = A(t) y'(t) + B(t) y''(t)$  dove  $A$  e  $B$  sono funzioni pure derivabili, i cui valori, ad un dato saggio di interesse, consentono di trasformare

flussi e accelerazioni in stock di valori (cioè redditi in capitale). Essa viene definita come l'equazione della situazione patrimoniale; può essere perfezionata con l'introduzione di un autovalore  $\lambda$  che consente alcune correzioni relativistiche. Successivamente, l'A. considera l'equazione del conto economico, come storia dei „flussi“ o ricavi  $R$  e dei contro-flussi o costi  $C$  (comprensivi delle retribuzioni al personale, fitti, ammortamenti, ecc.),  $R = C + \int_{t_0}^{t_1} y'(t) dt + \int_{t_0}^{t_1} y''(t) dt$ . Una terza equazione,

detta di collegamento mostra che il valore di  $Y$  che figura nella situazione patrimoniale è anche pari al valore del netto  $H$  che figurava in bilancio al tempo  $t_0$ , accresciuto dell'integrale di  $y''$ , epurato dalla maggiore velocità d'ammortamento; quindi:

$$y = \left[ H + \left\{ \int_{t_0}^{t_1} y''(t) dt - v t \right\} \right] / \sqrt{1 - v^2/c^2}.$$

Infine l'A. si pone il problema di proiettare, dalla situazione patrimoniale al conto economico, la storia che, a partire dall'istante  $t_1$ , sarà oggetto di un qualsiasi costo o ricavo. A tale scopo l'A. ricorre alla rappresentazione in uno spazio hilbertiano e allo sviluppo in serie di Fourier della funzione  $f(t)$  che esprime l'andamento della categoria dei costi e ricavi sospesi.

*T. Salvemini.*

**Stelson, Hugh E.: Laplace transforms applied to interest functions.** Skand. Aktuarietidskr. 1956, 97—104 (1956).

Der Verf. zeigt, wie man mit Hilfe der Laplace-Transformation kontinuierliche und diskontinuierliche Zinsprobleme, z. B. Barwert einer Zeitrente usw., durch Lösungen entsprechender Differentialgleichungen und Differenzgleichungen behandeln kann. Zusammenstellung einer entsprechenden Formeltabelle.

*W. Saxer.*

**Santoboni, Luigi: Le assicurazioni di annualità su una o due teste, con riferimento all'assicurazione mista e al termine fisso.** Archimede 8, 263—271 (1956).

Verf. gibt exakte und näherungsweise gültige Beziehungen zwischen den Prämien  $P_{x:\overline{n}|}$ ,  $P_{\overline{n}|}$ ,  $P_{x|\overline{n}|}$ ,  $P_{xy:\overline{n}|}$ ,  $P_{xy|\overline{n}|}$ ,  $P_{\overline{x}y:\overline{n}|}$ ,  $P_{\overline{x}y|\overline{n}|}$ , usw.

*E. Zwinggi.*

**Oosterwijk Bruyn, J. J. van: Quelques observations sur le minimum des primes de l'assurance temporaire.** Verzekerings-Arch. 33, Actuar. Bijv. 51—58 (1956).

Betrachtet man die Beiträge für eine temporäre Todesfallversicherung bei festgehaltenem Eintrittsalter als Funktion der Versicherungsdauer  $n$ , so zeigt es sich, daß die Beiträge durch den Einfluß der Abschlußkosten mit wachsendem  $n$  zunächst abnehmen, um dann von einer Dauer  $n_0$  an anzusteigen. Verf. zeigt eine Möglichkeit auf, die Dauer  $n_0$  näherungsweise zu ermitteln. Unter Benutzung der Moivreschen Sterbformel wird eine Reihenentwicklung für  $n_0$  angegeben.

*G. Reichel.*

**Leepin, Peter: Über den Einfluß von Änderungen der Rechnungsgrundlagen auf Prämien und Prämienreserven.** Bl. Deutsch. Ges. Vers.-Math. 3, 3—22 (1956).

Verf. gibt einen didaktischen Zugang zum Problem der Variation der Rechnungsgrundlagen, indem er die jährlichen Veränderungen der Sterbewahrscheinlichkeit und des Zinses als Gewinne und Verluste auffaßt und diese versicherungstechnisch ansammelt. Ausgehend von der Änderung einer einzigen Sterbewahrscheinlichkeit, die bei der gemischten Versicherung zum Moserschen Zeichenwechselsatz hinführt, wird der Satz bewiesen, daß sich bei einer Versicherungsform weder Prämie noch Deckungskapital ändern, wenn mehr Versicherte hinzukommen oder ausscheiden als rechnungsmäßig vorgesehen war, wenn diese nur das Deckungskapital einlegen oder erhalten (1. Hauptsatz). Da sich eine Zinsfußänderung als Variation einer Austrittswahrscheinlichkeit  $d = i/(1+i)$ , an die keine Leistung gebunden ist, deuten läßt, erhält man mit Hilfe des 1. Hauptsatzes einen guten Einblick in die gemischte Versicherung, die allgemeine Versicherungsform und den Charakter von Versicherungen. Setzt man die ursprünglichen Rechnungsgrundlagen mit den rechnungsmäßigen und die geänderten Grundlagen mit dem tatsächlichen Verlauf gleich, so erhält man das



Ergebnis, daß der Gewinnfonds aus den jährlichen Kontributionsgewinnen unter Verzinsung und Vererbung mit dem tatsächlichen Verlauf entsteht (2. Hauptsatz). Betrachtungen über den Einfluß von Änderungen der Rechnungsgrundlagen auf das Deckungskapital beschließen die Arbeit.

G. Reichel.

**Wolff, Hans-Dieter:** Die Reserve-Berechnung linear steigender Versicherungssummen. Bl. Deutsch. Ges. Vers.-Math. 3, 97—101 (1956).

Die Reserveberechnung für eine Risikoversicherung mit linear steigender Versicherungssumme ist verhältnismäßig kompliziert. Daher approximiert Verf. den Reserveverlauf durch eine analytische Funktion, die sich aus einer linearen und einer Exponentialfunktion zusammensetzt. Diese Näherung gestattet, die Reserven gruppenlos zu rechnen. An einem Beispiel wird die Güte der Approximation gezeigt.

G. Reichel.

**Jecklin, H.:** Varia zur hyperbolischen Interpolation von Reservekurven. Mitt. Verein. schweiz. Versicherungsmath. 56, 49—63 (1956).

Verf. approximiert das Deckungskapital einer gemischten Versicherung durch den hyperbolischen Ansatz  $V_{x+n} = t C/n + A t/(1 - \psi t)$ . Durch Beispiele wird die Güte dieser Näherung aufgezeigt. Auch die Differenz der Deckungskapitalien bei fester Sterbetafel, aber verschiedenem Zinsfuß läßt sich durch diesen Ansatz gut approximieren, was durch Beispiele belegt wird. Schließlich werden die Ergebnisse auf Sterbegesetze der Form  $D_{x+t} = D_x(1 - \lambda t)$  angewandt und für einen Versicherungsbestand die genäherten Gesamtdeckungskapitalien mit den exakten Werten verglichen.

G. Reichel.

**Jecklin, H.:** Simplification de la méthode  $F$  pour le calcul des réserves mathématiques en assurance-vie. Inst. Actuários Portug., Bol. Nr. 12, 41—50 (1956).

Nach der vom Verf. entwickelten  $F$ -Methode kann die Gesamtdeckungsrückstellung einer Gruppe von Versicherungen mit der gleichen abgelaufenen Versicherungsdauer  $t$  näherungsweise nach der Formel

$$\sum_i S_i t V_i = t \sum_i S_i g_i \left/ \left[ 1 - t \sum_i S_i g_i h_i \right] \sum_i S_i g_i \right. = \frac{t}{1-t} \sum_i S_i g_i$$

mit  $g_i = 1/F_i n_i$  und  $h_i = (F_i - 1)/F_i n_i$  berechnet werden. In der vorliegenden Arbeit wird gezeigt, daß sich dieses Berechnungsverfahren noch wesentlich vereinfachen läßt, wenn man einen Näherungswert für  $\Phi$  verwendet, der entweder nach der Formel  $\Phi = \bar{g} \bar{h} / \bar{g}$  oder noch bequemer nach der Formel

$$\Phi = \left( \sum_i \frac{S_i}{n_i} - \sum_i S_i g_i \right) / \sum_i S_i$$

ermittelt wird.  $\bar{g}$  und  $\bar{h}$  sind dabei die Hilfwerte für eine mittlere, für die Gruppe repräsentative Versicherungskombination mit dem Eintrittsalter  $\bar{x} = \sum_i S_i x_i / \sum_i S_i$

und der Dauer  $\bar{n} = \sum_i S_i / \sum_i \frac{S_i}{n_i}$ .

G. Friede.

**Dubois, P.:** Les régimes de retraite par répartition et leur avenir. III: Réflexions diverses. Le redressement nécessaire. Bull. trimestr. Inst. Actuaire Français 67, 77—85 (1956).

Im III. Teil seiner Arbeit diskutiert Verf. die Auswirkungen der allgemeinen Wirtschaftsentwicklung auf die finanzielle Lage der Ruhesgeldversicherungseinrichtungen insbesondere in Frankreich. Gestützt auf die in Teil I und II der Arbeit (dies. Zbl. 70, 155) niedergelegten Ergebnisse weist er auf die großen Gefahren des Umlageverfahrens hin und fordert die Versicherungsmathematiker auf, sich mit der Lösung der durch die wirtschaftliche Lage neu gestellten Probleme zu befassen, um diesen Gefahren zu begegnen.

G. Friede.

**Dubois, P.:** Les régimes de retraite par répartition et leur avenir. I. et II. Errata. Bull. trimestr. Inst. Actuaire Français 67, 75 (1956).

**Kreis, H.:** Über das Renditenproblem festverzinslicher Titel. Mitt. Verein. schweiz. Versicherungsmath. **56**, 64—70 (1956).

Für die gesuchte Rendite festverzinslicher Anleihen wird eine quadratische Näherungsgleichung ermittelt, die in einfacher Form befriedigende Ergebnisse liefert. *G. Reichel.*

**Percus, Jerome and Leon Quinto:** The application of linear programming to competitive bond bidding. *Econometrica* **24**, 413—428 (1956).

Ein Problem aus dem Wertpapiergeschäft wird von den Verff. als LP-Problem gedeutet und gelöst. *D. Bierlein.*

**Uzawa, Hirofumi:** Note on preference and axioms of choice. *Ann. Inst. statist. Math.* **8**, 35—40 (1956).

The author starts with an axiomatic definition of a preference relation (there is a misprint in postulate  $P\ 2$  and an incorrect statement about equivalence). He then defines a preference associated with a weak ordering and a choice function derived from a preference relation. There follow theorems about such choice functions rather than, as the author states, about the derivation of preference relations from choice functions. (In a reference to Arrow, *Social Choice and Individual Values*, New York 1951, the last word is misquoted.) *S. Vajda.*

**Wagner, Harvey M.:** An eclectic approach to the pure theory of consumer behavior. *Econometrica* **24**, 451—466 (1956).

Verf. beschreibt das Verhalten eines Verbrauchers — abweichend von den üblichen Modellen (Utility, Nachfragefunktion u. a.) — indem er den erworbenen Warenkorb axiomatisch in Beziehung zu Einkommen und Preismatrix setzt. Dabei werden drei verschiedene preference-Relationen definiert, für die eine Reihe von Sätzen bewiesen werden. *D. Bierlein.*

**Debreu, Gerard:** Market equilibrium. *Proc. nat. Acad. Sci. USA* **42**, 876—878 (1956).

Let  $p$  be a  $l$ -dimensional price vector for  $l$  commodities in an economy. The domain  $C$  of  $p$  is a cone with vertex 0, excluding this vertex. For a given  $p$ , let  $\zeta(p)$  be the set of all excesses of demand over supply. — The author proves that under certain assumptions there is a  $p \neq 0$  such that the intersection of the polar of  $C$  with  $\zeta(p)$  is not empty. This implies, for a wide class of economies, that  $0 \in \zeta(p)$ , i. e. that there exist prices which produce market equilibrium. *S. Vajda.*

**Burger, E.:** On the stability of certain economic systems. *Econometrica* **24**, 488—493 (1956).

Bei der Behandlung dynamischer ökonomischer Modelle interessiert man sich für notwendige und hinreichende Bedingungen dafür, daß sämtliche Wurzeln der Gleichung  $\lambda = a + b e^{-2\theta}$  ( $\theta > 0$ ) negative Realteile besitzen. Verf. leitet ein Kriterium dafür ab, das mit einfacheren Hilfsgleichungen auskommt als das Kriterium von Hayes. *D. Bierlein.*

**Chenery, Hollis B. and Kenneth S. Kretschmer:** Resource allocation for economic development. *Econometrica* **24**, 365—399 (1956).

Verff. entwickeln ein formales Modell für die wirtschaftliche Entwicklung unterentwickelter Länder. Über gewöhnliche LP-Ansätze hinausgehend werden auch nichtlineare Nebenbedingungen berücksichtigt, die jedoch wegen spezieller Eigenschaften der Input-Output-Matrix noch einfache Lösungsmethoden zulassen. *D. Bierlein.*

**Ríos, Sixto:** Methoden und Probleme der Planungsforschung. *Trabajos Estadist.* **7**, 188—198 (1956) [Spanisch].

**Hulthén, Lamek:** What is operational analysis? *Nordisk mat. Tidskrift* **4**, 87—101 engl. Zusammenfassg. 120 (1956) [Schwedisch].

Expository paper.

*E. Følner.*

McCarthy, John: Measures of the value of information. Proc. nat. Acad. Sci. USA 42, 654—655 (1956).

Predicting a future event takes the form of a set of probabilities  $p = (p_1, p_2, \dots, p_n)$ . Properties of functions of  $p$  which are useful as measures of what it is worth to be given  $p$  are considered, Shannon's function  $A \sum p_i \log p_i + \beta$  being an example of such a function. A rule for paying the forecaster by his client and a pay-off rule for the client is defined. It is required that the first mentioned rule should keep the forecaster honest, i. e. it pays for him to give the true probabilities if he knows them. Among other things it is shown that any convex function will measure the value of the information given by the forecaster. *E. Sverdrup.*

● Kuhn, H. W. and A. W. Tucker (edited by): Linear inequalities and related systems. (Annals of Mathematics Studies. No. 38.) Princeton, N. J.: Princeton University Press 1956, XXI, 322 p. \$ 5.—.

This volume, one of the Annals of Mathematics Studies, contains 18 papers (reviewed below) on subjects connected with linear programming and (more loosely) with matrix games. Six of the papers are on combinatorial problems, concerning mainly integral solutions to linear inequalities. Three papers deal with economic models, especially those of A. Wald and J. von Neumann, and generalize some of their results. At the end of the book there is a bibliography of 289 titles; the selection is admittedly based on a personal choice. The editors have contributed an excellent preface, which may with advantage be read even by those who do not aim at becoming experts in the more advanced topics of the papers. *S. Vajda.*

Tucker, A. W.: Dual systems of homogeneous linear relations. Ann. Math. Studies 38, 3—18 (1956).

Consider the following dual systems:  $A'u + C'v \geq 0$ ,  $B'u + D'v = 0$ ,  $v \geq 0$ , and  $-Ax - By = 0$ ,  $-Cx - Dy \geq 0$ ,  $x \geq 0$  where capital letters denote matrices and l. c. letters vectors. The author proves that solutions  $u^*, v^*, x^*, y^*$  exist such that  $v^* - Cx^* - Dy^* > 0$  and  $A'u^* + C'v^* + x^* > 0$ . This theorem, and special cases of it, consolidate various transposition theorems of Farkas, Motzkin and others, the theorem of the alternative for matrices (von Neumann and Morgenstern), and a theorem by J. Ville. A further theorem asserts that  $Kw \geq 0$ ,  $w \geq 0$ ,  $K' = -K$ , has a solution  $w^*$  such that  $Kw^* + w^* > 0$ . This is fundamental in another paper in this volume (Goldman and Tucker, p. 53—98, reviewed next page). Finally, the following new theorem is proved: in the system above each of the  $m + n$  pairs of corresponding inequalities  $v \geq 0$ ,  $-Cx - Dy \geq 0$ , and  $x \geq 0$ ,  $A'u + C'v \geq 0$  contains exactly one inequality ( $\geq 0$ ) which is satisfied as a strict inequality ( $> 0$ ) by some solution of the system. *S. Vajda.*

Goldman, A. J. and A. W. Tucker: Polyhedral convex cones. Ann. Math. Studies 38, 19—40 (1956).

This paper gives a systematic survey of theorems about polyhedral convex cones (p. c. c.). Its four parts deal, respectively, with (1) face structure, (2) the theorems of Minkowski, Farkas and Weyl, (3) the lattice of p. c. c. s, and (4) with extreme faces and minimal spanning sets. The theorems of part two mentioned above assert, in that order, that given a finite set  $A$  of vectors in  $Y$  space, 1. there exists a finite set  $B$  of vectors in  $X$  space such that  $A^* = B^<$ , i. e.  $(x | Ax \leq 0) = (x | x = Bv, v \geq 0)$ , 2.  $A^{**} = A^<$ , 3. there exists a finite set  $B$  of vector in  $X$ -space such that  $A^* = B^<$  and  $B^* = A^<$ . The paper finishes with some comments on cones when  $A$  and  $B$  are allowed to be infinite sets. *S. Vajda.*

Goldman, A. J.: Resolution and separation theorems for polyhedral convex sets. Ann. Math. Studies 38, 41—52 (1956).

A polyhedral convex set  $S$  consists of all solutions of  $Ax \leq b$ . It is shown that if  $S$  is not vacuous, then it is the vector sum of a bounded convex polyhedron



$(X|X = P U, U \geq 0, \sum u_i = 1)$  and a polyhedral convex cone  $(X|X = Q V, V \geq 0)$ . The significance of extreme vectors is discussed in corollaries. — Another theorem asserts that if a bounded convex polyhedron and a polyhedral convex cone do not intersect, then they can be separated by a hyperplane. The proofs use results of the previous paper (preceding review). *S. Vajda.*

**Goldman, A. J. and A. W. Tucker:** Theory of linear programming. *Ann. Math. Studies* 38, 53—98 (1956).

This paper presents a systematic survey of the theory of dual linear programmes in eight parts. Parts 1—3 deal with definitions and existence theorems, and with the fundamental features of dual systems with mixed constraints (i. e. containing equations as well as inequalities). Part 4 discusses the relationship between linear programmes and matrix games. In Part 5 the following theorem is proved: Let  $A x \leq b$ , maximize  $c' x$ , and  $y A \geq c$ , minimize  $b' y$  be two dual programmes. Then a necessary and sufficient condition that  $x^0 \geq 0$ , and  $u^0 \geq 0$  be optimal vectors is that  $(x^0, u^0)$  be a saddle point for  $c x + u b - u A x$  for all  $x \geq 0, u \geq 0$ . The  $u$  and  $x$  are analogous to Lagrange multipliers for the maximizing and minimizing problem respectively. Part 6: Call  $\sum_{j=1}^q a_{ij} x_j = b_i$  ( $i = 1, 2, \dots, p$ ) and  $\sum_{i=1}^p u_i a_{ij} = c_j$  ( $j = 1, 2, \dots, q$ ) a system of equated constraints. It is proved that feasible vectors  $x$  and  $u$  are optimal if and only if they satisfy dual systems of equated constraints. Theorems about extreme vectors and their matrix game analogues are then derived. Part 7 deals with „optimal rays“, which are optimal vectors of the form  $X^0 + \lambda X$ ,  $\lambda \geq 0$ ,  $X^0$  and  $X$  being a fixed optimal, and a fixed vector, respectively. In Part 8: „Analysis and Synthesis Theorems“ the authors give an explicit description of the sets of optimal vectors for dual programmes, and show how to construct programmes with given sets of optimal vectors. *S. Vajda.*

**Fan, Ky:** On systems of linear inequalities. *Ann. Math. Studies* 38, 99—156 (1956).

This paper gives a survey of old and new results about linear inequalities, in four parts: Finite systems of linear inequalities in a linear space of (I) arbitrary and (II) finite dimensions, linear inequalities on a (III) normed or topological linear space, and (IV) on a complex linear space. In the latter case the inequalities concern the absolute values of complex linear functionals. The theorems are, inter alia, about consistency and independence. *S. Vajda.*

**Duffin, R. J.:** Infinite programs. *Ann. Math. Studies* 38, 157—170 (1956).

A linear programming problem is called infinite, if either the number of variables or that of constraints is infinite. The present paper deals with the duality relationships in such programmes. The following definitions are used: A programme  $A x \geq b$ , with given  $A$  and  $b$  is consistent, if there exists a vector  $x \geq 0$  satisfying the programme. It is sub-consistent, if there exist  $x_n \geq 0, q_n \geq 0$  such that  $\lim (A x_n - q_n) = b$ , and super-consistent if there exists  $x \geq 0$  such that  $A x > b$ . Here the notation  $q > 0$  means that  $q$  is an interior point of a given cone. In these terms, theorems and examples are given of which the following are typical: Theorem 1: A programme is consistent and has a finite value (suitably defined)  $M$  if and only if the dual programme is sub-consistent and has a finite (suitably defined) subvalue  $m$ . Also,  $M + m = 0$ . Example 2: Let  $A(s, t) = -A(t, s)$  be a continuous function of real variables  $s$  and  $t$ , and let there be a continuous function  $a(s)$  and a non-decreasing function  $x(t)$  satisfying  $\int_0^1 A(s, t) dx(t) + a(s) > 0, 0 \leq s \leq 1$ . Then there exists a non-decreasing function  $x(t)$  such that  $\int_0^1 A(s, t) dx(t) + a(s) \geq 0, 0 \leq s \leq 1$  and  $\int_0^1 a(t) dx(t) = 0$ . *S. Vajda.*

Dantzig, G. B., L. R. Ford jr. and D. R. Fulkerson: A primal-dual algorithm for linear programs. *Ann. Math. Studies* 38, 170—182 (1956).

The new method for solving a linear programming problem explained in this paper was suggested by the network method, and by the Hungarian method for solving transportation problems [cf. Ford and Fulkerson, Solving the transportation problem, *Management Sci.* 3, 24—32 (1956)], and contains these methods as special cases. It consists of starting with a feasible solution to the dual problem, turning then to a restricted primal problem, and back to an improved dual. A final solution both to the primal and the dual problem is obtained after a finite number of steps.

*S. Vajda.*

Mills, Harlan D.: Marginal values of matrix games and linear programs. *Ann. Math. Studies* 38, 183—194 (1956).

The marginal value of a matrix game  $G$  with respect to  $H$  (both matrices being of the same size) is defined as  $\partial\Delta(G)/\partial H \equiv \lim_{\alpha \rightarrow 0^+} [\Delta(G + \alpha H) - \Delta(G)]/\alpha$  where  $\Delta(A)$

is the value of the game  $A$ . The author proves that  $\partial\Delta(G)/\partial H = \max_{x \in X^0(G)} \min_{y \in Y^0(G)} xHy$ ,

where  $X^0(G)$  and  $Y^0(G)$  are the optimal strategies of the two players in  $G$ . Similarly, the marginal value of the dual linear programmes given by the matrix  $A$  (which includes the constants of the inequalities, and the coefficients of the objective functions) with respect to  $H$  is defined as  $\partial\Phi(A)/\partial H \equiv \lim_{\alpha \rightarrow 0^+} [\Phi(A + \alpha H) - \Phi(A)]/\alpha$

if it exists, where  $\Phi(A)$  is the common optimal value of the objective functions. The author proves that

$$\partial\Phi(A)/\partial H = \max_{x \in U^0(A)} \min_{y \in V^0(A)} \left[ a_{00} + \sum_i x_i a_{i0} + \sum_j a_{0j} y_j + \sum_i \sum_j a_{ij} y_j \right]$$

where  $U_0(A)$  and  $V_0(A)$  are the solution sets of the dual problems. — A game  $B$  is constructed so that  $\partial\Phi(A)/\partial H = \Phi(B)$ . Finally, some existence theorems are mentioned, the validity of which is yet undecided.

*S. Vajda.*

Wolfe, Philip: Determinateness of polyhedral games. *Ann. Math. Studies* 38, 195—198 (1956).

Let  $A$  be an  $n \times m$  matrix and  $X, Y$  non-empty polyhedral subsets of the set of all column vectors of  $m$  components, and of all row vectors of  $n$  components, respectively.  $(A, X, Y)$  is called a polyhedral game. [Note that, if  $X$  and  $Y$  are probability vectors, then  $(A, X, Y)$  is a constrained game, cf. A. Charnes, this *Zbl.* 50, 141]. Define  $v_1 = \sup_{x \in X} \inf_{y \in Y} yAx$ ,  $v_2 = \inf_{y \in Y} \sup_{x \in X} yAx$  and say that the game

has a value  $v$ , if  $v_1 = v_2 = v$ . The author proves the following theorem: If a polyhedral game has a finite value, then there exist optimal strategies for both players. Otherwise  $v_1 = -\infty$  and  $v_2 = +\infty$ . There exist games with finite  $v$ , with  $v = +\infty$ , with  $v = -\infty$ , and with  $v_1 \neq v_2$ .

*S. Vajda.*

Hoffman, A. J. and H. W. Kuhn: On systems of distinct representatives. *Ann. Math. Studies* 38, 199—206 (1956).

Let  $\mathfrak{S} = (S_1, \dots, S_n)$  be a finite collection of subsets of a given set  $S$ . A set  $R = (a_1, \dots, a_n)$  of  $n$  distinct elements of  $S$  is called a system of distinct representatives for  $\mathfrak{S}$ , if  $a_j \in S_j$  ( $j = 1, \dots, n$ ). — The paper gives two necessary and sufficient conditions for the existence of such a system with the additional condition that its intersection with each set of a given finite partition of  $S$  have a cardinality between given bounds. The proof is based on lemmas about two dual Linear Programming problems. They concern the integral property of vertices of a convex region, for instance: „If in a system of linear inequalities with integral coefficients and constant terms every non-singular square submatrix of the coefficient matrix has determinant  $\pm 1$ , then every extreme solution is integral. [Cf. for such problems the paper by Hoffman and Kruskal (same volume, p. 223—246, reviewed below). A special case of the theorem is that due to Hall (this *Zbl.* 10, 345).]

*S. Vajda.*

**Dantzig, G. B. and A. J. Hoffman:** Dilworth's theorem on partially ordered sets. *Ann. Math. Studies* 38, 207—214 (1956).

The theorem of the title (cf. R. P. Dilworth, this *Zbl.* 38, 20) states that the smallest number of disjoint chains in a partially ordered set such that every element of the set belongs to one of the chains equals the largest number of mutually unrelated elements in the partially ordered set. The authors reduce the problem of finding such chains to one of Linear Programming, and that of finding the mutually unrelated elements to its dual. The proof of Dilworth's theorem emerges from the Fundamental Theorem of Duality.  
*S. Vajda.*

**Dantzig, G. B. and D. R. Fulkerson:** On the max-flow min-cut theorem of networks. *Ann. Math. Studies* 38, 215—222 (1956).

The problem of finding the maximal flow from source to sink in a given network with capacity limitations on arcs and nodes is reduced to a transportation problem. Consideration of the dual problem shows that the maximum flow equals the minimal sum of capacities of arcs and nodes in a cut, i. e. a collection of arcs and nodes which meets every chain from source to sink. A theorem attributed to Menger is proved as a consequence of the fact that all variables in a basic feasible solution have integral values, if the capacities are integral.  
*S. Vajda.*

**Hoffman, A. J. and J. G. Kruskal:** Integral boundary points of convex polyhedra. *Ann. Math. Studies* 38, 223—246 (1956).

A polyhedron in  $R_n$  is said to have the integral property (i. p.), if all its vertices have only integral coordinates. A matrix is said to have the unimodular property (u. p.), if every minor determinant equals 0, +1, or -1. Theorem I and II of this paper deal with conditions which are equivalent to the polyhedron of all vectors  $x$  with  $b \leq Ax \leq b'$ ,  $c \leq x \leq c'$  having the i. p., where the components of  $A$ ,  $b$ , etc. are all integral. For instance, a sufficient and necessary condition is that  $A$  have the u. p. — Theorem III gives a sufficient condition for  $A$  to have the u. p., and is connected with results in the paper by Heller and Tompkins in the same volume (cf. the next review). This leads to Theorem IV, with a more general sufficient condition, in terms of features of an oriented graph with vertices  $v_1, \dots, v_n$  of which  $A$  is the incidence matrix versus the set of directed paths  $p_1, \dots, p_m$ , i. e.  $a_{ij} = 1$  if  $v_i$  is on  $p_j$ , and  $= 0$  otherwise. A final section „How to recognize the u. p.“ contains two theorems for this purpose.  
*S. Vajda.*

**Heller, I. and C. B. Tompkins:** An extension of a theorem of Dantzig. *Ann. Math. Studies* 38, 247—254 (1956).

A set of vectors is said to have the Dantzig property if the representation of any vector in the set as a linear combination of independent vectors of the set has only coefficients 1, 0, and -1. The set of column vectors of the constraints-matrix of a transportation problem of Linear Programming has this property and it is proved here that so has the more general set  $S = (u_i, v_j, u_i + v_j, u_i - u_{i^*}, v_j - v_{j^*} \mid i, i^* = 1, \dots, m; j, j^* = 1, \dots, n)$ . Moreover, consider the linear programming constraints  $Ax = b$ . Then, if  $A$  has the Dantzig property, then either all basic representations of  $b$  in  $A$  are integral, or  $b$  has no integral representation in  $A$  at all.  
*S. Vajda.*

**Gale, David:** Neighboring vertices on a convex polyhedron. *Ann. Math. Studies* 38, 255—264 (1956).

**Definition:** The vertices  $b_1, \dots, b_k$  of a convex polyhedron  $P$  are called neighbours, if their convex hull is the intersection of  $P$  with a supporting hyperplane. — The author proves, that for any positive integer  $n$  there exists a polyhedron  $P$  in  $R_{2m}$  having  $n$  vertices, every  $m$  of which are neighbours. Also, if  $P$  is a polyhedron in  $R_k$  with vertices in general position, and  $k < 2m$ , then  $P$  can have at most  $k + 1$  vertices.  
*S. Vajda.*



**Kuhn, H. W.:** On a theorem of Wald. *Ann. Math. Studies* 38, 265—274 (1956).

This paper is devoted to a proof of Wald's theorem about the existence of an equilibrium (this *Zbl.* 14, 223) by an appeal to the duality theorem of linear programming and to Kakutani's fixed point theorem. A variant of Wald's model and the corresponding existence proof are also presented.

*S. Vajda.*

**Thompson, G. L.:** On the solution of a game-theoretic problem. *Ann. Math. Studies* 38, 275—284 (1956).

Let  $A$  and  $B$  be  $m \times n$  matrix games with real, non-negative entries such that the values  $v(A)$  and  $v(B)$  are positive. Then  $p$  can be found so that  $v(M_p) = v[(1-p)B - pA] = 0$ . (This is trivial.) The following theorems are proved: I. If  $p$  is the largest value which satisfies this condition, then there exist optimal strategies  $x$  and  $y$  for  $M_p$  such that  $xBy > 0$ . II. There are at most  $\min(m, n)$  values of  $p$  such that  $v(M_p) = 0$  and that  $x$  and  $y$  exist with  $xBy > 0$ . — Examples are given, one of them such that  $x$  and  $y$  have no rational components. A further theorem concerns the existence of strategies with non-zero terminal component.

*S. Vajda.*

**Gale, David:** The closed linear model of production. *Ann. Math. Studies* 38, 285—303 (1956).

Von Neumann in „Über ein ökonomisches Gleichungssystem und eine Verallgemeinerung des Brouwerschen Fixpunktsatzes“ (this *Zbl.* 17, 39) discussed an economic model expanding at a constant rate and proved that such a model was possible. Assuming that each process involved each good either as input or as output, he proved the uniqueness of the expansion rate. The present paper generalizes slightly the von Neumann model under a weaker assumption, viz. that when the model expands at maximum rate, then all goods are being produced. New results applying to the von Neumann model are derived and illustrated by numerical examples. Finally the special case of the Leontief model (i. e. a von Neumann model where each process produces precisely one single good) is treated.

*S. Vajda.*

## Geometrie.

### Grundlagen. Nichteuklidische Geometrie:

**Stubban, John Olav:** Axiomatic foundation of the euclidean geometry. *Nordisk mat. Tidskrift* 4, 76—84 m. engl. Zusammenfassg. 119—120 (1956) [Norwegisch].

Jedes Axiomensystem muß aus voneinander unabhängigen und miteinander verträglichen Axiomen bestehen. Das wird an Hilberts Axiomensystem für die ebene euklidische Geometrie erläutert. In demselben System können die Grundelemente (z. B. Punkt und gerade Linie) und Grundbeziehungen (Kongruenz usw.) verschieden gedeutet werden, wie an einem Beispiel für Hilberts System gezeigt wird. Als Beispiel einer nichteuklidischen Geometrie, worunter Verf. jede Geometrie versteht, in der ein Axiom oder mehrere des euklidischen Systems aufgehoben oder abgeändert werden, wird die hyperbolische Geometrie angeführt. Für diese wird das Klein-Poincarésche Modell kurz angegeben. Des Verf. Behauptung, der Jesuitenpater Saccheri habe die hyperbolische Geometrie vor Gauß, Bolyai und Lobatschewsky gefunden, sie aber als treuer Katholik aus Gewissensbedenken für falsch erklärt, kann Ref. nicht zustimmen.

*M. Zacharias.*

**Mendelsohn, N. S.:** Non-Desarguesian projective plane geometries which satisfy the harmonic point axiom. *Canadian J. Math.* 8, 532—562 (1956).

Für das bekannte Ergebnis von R. Moufang (dies. *Zbl.* 7, 72), daß in einer projektiven Ebene der Satz von 4. harmonischen Punkt bzw. der damit gleichwertige kleine Desarguessche Satz genau dann gültig ist, wenn sich die zugehörige affine Ebene in üblicher Weise als Koordinatenebene über einem Alternativkörper (der Charakteristik  $\neq 2$ ) auffassen läßt, gibt Verf. eine neue Beweisaneordnung, in der er

nach Möglichkeit die kleine projektive Gruppe in den Vordergrund stellt, wie man es bei Überlegungen dieser Art jetzt allgemein gern tut. Dabei vermeidet er weitestgehend alles Rechnen im Alternativkörper und bevorzugt konfigurationelle Beweise. Im Vergleich zu der Darstellung in dem Buch von Pickert über projektive Ebenen enthält die Arbeit wenig neue Gesichtspunkte. Verf. beginnt nach einleitenden Bemerkungen mit dem Nachweis, daß der kleine Desarguessche Satz gleichwertig ist mit der Existenz der „vollen“ kleinen projektiven Gruppe (d. h. daß die Gruppe der Schiebungen transitiv ist auf den nicht auf der Achse gelegenen Punkten einer durch das Zentrum gehenden Geraden). Es folgen die bekannten Sätze über harmonische Punkte, die in der Aussage gipfeln, daß bei eindeutiger Bestimmtheit des 4. harmonischen Punktes die Ebene die volle kleine projektive Gruppe gestattet. Im weiteren wird zwischen den von einem uneigentlichen Punkt verschiedenen Punkten einer Geraden eine Addition eingeführt (die bis auf die Reihenfolge der Summanden mit der bei Pickert übereinstimmt) und gezeigt, daß bei eindeutiger Bestimmtheit des 4. harmonischen Punktes die Addition nicht von den außerhalb der betreffenden Geraden liegenden Bezugspunkten abhängt und daß die eigentlichen Punkte der Geraden mit dieser Addition eine kommutative Gruppe mit Halbierungsmöglichkeit bilden. Entsprechend wird nach Wahl von Punkten  $0, 1, \infty$  auf einer Geraden und zwei mit  $\infty$  kollinearen Punkten außerhalb der Geraden eine Multiplikation definiert (bis auf die Bezeichnung wie bei Pickert). Es erweist sich, daß auch bei Gültigkeit des kleinen Desarguesschen Satzes das Produkt im allgemeinen nicht schon durch die Wahl von  $0, 1, \infty$  bestimmt ist, daß jedoch die Bildung des Inversen und des Quadrates dann nur von den Bezugspunkten  $0, 1, \infty$  abhängen. Es folgen die Rechengesetze für einen Alternativkörper und der Nachweis der Linearität der Geradengleichungen. Ein Produkt, das durch die Wahl der Punkte  $0, 1, \infty$  eindeutig festgelegt ist, läßt sich in der Form  $a \circ b = \frac{1}{2} (ab + ba)$  einführen, doch lassen sich die Geradengleichungen mit diesem Jordanschen Produkt nicht auf eine leicht zu handhabende lineare Gestalt bringen. Die Arbeit schließt mit einigen Bemerkungen über Fastkörperebenen.

H. Salzmann.

**Gleason, Andrew M.: Finite Fano planes.** Amer. J. Math. 78, 797—807 (1956).

Unter einer Fano-Ebene versteht Verf. eine projektive Ebene, in der jedes vollständige Viereck kollineare Diagonalepunkte hat. Man vermutet, daß jede Fano-Ebene desarguessch ist (A. Zaddach, dies. Zbl. 70, 378). Allgemein ist diese Vermutung noch unbewiesen. In der vorliegenden Arbeit wird jedoch gezeigt, daß sie für endliche Ebenen jedenfalls richtig ist. Hilfsmittel hierzu ist die Untersuchung der Gruppe  $G_L$  der Schiebungen bezüglich der Geraden  $L$  (der zentralen Kollineationen mit Achse  $L$  und Zentrum auf  $L$ ). Es ergeben sich dabei für beliebige endliche projektive Ebenen die folgenden Sätze, die auch sonst z. B. für die Untersuchung von Ebenen mit mehrfach transitiver Kollineationsgruppe wichtig sind: Enthält  $G_L$  (nicht identische) Schiebungen zu zwei verschiedenen Zentren, so ist  $G_L$  eine elementar abelsche  $p$ -Gruppe. Gibt es zu jedem Zentrum auf  $L$  dieselbe Anzahl ( $> 1$ ) von Schiebungen in  $G_L$ , so ist die Ebene eine Translationsebene bezüglich  $L$ . Gibt es zu jeder Achse  $L$  und jedem Zentrum auf  $L$  wenigstens eine (nicht identische) Schiebung, so ist die Ebene desarguessch. Schließlich wird dann nachgewiesen, daß in Fano-Ebenen zu jeder Achse und jedem mit ihr inzidentem Zentrum Schiebungen vorhanden sind, womit das Hauptergebnis der Arbeit gewonnen ist.

H. Salzmann.

**Ostrom, T. G.: Double transitivity in finite projective planes.** Canadian J. Math. 8, 563—567 (1956).

Für endliche projektive Ebenen ungerader nicht quadratischer Ordnung  $n$  (d. h. mit  $n + 1$  Punkten auf jeder Geraden) beweist Verf.: Gestattet eine solche Ebene eine auf der Menge der Punktpaare transitive Gruppe von Kollineationen, so ist die Ebene desarguessch. [Diese Aussage wurde inzwischen von A. Wagner (noch unpubliziert) auch ohne die Einschränkung über die Ordnung bewiesen.] Hat eine

affine Ebene ungerader nicht quadratischer Ordnung eine Kollineationsgruppe, die transitiv auf der Menge der Paare eigentlicher Punkte ist, so ist sie eine Translations-ebene (= Ebene über einem Quasikörper). Mit Hilfe der Typeneinteilung der Translationsebenen von J. André (dies. Zbl. 64, 144) ergibt sich weiter, daß eine solche Ebene genau dann desarguessch ist, wenn in wenigstens einem zu der Ebene gehörigen Quasikörper beide Distributivgesetze oder das Assoziativgesetz der Multiplikation erfüllt sind.

H. Salzmann.

**Hughes, D. R.: Partial difference sets.** Amer. J. Math. 78, 650—674 (1956).

Sei  $\pi$  eine endliche projektive Ebene der Ordnung  $n$  (d. h. jede Gerade enthält  $n + 1$  Punkte),  $\mathcal{G}$  eine nicht nur aus der Identität bestehende Gruppe von Kollinationen von  $\pi$  und  $\pi_0$  die Menge der Fixpunkte und Fixgeraden hinsichtlich  $\mathcal{G}$ . Die Fixmenge  $\pi_0$  ist also eine (ausgeartete oder nichtausgeartete) Unterebene von  $\pi$ . Verf. setzt voraus, daß  $\mathcal{G}$  sowohl die Punkte als auch die Geraden von  $\pi$ , die nicht zu  $\pi_0$  gehören, regulär und transitiv permutiert. Der Fall, daß  $\pi_0$  leer ist, wurde von Bruck (dies. Zbl. 65, 133) untersucht. (Ist hierbei insbesondere  $\mathcal{G}$  zyklisch, so ist  $\pi$  eine zyklische Ebene im Sinne von M. Hall, dies. Zbl. 29, 225). Hier werden die anderen Möglichkeiten für  $\pi_0$  behandelt. Zu jedem Typ von  $\pi_0$  werden Beispiele projektiver Ebenen angegeben. In Verallgemeinerung der Differenzmengen von Bruck (a. a. O.) werden partielle Differenzensysteme (partial difference systems) eingeführt, zu denen man Ebenen der oben beschriebenen Art konstruieren kann.

J. André.

**Edge, W. L.: Conics and orthogonal projectivities in a finite plane.** Canadian J. Math. 8, 362—382 (1956).

Verf. bringt eine Übersicht über Eigenschaften von Kegelschnitten und orthogonalen Gruppen endlicher desarguesscher Ebenen. Die Charakteristik 2 wird ausgeschlossen. Inhalt: Kegelschnitte und ihre kanonischen Dreiecke (Polardreiecke). Die ternäre orthogonale Gruppe von Projektivitäten. Einzelheiten von Geometrien über kleinen Körpern (Galois-Feldern von 3, 5, 7 und 11 Elementen). J. André.

**Barlotti, Adriano: Sui  $\{k; n\}$ -archi di un piano lineare finito.** Boll. Un. mat. Ital., III. Ser. 11, 553—556 (1956).

Sia  $S_q$  un piano lineare finito su di un campo di Galois con  $q = p^f$  elementi ( $p$  primo). L'A. chiama  $\{k; n\}$ -arco in  $S_q$  un insieme di  $k$  punti dei quali mai  $n + 1$  allineati, generalizzando il concetto di  $k$ -arco (B. Segre), essendo quest'ultimo un insieme di  $k$  punti dei quali mai tre allineati. L'A. pone il seguente problema: determinare, per un dato valore di  $n$ , qual'è il massimo valore di  $k$  per il quale esiste in  $S_q$  qualche  $\{k; n\}$ -arco. L'A. ottiene le seguenti limitazioni superiori: (a) se  $q \not\equiv 0 \pmod n$ ,  $2 < n \leq q$ , il massimo valore di  $k$  per il quale si possa avere un  $\{k; n\}$ -arco in  $S_q$  è:  $k = (n - 1)q + n - 2$  (tale valore essendo effettivamente raggiunto in qualche es. addotto dall'A.); (b) se  $q \equiv 0 \pmod n$ , il sopra definito valore di  $k$  è invece:  $(n - 1)q + n$  (tale valore essendo effettivamente raggiunto per  $q = n$ ). L'A. dimostra infine che, se  $q \equiv 0 \pmod n$ , un  $[(n - 1)q + 1; n]$ -arco è sempre incompleto, può essere cioè ampliato in un  $[(n - 1)q + n; n]$ -arco, con l'aggiunta del punto comune alle  $q + 1$  tangenti all'arco stesso, le quali formano fascio [il teorema e la sua dimostrazione prendono a modello un analogo teorema di B. Segre sulla incompletezza dei  $(q + 1)$ -archi in  $S_q$ , se  $q \equiv 0 \pmod 2$ ]. L. Lombardo-Radice.

**Barlotti, Adriano: Un'osservazione sulle  $k$ -calotte degli spazi lineari finiti di dimensione tre.** Boll. Un. mat. Ital., III. Ser. 11, 248—252 (1956).

L'A. chiama  $k$ -calotta, in uno spazio lineare finito,  $S_{3,q}$ , di dimensione 3, sopra un campo di Galois con  $q$  elementi ( $q$  dispari) un insieme di punti di  $S_{3,q}$  di cui mai tre allineati. [N. B. Le  $k$ -calotte sono l'analogo dei  $k$ -archi (B. Segre) di  $S_{2,q}$ , insiemi composti da  $k$  punti di un piano lineare finito a tre a tre non allineati]. Partendo dal fatto che il massimo valore di  $k$  per il quale esiste in  $S_{3,q}$  qualche  $k$ -calotta è  $q^2 + 1$  (R. C. Bose, 1947; B. Qvist, 1952), l'A. pone il seguente problema: deter-



minare i valori di  $k$  ( $\leq q^2$ ) tali che ogni  $k$ -calotta sia contenuta in una  $(q^2 + 1)$ -calotta di  $S_{3,q}$ . Viene data la seguente risposta (parziale): (a) Per  $q \geq 7$  ogni  $(q^2 - h)$ -calotta di  $S_{3,q}$ , con  $0 \leq h \leq q - 7$ , è contenuta in una  $(q^2 + 1)$ -calotta. (b) Se  $q = 3$ , o  $q = 5$ , ogni  $q^2$ -calotta è sempre contenuta in una  $(q^2 + 1)$ -calotta. — Se  $q \geq 5$ , l'A. fa vedere che esistono  $(\frac{1}{2}q(q+1) + 2)$ -calotte non contenute in una  $(q^2 + 1)$ -calotta; il problema rimane però aperto, se  $q \geq 7$ , per altri valori di  $k$  minori di  $q^2 - q + 7$ , se  $q = 5$ , per altri valori minori di  $q^2$ . Nel caso  $q = 3$ , invece, l'A. dimostra su di un esempio che esistono  $(q^2 - 1)$ -calotte, e cioè 8-calotte, non contenute in una 10-calotta. I teoremi dimostrati dall'A. hanno come loro precedente analoghi teoremi di B. Segre sui  $k$ -archi. L. Lombardo-Radice.

**Handest, Frans:** *Constructions in hyperbolic geometry.* Canadian J. Math. 8, 389—394 (1956).

The following instruments are considered for constructions in the hyperbolic plane: the ordinary compass for drawing ordinary circles with given centre and radius; the hypercompass for drawing hypercircles with given axis and radius; the horocompass for drawing horocircles with given diameter through a given point; the ruler for joining two given points; the parallel-ruler for drawing the two parallels through a given point to a given line (it may also be used as an ordinary ruler). It is known that the constructions which can be performed by the ruler and one of the compasses can also be performed by the ruler and either of the other two compasses (N. M. Nestorovič, this Zbl. 21, 49; 36, 102; 39, 157; 60, 329). The author proves that these constructions can also be carried out (1) by means of the parallel-ruler only; (2) by means of the ruler, given either (i) a circle with its centre and two parallel lines, or (ii) a hypercircle with its axis and two parallel lines with their common end not on the axis, or (iii) a horocircle with one diameter and two parallel lines with their common end not at the centre of the horocircle; (3) by means of a ruler and either (i) a compass with fixed adjustment, or (ii) a hypercompass with fixed adjustment. F. A. Behrend.

**Tits, J.:** *Les groupes de Lie exceptionnels et leur interprétation géométrique.* Bull. Soc. math. Belgique 8, 48—81 (1956).

L'A. pose et résout le problème suivant: Associer d'une manière uniforme à tous les groupes semi-simples de Lie une géométrie analogue à la géométrie projective à  $n$ -dimensions associée au groupe  $A_n$ . Les éléments fondamentaux de la géométrie (correspondant aux sous-espaces projectifs) sont les sous-groupes maximaux non semi-simples de  $G$ ; deux éléments appartiennent à la même famille s'ils sont conjugués dans  $G$ ; deux éléments sont appelés incidents si leur intersection contient un sous-groupe maximal résoluble de  $G$ . L'A. caractérise ces géométries par un système d'axiomes. Il postule: 1° qu'il existe une relation assez naturelle entre la géométrie de  $G$  et le schéma des racines irréductibles de  $G$ , 2. que deux éléments fondamentaux  $a$  et  $b$  de la géométrie et une famille  $F$  étant donnés, il y a un élément fondamental  $c$  tel que l'ensemble des éléments de  $F$  incidents à  $a$  et  $b$  est identique à l'ensemble de ceux qui sont incidents à  $c$ , 3. que la géométrie est irréductible. (Sans démonstration.) Le groupe d'automorphismes de la géométrie de  $G$  est  $G$ . Pour les groupes classiques on obtient les géométries classiques. Les  $A_n$ ,  $D_n$ ,  $E_6$ ,  $E_7$ ,  $E_8$  ont été étudiés plus précisément. H. Freudenthal.

### Elementargeometrie:

**Zacharias, Max:** *Die Aufgabe von Senkatachalam Iyer.* Bull. Soc. roy. Sci. Liège 25, 605—606 (1956).

Die Aufgabe, ein Dreieck aus einer Ecke und dem Höhenschnittpunkt zu bestimmen, wenn die beiden andern Ecken auf einem gegebenen orthogonalen Geraden-

paar liegen sollen, hat H. Lorent analytisch gelöst (dies. Zbl. 64, 396). Verf. gibt stattdessen eine sehr einfache geometrische Konstruktion. *E. Schönhardt.*

**Paasche, I.:** Zum Fraktionssatz von Steiner bzw. Euler-Gergonne. Math. naturw. Unterricht 9, 212—213 (1955/56).

**Henderson, Archibald:** The Lehmus-Steiner-Terquem problem in global survey. Scripta math. 21, 309—312 (1956).

Schluß eines früheren Artikels (dies. Zbl. 65, 362). Die Steinersche Verallgemeinerung für das sphärische Dreieck. — Die Richtigkeit des Lehmusschen Satzes in der nichteuklidischen Geometrie. — Ein Beweis mit Hilfe projektiver Geometrie. — Zahlreiche bibliographische Notizen. *M. Zacharias.*

**Tummers, J. H.:** Points remarquables, associés à un triangle. Nieuw Arch. Wiskunde, III. Ser. 4, 132—139 (1956).

$L_1$  und  $L_2$  seien zwei Punkte in der Ebene des Dreiecks  $ABC$ , die bezüglich dieses Dreiecks die Normalkoordinaten  $(1/l_1) : (1/m_1) : (1/n_1)$  und  $(1/l_2) + (1/m_2) + (1/n_2)$  haben.  $A_1, B_1, C_1$  seien die Fußpunkte der Geraden  $AL_1, BL_1, CL_1$ . Die Geraden  $AL_2, BL_2, CL_2$  mögen die Geraden  $B_1C_1, C_1A_1, A_1B_1$  in  $P, Q, R$  schneiden. Dann gehen die Geraden  $A_1P, B_1Q, C_1R$  durch einen Punkt  $L_3$  mit den Normalkoordinaten  $x = m_1 n_2 + m_2 n_1, y = l_1 n_2 + l_2 n_1, z = l_1 m_2 + l_2 m_1$ . Ist  $L_1$  der Schwerpunkt und  $L_2$  der Höhenschnittpunkt von  $ABC$ , so ist  $L_3$  der Lemoinesche Punkt. Wählt man für  $L_1$  und  $L_2$  andere merkwürdige Punkte, so erhält man für  $L_3$  neue merkwürdige, bisher noch nicht bekannte Punkte. Durchläuft  $L_2$  bei festem  $L_1$  eine Gerade, so durchläuft  $L_3$  einen Kegelschnitt. Die Diskussion dieses Satzes führt zu einer Konstruktion des Mittelpunktes eines Kegelschnitts, von dem fünf Tangenten gegeben sind. — Beschreibt  $L_3$  eine Gerade mit der Gleichung  $lx + my + nz = 0$ , so beschreiben  $L_1$  und  $L_2$  die Kubik  $lx(y^2 + z^2) + my(z^2 + x^2) + nz(x^2 + y^2) = 0$ . — Diskussion dieser Kubik. *M. Zacharias.*

**Thébault, V.:** Triangle bordé de carrés. Mathesis 65, 423—426 (1956).

$T' \equiv A'B'C'$  und  $T'' \equiv A''B''C''$  seien die Dreiecke, deren Ecken mit den Mittelpunkten der über den Seiten des Dreiecks  $T \equiv ABC$  nach außen und innen konstruierten Quadrate  $\alpha = BCA_1A_2, \beta = CAB_1B_2, \gamma = ABC_1C_2$  und  $\alpha' = BCA'_1A'_2, \beta' = CAB'_1B'_2, \gamma' = ABC'_1C'_2$  zusammenfallen. Dann sind die Potenzen  $(A), (B), (C)$  der Ecken  $A, B, C$  von  $T$  bezüglich der über den Seiten  $B'C', C'A', A'B'$  von  $T$  und  $B''C'', C''A'', A''B''$  von  $T''$  als Durchmesser beschriebenen Kreise dem Inhalt des Dreiecks  $T$  gleich. — Die Mittelpunkte  $O'_9$  und  $O''_9$  der Feuerbachschen Kreise der Dreiecke  $T'$  und  $T''$  fallen mit den Potenzpunkten der Ternen der Inkreise der Quadrate  $\alpha, \beta, \gamma$  und  $\alpha', \beta', \gamma'$  zusammen. — Die weiteren Folgerungen anzuführen, würde zu weit führen. *M. Zacharias.*

**Labra, Manuel:** Eine interessante Eigenschaft der Fußpunktdreiecke. (Fortsetzung.) Revista Soc. Cubana Ci. fis. mat. 3, 158—165 (1956) [Spanisch].

Der vorliegenden Arbeit sind zwei Artikel des Verf. vorausgegangen: Der erste (dies. Zbl. 67, 126) handelt von den „triángulos podares“, der zweite [Revista Ci. 57, 71—87 (1953)] von den „triángulos pedales“. Wir haben im Deutschen in beiden Fällen nur die Bezeichnung „Fußpunktdreieck“. Im ersten Fall wird das Fußpunktdreieck eines Punktes  $P$  der Ebene des Dreiecks  $ABC$  von den Fußpunkten  $A', B', C'$  der Lote von  $P$  auf  $BC, CA, AB$  gebildet, im zweiten Fall von den Punkten  $(AP, BC) = A', (BP, CA) = B', (CP, AB) = C'$ . Die vorliegende Arbeit ist eine Fortsetzung des ersten Artikels. In diesem hat Verf. die Begriffe der „Fußpunktgeraden“ und des „Fußpunktes“ von  $P$  eingeführt:  $A_1, B_1, C_1$  seien die Mitten von  $PA, PB, PC$ , und  $A_2, B_2, C_2$  die Mitten von  $B'C', C'A', A'B'$ . Dann schneiden sich die drei „Fußpunktgeraden“  $A_1A_2, B_1B_2, C_1C_2$  in einem Punkt, dem „Fußpunkt“ von  $P$ . In der ersten Arbeit wird u. a. gezeigt, daß der Schwerpunkt und der Lemoinesche Punkt, ebenso der Höhenschnittpunkt und der Umkreismittelpunkt und ebenso die beiden Punkte von Brocard je denselben Fußpunkt haben. Das

sind drei Paare isogonaler Punkte. In der Fortsetzung beweist Verf. die Verallgemeinerung: Zwei isogonale Punkte haben immer denselben Fußpunkt; er ist der Mittelpunkt ihrer Verbindungslinie.

*M. Zacharias.*

**Altshiller-Court, N.: The harmonic and the polar transformations.** Math. Gaz. 40, 205—207 (1956).

Wenn ein Punkt  $P$  und eine Gerade  $p$  für ein Dreieck  $(U)$  harmonisch sind und  $(U')$  das polarreziproke Dreieck von  $(U)$  für einen Kegelschnitt  $(K)$  ist, so sind Pol und Polare von  $p$  und  $P$  bezüglich  $(K)$  harmonisch für  $(U')$ . — Der Mittelpunkt eines Mittelpunktskegelschnitts  $(K)$  und die Polare bezüglich  $(K)$  des Schwerpunktes eines Dreiecks  $(U)$  sind harmonisch für das bezüglich  $(K)$  polarreziproke Dreieck  $(U')$  von  $(U)$ . — Umkehrungen. — Sonderfälle, wenn das Dreieck  $U$  zu sich selbst bezüglich  $(K)$  polar ist. — Anwendungen und Verallgemeinerungen. *M. Zacharias.*

**Goormaghtigh, R.: Sur des ellipses associées aux droites de Simson d'un triangle.** Mathesis 65, 395—401 (1956).

Wenn ein Punkt  $M$  den Umkreis  $I$  (Mittelpunkt  $O$  und Radius  $R$ ) eines Dreiecks  $A_1A_2A_3$  durchläuft, so beschreibt das Spiegelbild der Mitte von  $OM$  bezüglich der Wallacegerade von  $M$  in dem Dreieck  $A_1A_2A_3$  eine Ellipse  $E$ . Für die Wallacegerade des Winkels  $\vartheta$  ergibt sich folgende Verallgemeinerung: An die Stelle der Mitte von  $OM$  tritt der Punkt  $N$  des Mittellotes von  $OM$ , von dem aus die Strecke  $OM$  unter dem Winkel  $2\vartheta$  erscheint. Das Spiegelbild von  $N$  bezüglich der Wallacegerade vom Winkel  $\vartheta$  von  $M$  beschreibt eine Ellipse  $E_\vartheta$ , die der Ellipse  $E$  ähnlich ist im Verhältnis  $1 : \sin \vartheta$ . — Ist das Dreieck  $A_1A_2A_3$  rechtwinklig in  $A_1$ , so reduziert sich  $E$  auf eine gerade Strecke, die  $A_2A_3$  gleich und parallel ist, und deren Mitte die Mitte von  $OA_1$  ist. Für die Wallacegerade vom Winkel  $\vartheta$  hat die analoge Strecke die Länge  $A_2A_3 : \sin \vartheta$ . Die Hüllkurve der Ellipsen  $E_\vartheta$  für veränderliches  $\vartheta$  ist ein Kegelschnitt, dessen Mittelpunkt der Mittelpunkt des Feuerbachschen Kreises ist. — Ist  $\varphi$  der Winkel zwischen der Eulerschen Geraden und dem Durchmesser von  $\Gamma$ , der durch den Feuerbachschen Punkt des Tangendendreiecks von  $A_1A_2A_3$  geht, so hat das besondere Dreieck  $A_1A_2A_3$ , in dem  $2 \cos \varphi = (R/OH) [3 - (R^2/OH^2)]$  ist, die Eigenschaft, daß alle Ellipsen  $E_\vartheta$  durch zwei feste Punkte gehen ( $H$  = Höhenschnittpunkt).

*M. Zacharias.*

**Deaux, R.: Sur les ellipses tritangentes à l'hypocycloïde de Steiner d'un triangle.** Mathesis 65, 526—534 (1956).

Verf. untersucht die Eigenschaften der den Steinerschen Dreispitz dreifach berührenden Ellipsen mittels komplexer Koordinaten. Als Einheitskreis benutzt er den Umkreis des Grunddreiecks  $ABC$ . Insbesondere betrachtet er den Fall der Ellipse, die der Ort des Schwerpunktes der Punkte ist, die auf den Seiten eines Dreiecks durch eine veränderliche Wallacegerade bestimmt werden.

*M. Zacharias.*

**Deaux, R.: Sur les trièdres.** Mathesis 65, 407—411 (1956).

Sätze über die Lage von Halbgeraden, die von dem Scheitel eines Trieders ausgehen. Einer dieser Sätze lautet: Die notwendige und hinreichende Bedingung dafür, daß in dem Trieder  $(D) = (Dx, Dy, Dz)$  eine Halbgerade  $p$  durch  $D$  existiert, die den Gleichungen  $(xp) = (yz)$ ,  $(yp) = (zx)$ ,  $(zp) = (xy)$  genügt, ist, daß  $(D)$  entweder der Gleichung  $1 + \cos(xy) + \cos(yz) + \cos(zx) = 0$  oder einer der drei Gleichungen  $1 + \cos(xy) - \cos(yz) - \cos(zx) = 0$  genügt. Im ersten Fall liegt  $p$  in dem Trieder  $D(x', y', z')$ , dessen Kanten die Verlängerungen von  $x, y, z$  über  $D$  hinaus sind, und im zweiten Fall innerhalb des Trieders  $D(x, y, z')$ . Im ersten Fall bilden die inneren Winkelhalbierenden der Flächen von  $(D)$  ein dreirechtwinkliges Trieder, und im zweiten Fall gilt dasselbe für die innere Winkelhalbierende der Fläche  $Dxy$  und die äußeren Winkelhalbierenden der beiden anderen Flächen.

*M. Zacharias.*

**Hansen, Walter: Ein Beweis der Ptolemäischen Ungleichung.** Arch. der Math. 7, 320—322 (1956).



Der Satz, daß zwei der drei Produkte aus den Längen je zweier Gegenseiten eines Tetraeders zusammen stets mindestens so groß sind, wie das dritte, wird hier samt der Umkehrung des Satzes von Ptolemäus mittels Quaternionen bewiesen und dann zur Herleitung von zwei weiteren Ungleichungen, darunter der von Hornich und Hlawka (dies. Zbl. 27, 132) verwendet. Vgl. auch F. W. Levi (dies. Zbl. 34, 296).

*E. Schönhardt.*

**Marmion, A.:** Sur le „module“ d'un tétraèdre. Mathesis 65, 519—526 (1956).

Sind  $a$  und  $a'$  die Längen zweier Gegenkanten  $BC, DA$  eines Tetraeders  $ABCD$  und  $\alpha$  und  $\alpha'$  die Diederwinkel, deren Kanten jene Geraden sind, so hat das Trinom  $H = a^2 + a'^2 + 2aa' \operatorname{ctg} \alpha \operatorname{ctg} \alpha'$  für die drei Gegenkantenpaare denselben Wert. Dasselbe gilt für den Bruch  $K = a a' / \sin \alpha \sin \alpha'$  und folglich für alle Funktionen von  $H$  und  $K$ . Verf. nennt  $M = H/2K = [(a^2 + a'^2)/2aa'] \sin \alpha \sin \alpha' + \cos \alpha \cos \alpha'$  den Modul des Tetraeders und entwickelt eine große Zahl von Ausdrücken von  $M$  durch die Inhalte der Flächen, die Höhen, die Radien der berührenden Kugeln usw. des Tetraeders. Er berechnet ferner den Wert des Moduls für ein windschiefes Vierseit mit den Seiten  $a, b, c, d$   $M = (2 \sum a^2 b^2 - \sum a^4) / 8abcd$  und für ein Tetraeder mit einem dreieckigen Trierer in  $D$

$$M = [(a'^2 + b'^2 + c'^2)/2aa'] \sin \alpha.$$

*M. Zacharias.*

**Deaux, R.:** Sur le premier point de Lemoine d'un tétraèdre. Mathesis 65, 411—412 (1956).

In jedem Tetraeder  $(A) = A_1 A_2 A_3 A_4$  sind ein beliebiger Punkt  $P$  und der Schwerpunkt  $P'$  seines Fußpunktetraeders homolog in einer Affinität  $\omega$ , deren eigentliche Deckebenen die Symmetrieebenen der Quadrik  $\Sigma$  sind, die  $(A)$  in den Höhenfußpunkten eingeschrieben ist. Ihr Mittelpunkt ist der erste Lemoinesche Punkt  $K$  von  $(A)$ .

*M. Zacharias.*

**Court, N. A.:** Some missing theorems on the anticomplementary tetrahedron. Amer. math. Monthly 63, 714—716 (1956).

Das antikomplementäre Tetraeder (a. T.)  $A'' B'' C'' D'' = T''$  eines Tetraeders  $T$  hat das Tetraeder  $T$  zum komplementären Tetraeder, d. h. die Ecken von  $T$  sind die Schwerpunkte der Flächen des a. T. Die beiden Tetraeder  $T$  und  $T''$  sind also homothetisch bezüglich ihres gemeinsamen Schwerpunktes im Verhältnis  $-1:3$ . Eine Kante des a. T. wird gedrittelt durch die beiden Flächen von  $T$ , die jene Kante trifft. Die 12 Ecken der 4 antikomplementären Dreiecke der 4 Seitendreiecke von  $T$  liegen paarweise auf den 6 Kanten des a. T. von  $T$ . Das a. Dreieck einer Fläche von  $T$  ist homothetisch zu der entsprechenden Fläche des a. T. bezüglich der vierten Ecke von  $T''$  im Verhältnis  $2:3$ . Die drei Kanten des Mongeschen Parallelepipeds von  $T$ , die durch eine gegebene Ecke von  $T$  gehen, treffen die Gegenfläche dieser Ecke in den Ecken des a. Dreiecks jener Fläche von  $T$ . Sind  $D_A, D_B, D_C$  die  $D$  entsprechenden Punkte in den a. Dreiecken der Dreiecke  $DBC, DCA, DAB$ , so ist das Dreieck  $D_A D_B D_C$  symmetrisch zu  $ABC$ . Sind  $A_d B_d C_d, B_a C_a D_a, \dots$  die a. D. der Dreiecke  $ABC, BCD, \dots$  und  $U, V, W$  die Mitten von  $DA, DB, DC$ , so schneiden sich  $UA_d, VB_d, WC_d$  in einem Punkt und gehen durch die Schwerpunkt der Dreiecke  $DBC, DCA, DAB$ .

*M. Zacharias.*

**Thébault, V.:** Systèmes de cercles et de points cosphériques. Mathesis 65, 418—420 (1956).

1. Notwendige und hinreichende Bedingung dafür, daß vier in den Ebenen der Flächen eines Tetraeders liegende Kreise auf einer Kugel liegen, ist, daß jede Tetraederecke dieselbe Potenz bezüglich der drei Kreise in den Ebenen der durch die Ecke gehenden Flächen habe. — 2. Notwendige und hinreichende Bedingung dafür, daß die auf den Kanten  $BC, CA, AB, DA, DB, DC$  eines Tetraeders  $ABCD$  liegenden Punktpaare  $XX', YY', ZZ', X_1 X'_1, Y_1 Y'_1, Z_1 Z'_1$  auf einer Kugel liegen, ist, daß die Gleichungen  $AX_1 \cdot AX'_1 = AY \cdot AY' = AZ \cdot AZ', \quad BY_1 \cdot BY'_1 = BZ \cdot BZ' = BX \cdot BX', \dots$  bestehen. — Verf. verweist bezüglich 1 auf M. Monseau, Mathesis

65, 281 (1956) und bezüglich 2 auf V. Thébault, Mathesis 42, 32—33 (1928).

M. Zacharias.

**Thébault, V.: Sphères associées à un tétraèdre.** Mathesis 65, 426—428 (1956).

Um die Ecken  $A, B, C, D$  eines Tetraeders  $T \equiv ABCD$  werden Quaternen von Kugeln  $(A), (B), (C), (D)$  mit den Radien  $(a_1, a_2, a_3, a_4), (b_1, b_2, b_3, b_4), (c_1, c_2, c_3, c_4), (d_1, d_2, d_3, d_4)$  beschrieben.  $P, Q, S, U$  seien die Potenzpunkte der Quaternen von Kugeln und  $\alpha, \beta, \gamma, \delta$  die Radien der Orthogonalkugeln der vier Kugeln jeder der vier Quaternen. Verf. leitet metrische Beziehungen zwischen diesen Größen und den Kanten von  $T$  und den Schwerpunkten der Tetraeder  $T$  und  $PQSU$  her.

M. Zacharias.

**Court, Nathan Altshiller: Cercles cosphériques.** Mathesis 65, 516—518 (1956).

Verf. leitet mittels elementarer Schlüsse folgenden Satz her und dehnt ihn auf drei und mehr Kreise aus: Die Ebenen zweier Kreiseschneiden sich in einer Geraden  $g$ . Wenn auf  $g$  zwei Punkte jeweils gleicher Potenz bezüglich beider Kreise existieren. 1. dann besitzen sämtliche Punkte von  $g$  bezüglich beider Kreise die gleiche Potenz; 2. dann schneiden sich die beiden Kreise auf  $g$ ; 3. dann liegen die beiden Kreise auf einer Kugel.

H. R. Müller.

**ApSimon, H. G.: Almost regular polyhedra.** Math. Gaz. 40, 81—85 (1956).

Eine für beliebige Dimension gültige Definition eines regulären Polyeders fordert zwei Symmetrien: Die erste vertauscht die Ecken einer Begrenzungsfläche zyklisch, die andere vertauscht zyklisch die Flächen, die in einer Ecke  $C$  von  $c$  zusammenstoßen. In drei Dimensionen kann man diese Definition ersetzen durch die Forderung A: (a) reguläre Begrenzungsflächen, die (b) alle kongruent sind, (c) reguläre Eckfiguren, die (d) alle kongruent sind. Läßt man (b) und (c) weg, so erhält man im wesentlichen die Archimedischen Körper. Verf. zeigt 1. (b) ist überflüssig. 2. Läßt man (c) weg, so erhält man die von ihm „facially regular“ genannten Polyeder, und läßt man (a) weg, so erhält man die „vertex regular“ Polyeder (s. dies. Zbl. 38, 308; 54, 62). Als Beispiel eines Polyeders, das (d) nicht erfüllt, wird das räumliche Kreuz aus sieben Würfeln gegeben. — Sodann gibt der Verf. ein Beispiel eines Polyeders im Raume von  $2n - 1$  Dimensionen ( $n \geq 4, \neq 6$ ), das der Forderung A genügt, aber nicht regulär ist. [Anm. des Ref.: ein anderes solches Beispiel gibt H. S. M. Coxeter im Referat obiger Arbeit in Math. Rev. 17, 1233 (1956)].

J. J. Burckhardt.

**Fejes Tóth, L.: On the sum of distances determined by a pointset.** Acta math. Acad. Sci. Hungar. 7, 397—401, russ. Zusammenfassg. 401 (1956).

Der Verf. beweist auf einfache Art: Gegeben sei eine Menge aus  $n$  Punkten  $P_i$  vom Umkugelradius  $r$ .  $S_n$  sei die Summe der  $\binom{n}{2}$  Entfernungen  $P_i P_j$ . Für ebene Punktmengen ist  $S_n \leq r n \operatorname{ctg} (\pi/2n) < 2r n^2/\pi$  (Gleichheit nur für reguläre Polygone). Ohne Dimensionsbeschränkung ist  $S_n \leq r n \sqrt{\binom{n}{2}}$  (Gleichheit nur für reguläre Simplexe). Für dreidimensionale Punktmengen vermutet der Verf.  $S_n < \frac{2}{3} r n^2$ .

H. Lenz.

**Smirnova, Ch. A.: Eine Aufgabe über  $g$ -Kreise.** Mat. Sbornik, n. Ser. 39 (81), 397—399 (1956) [Russisch].

$g(n)$  sei die Anzahl der Kreise, auf denen genau drei von  $n$  nicht auf einem Kreis liegenden Punkten der Ebene bzw. Kugeloberfläche liegen. Die Verf. zeigt  $g(4) \geq 4$ ,  $g(5) \geq 6$ ,  $g(n) \geq 8$  für  $n \geq 6$ . Zum Beweis dienen einfache Sätze über konvexe Polyeder.

H. Lenz.

### Analytische Geometrie. Projektive Geometrie:

**Watson, G. N.: A bilinear transformation.** Edinburgh math. Notes Nr. 40, 1—7 (1956).

Es handelt sich um die lineare Transformation der komplexen  $w$ -Ebene, welche einer Drehung der Kugel bei stereographischer Projektion derselben auf die  $w$ -Ebene entspricht. Die gefundene Formel ist im wesentlichen die von Cayley [Math. Ann. 15, 238—240 (1879); Coll. math. works, Vol. X, 153—154 (1896)]. Die Methode ist durchweg elementar und besteht darin, die sechs rechtwinkligen Koordinaten eines Punktes  $P(x, y, z)$  der Kugel und des Punktes  $P'(x', y', z')$ , in den er durch die Drehung übergeführt wird, aus den drei Gleichungen der die Drehung darstellenden orthogonalen Transformation, den beiden Kugelgleichungen für  $P$  bzw.  $P'$  und den beiden, die stereographische Abbildung vermittelnden Gleichungen für  $P$  bzw.  $P'$  zu eliminieren. Sie ist, wie Verf. selbst sagt, „somewhat tedious“. Ref. bemerkt dazu, daß die Elimination auch weniger umständlich und doch noch elementar durchgeführt werden kann. Cayley geht im Grunde ähnlich vor, benützt jedoch zum Teil die Verifikation an Stelle einer direkten Herleitung, wodurch er das Wegheben eines sonst auftretenden Faktors erspart. — Zum Schluß stellt Verf. seine Methode derjenigen von A. R. Forsyth [Theory of Functions (Cambridge 1900), p. 717] gegenüber, welche sich nichtelementarer Hilfsmittel bedient. *E. Schönhardt.*

**Stone, A. P.:** On the stereographic projection of the sphere. Math. Gaz. 40, 181—184 (1956).

Die analytische Geometrie liefert eine einheitliche Methode für die Behandlung der stereographischen Projektion und der Probleme der sphärischen Trigonometrie. Das Grundergebnis ist die Gleichung der Projektion eines allgemeinen Kreises. Diese wird auf die polare, äquatoriale und schiefe stereographische Projektion angewendet. Sodann wird die Kosinusformel für ein rechtwinkliges sphärisches Dreieck abgeleitet. Schließlich wird gezeigt, daß die Konstruktion zur Bestimmung der planetaren Zeit auf dem Astrolabium die stereographische Projektion eines sphärischen Problems ist. *M. Zacharias.*

• **Lebesgue, Henri:** Les coniques. Préface de Paul Montel. Nouveau tirage. Paris: Gauthier-Villars 1956. VII, 190 p.

**Maravall Casesnoves, Dario:** Über die Simultaninvarianten eines Kreises und eines Kegelschnittes. Gac. mat., Madrid 8, 199—207 (1956) [Spanisch].

**Stefánsson, Sigurkarl:** A theorem on the diameters of a parabola, with applications. Nordisk mat. Tidskrift 4, 189—194, engl. Zusammenfassg. 229 (1956) [Dänisch].

Jedem Punkt  $O$  in der Ebene einer Parabel ordnet Verf. ein Durchmesserpaar zu. Liegt  $O$  außerhalb der Parabel, so gehen die beiden Durchmesser durch die Berührungspunkte der durch  $O$  gehenden Tangenten. Liegt  $O$  innerhalb der Parabel, so gehen die Durchmesser durch die Endpunkte der durch  $O$  halbierten Sehne. Schneidet eine beliebige Sehne durch  $O$  die Parabel in  $A$  und  $B$  und die beiden Durchmesser in  $P$  und  $P_1$ , so ist  $OA \cdot OB = OP \cdot OP_1 = OP^2$ . Dieser Satz wird angewendet zur Konstruktion einer Parabel, von der 4 Punkte oder 3 Punkte und 1 Tangente, 2 Punkte und 2 Tangenten, 1 Punkte und 3 Tangenten, oder 4 Tangenten gegeben sind. *M. Zacharias.*

**Soné, Také and Isaku Fujisawa:** Characteristics of the generalised Archimedes' spirals. Sci. Reports Tôhoku Univ., I. Ser. 39, 297—302 (1956).

**Kagan, V. F.:** Über eine geometrische Aufgabe aus der Theorie der Schneideinstrumente. (Nach einem Konzept V. F. Kagans zum Drucke bearbeitet von G. I. Barenblatt.) Trudy Sem. vektor. tenzor. Analizu 10, 23—29 (1956) [Russisch].

Die Aufgabe führt auf Regelflächen, die durch Schraubung einer Geraden um eine sie nicht schneidende Achse entstehen.

**Bottema, O.:** Inequalities in the geometries of spheres and of lines. Nederl. Akad. Wet., Proc., Ser. A 59, 523—531 (1956).

Ist in einem projektiven  $S_{n-1}$  eine Quadrik  $\Omega$  mit der Gleichung  $F = \sum a_{ij} x_i x_j = 0$  und der von  $q \leq n$  Punkten  $P^h$  aufgespannte lineare Raum  $S'$  der Punkte



$x = \sum \lambda_h x^h$  gegeben, dessen Dimension  $\leq q - 1$  ist, so ist der Schnitt von  $S'$  mit  $\Omega$  eine Quadrik  $\omega$  mit der Gleichung  $Q = \sum (P_i P_j) \lambda_i \lambda_j = 0$ , wobei die Koeffizienten  $(P_i P_j) = (P_j P_i) = \sum a_{kl} x_k^i x_l^j$  dann und nur dann verschwinden, wenn  $P_i$  und  $P_j$  bezüglich  $\Omega$  und  $\omega$  konjugiert sind. Die Diskriminante  $H' = \text{Det} (P_i P_j)$  von  $\omega$  ändert dabei ihr Vorzeichen nicht, wenn die Punkte  $P^h$  den Faktor  $\varrho \neq 0$  aufnehmen; ersetzt man  $F$  durch  $k F$ , so ändert sich das Vorzeichen von  $H'$  nur um den Faktor  $(-1)^q$  wenn  $k < 0$  ist. Im Falle  $q = n$  sei  $D = \text{Det} |x_i^h| \neq 0$  und  $H$  die Diskriminante von  $\Omega$ ; dann ist  $H' = D^2 H$ , d. h.  $H'$  und  $H$  haben dasselbe Vorzeichen. Ist  $D = 0$ , so auch  $H' = 0$ . — Aus diesem einfachen Sachverhalt werden eine Reihe von Folgerungen gezogen für die  $N$ -dimensionalen Geometrien der nicht-orientierten und orientierten Kugeln und der Liniengeometrie, deren Gebilde sämtlich durch Koordinaten darstellbar sind, die an eine quadratische Relation  $\Omega = 0$  gebunden sind. — Als Beispiele der erhaltenen zahlreichen Ergebnisse führen wir folgende Sätze an: 1. Sind im euklidischen  $E_N$   $N + q$  Kugeln  $B_i$  mit den Potenzen  $(B_i B_j)$  gegeben, so ist stets  $P_N = (-1)^{N+1} \text{Det} (B_i B_j) \geq 0$  und  $P_N = 0$  dann und nur dann, wenn die Kugeln eine gemeinsame Orthogonalkugel besitzen. 2. Bezeichnet  $(C_i C_j) = (C_j C_i)$  das Quadrat der Tangentialentfernung zweier orientierter Kugeln („Zykeln“) in  $E_N$ , so gilt: Für  $N + 3$  Zykeln in  $E_N$  ist stets  $T = (-1)^{N+1} \text{Det} (C_i C_j) \geq 0$ ;  $T = 0$  kennzeichnet linear abhängige Zykeln. 3.  $N + 2$  linear unabhängige Zykeln bestimmen einen linearen  $N$ -Komplex von Zykeln, der hyperbolisch, parabolisch oder elliptisch ist, je nachdem  $(-1)^{N+2} \text{Det} (C_i C_j) < 0, = 0, > 0$  ist. 4. Für  $N = 2$  sind darin einige bekannte Ergebnisse der ebenen Kreisgeometrie enthalten, z. B. die von Casey stammende Verallgemeinerung des Ptolemäischen Satzes. 5. Ist  $(L_i L_j)$  die Plückersche Bilinearform der linearen Komplexe (oder Geraden)  $L_i$  und  $L_j$ , so folgt, daß für sechs lineare Komplexe (oder Geraden)  $L_i$  stets  $U = \text{Det} (L_i L_j) \leq 0$  ist;  $U = 0$  kennzeichnet linear abhängige Komplexe (Geraden). K. Strubecker.

## Algebraische Geometrie:

Gigl, Helmut: Über die Multiplizität eines isolierten Schnittpunktes von  $n$  Hyperflächen im  $R_n$ . Monatsh. Math. 60, 198—204 (1956).

Besitzen  $n$  Hyperflächen  $f_i(x) = f_i(x_1, \dots, x_n) = 0$  ( $i = 1, 2, \dots, n$ ) im Ursprung  $O$  einen  $m_i$ -fachen Punkt, ist ferner  $O$  ein isolierter Schnittpunkt dieser  $n$  Hyperflächen, so schneiden sich diese in  $O$  mit einer Multiplizität  $\geq m_1 m_2 \dots m_n$ ; das Gleichheitszeichen gilt nur für den Fall, daß die Hyperflächen in  $O$  keine gemeinsame Tangente besitzen. Während Perron [S.-Ber. math.-naturw. Kl. Bayer. Akad. Wiss. München 1954, 179—199 (1955)] und Zariski (dies. Zbl. 16, 100) obigen Satz vermittels Resultantenbildungen unter der zusätzlichen Annahme beweisen, daß sich die Hyperflächen nur in endlich vielen Punkten schneiden, können hier die Hyperflächen noch höherdimensionale Mannigfaltigkeiten enthalten, die nicht durch den Ursprung gehen; diese Verallgemeinerung ist von Perron wohl bewußt vermieden worden (vgl. Fußnote 2 der zitierten Arbeit). Verf. gibt eine idealtheoretische Formulierung des Satzes und führt den Beweis durch Übergang zum Potenzreihenring  $\tilde{o}$ , wodurch Erweiterungs Ideale von  $\mathfrak{o}$  in  $\tilde{o}$  alle nicht im Ursprung verschwindenden Komponenten verlieren [vgl. etwa Gröbner, Moderne algebraische Geometrie (dies. Zbl. 33, 127), 138.10 ff.] B. Renschuch.

Morikawa, Hisasi: Cycles on algebraic varieties. Proc. internat. Sympos. algebraic number theory, Tokyo & Nikko Sept. 1955, 245—247 (1956).

Applying the theory of harmonic integrals, we shall prove some relations between cycles and multiple integrals on an algebraic variety and give a new birational invariant. [Keine Beweise, (Red.).] Einleitung des Verf.

**Northcott, D. G.:** On the algebraic foundations of the theory of local dilatations. Proc. London math. Soc., III. Ser. 6, 267—285 (1956).

Diejenigen birationalen Transformationen einer Mannigfaltigkeit  $V_d$ , die von B. Segre mit dem Namen „Dilatationen“ bezeichnet worden sind [dies. Zbl. 46, 389; Rend. Circ. mat. Palermo, II. Ser. 1, 373—379 (1952)] nehmen in der algebraischen Geometrie eine immer wichtigere Stellung ein.  $V_d$  ist auf einem algebraisch abgeschlossenen Körper  $K$  gegeben; man betrachtet einen einfachen Punkt  $O$  von  $V_d$ , und eine auf  $V_d$  liegende und durch  $O$  hindurchgehende  $M_r$  (wo  $0 \leq r \leq d-2$ ); eine Dilatation transformiert dann  $V_d$ , wie bekannt, in eine  $V'_d$ , so daß den Punkten von  $V_d$  außer  $M_r$  Punkte von  $V'_d$  eineindeutig entsprechen, während  $M_r$  in eine  $M'_{d-1}$  und  $O$  in eine auf  $M'_{d-1}$  liegende Mannigfaltigkeit  $L'$  der Dimension  $d-r-1$  verwandelt wird; die Transformation wird in der Umgebung eines Paares  $O, O'$  untersucht, wo  $O'$  auf  $L'$  liegt. Die vorliegende Abhandlung besteht aus zwei Teilen. Der erste Teil hat einen rein algebraischen Charakter und studiert die abstrakten Beziehungen der Lokalfunktionen  $Q(L', V')$  und  $Q(M', V')$  zu dem Ringe  $Q(O, V)$  und zu dem mit  $M_r$  assoziierten Primideal  $p$ . Der zweite Teil enthält die geometrische Verwertung der vorstehenden abstrakten Theorie und führt zu den lokalen Gleichungen in  $O, O'$  der Dilatation und als Hauptziel zu den Gleichungen von zwei sich in der Dilatation entsprechenden Mannigfaltigkeiten  $W, W'$  der Dimension  $d-1$ .

*E. G. Togliatti.*

**Nollet, Louis:** Les genres pseudocanoniques des surfaces algébriques régulières. Bull. Soc. math. Belgique 8, 43—47 (1956).

Sur une surface algébrique  $S$  régulière, douée de torsion, l'addition des diviseurs de zéro au système canonique permet de construire les systèmes „pseudo-canoniques“,  $|K_j|$ , de dimensions  $p_j - 1$ ,  $p_j$  est alors un genre pseudo-canonique. En général, on admet  $H_1$ : quelque soit  $j$ ,  $p_j = p_g + 1$ , ceci étant déduit de l'hypothèse  $H_2$ : que la surface  $S$  est l'image d'une involution sans coïncidences sur une autre surface  $S'$ . Mais Severi montre que  $H_2$  est contredit par le fait que sur les Riemanniennes de  $S$  et  $S'$  le groupe de monodromie de l'involution doit être transitif ce qui exclut la régularité de  $S$ . L'hypothèse  $H_1$  n'est pas toujours vraie; elle le sera nécessairement si le groupe de la division est le groupe de Klein ou un groupe cyclique abélien d'ordre  $p^n$  ( $p$  premier). Cette proposition résulte du fait qu'à toute surface  $S$  irréductible on peut faire correspondre une surface douée d'un faisceau de courbes irréductibles  $E$  elliptiques de degré zéro, dont les groupes de torsion sont isomorphes, pour lesquelles l'A. a calculé les genres pseudo-canoniques [Acad. roy. Belgique, Bull. Cl. Sci., V. Sér. 40, 914—937 (1954)], en définissant les diviseurs du faisceau  $E$  qui seront les  $s$  nombres  $e_i > 1$ , correspondant à un élément du faisceau réductible sous la forme  $e_i E_i$ . Pour qu'il y ait torsion de la surface, il faut et suffit qu'il y ait au moins deux diviseurs non premiers entre eux. Alors les diviseurs de zéro sont de la forme (I)  $z_1 E_1 + z_2 E_2 + \dots + z_s E_s - z E$  associés aux solutions de  $z = z_1/e_1 + \dots + z_s/e_s$  ( $0 \leq z_i \leq e_i$ ). Le système  $|K + Z|$  a la dimension  $p_g + s' - 1 - z$  où  $s'$  est le nombre des  $z_i > 0$  figurant dans (I).

*B. d'Orgeval.*

**Stein, E.:** Product varieties of two rational normal curves. Nederl. Akad. Wet., Proc., Ser. A 59, 104—107 (1956).

L'A. considère la surface-produit de deux courbes rationnelles normales d'espaces  $S_h, S_k$ . Elle obtient une surface d'ordre  $2hk$ , à sections de genre  $(h-1)(k-1)$ , normale dans un espace à  $hk + h + k$  dimensions. La surface est représentée sur un plan par les courbes d'ordre  $h+k$  ayant deux points multiples d'ordres respectifs  $h$  et  $k$ . Etude des courbes tracées sur la surface.

*L. Godeaux.*

### Differentialgeometrie besonderer Liescher Gruppen:

**Terracini, Alessandro:** Osservazioni sulle coppie di elementi curvilinei spaziali. Revista Un. mat. Argentina 17, 293—297 (1956).

L'A. considera due elementi curvilinei sghembi del 3° ordine con lo stesso centro  $O$ , la stessa tangente  $t$  e piani osculatori distinti  $\gamma, \gamma'$ . Proietta detti elementi da centri distinti  $G, G'$  sopra uno stesso piano  $\alpha$  passante per  $t$  e trova i seguenti risultati: 1. le due proiezioni hanno contatto del 2° ordine solo quando i piani  $tG, tG'$  si corrispondono nella proiettività in cui sono uniti  $\alpha$  e il piano principale e sono omologhi  $\gamma$  e  $\gamma'$ ; 2. il contatto diventa del 3° ordine se i raggi  $OG, OG'$  sono omologhi in una determinata corrispondenza birazionale quadratica; 3. detta corrispondenza si riduce a un'omografia (omologia) solo se  $\alpha$  coincide con un particolare piano invariante.

*P. Buzano.*

**Villa, Mario: Classificazione delle trasformazioni puntuali di 3ª specie fra piani.** Boll. Un. mat. Ital., III. Ser. 11, 141—149 (1956).

La classificazione fa ricorso alla corrispondenza linearizzante (c. l.) relativa ad una trasformazione puntuale e alla trasformazione quadratica osculatrice (cfr. questo Zbl. 58, 153). Supposto che la trasformazione puntuale sia di 3ª specie, cioè con direzioni caratteristiche coincidenti, l'A. dimostra che sono possibili i casi seguenti: 1°) c. l. di indici (1, 2); 2°) c. l. proiettiva; 3°) c. l. degenerare. Il 3° dà luogo ulteriormente a 3 sottocasi.

*P. Buzano.*

**Speranza, Francesco: Classificazione delle trasformazioni puntuali di 2ª specie fra piani.** Boll. Un. mat. Ital., III. Ser. 11, 210—216 (1956).

Seguendo lo stesso ordine di idee adottato da Villa per le trasformazioni di 3ª specie (v. la recensione precedente), l'A. dimostra che per una trasformazione di 2ª specie (ossia con due delle tre direzioni caratteristiche coincidenti) sono possibili i seguenti casi dipendenti dal comportamento della corrispondenza linearizzante (c. l.): 1°) c. l. di indici (1, 3); 2°) c. l. di indici (1, 2); 3°) c. l. proiettiva; 4°) c. l. degenerare. Il 1° caso comprende due sottotipi; il 2° e il 3° ne comprendono tre ciascuno.

*P. Buzano.*

**Villa, Mario: Applicabilità proiettiva fra superficie di 2ª specie della  $V_4$  di Segre.** Boll. Un. mat. Ital., III. Ser. 11, 493—495 (1956).

Le superficie di 2ª specie della  $V_4$  di Segre rappresentano le trasformazioni puntuali di 2ª specie fra piani: su di esse esiste una rete di quasi-asintotiche (q. a.)  $\gamma_{123}$  con un sistema semplice e uno doppio (cfr. Villa e Vaona, questo Zbl. 39, 385). Estendendo quanto già fatto insieme con Muracchini per le superficie di 1ª specie (questo Zbl. 66, 156), l'A. definisce come applicabilità proiettiva fra due superficie di 2ª specie  $\Sigma$  e  $\Sigma'$  una corrispondenza tale che: 1. muti la rete delle q. a.  $\gamma_{123}$  di  $\Sigma$  in quella di  $\Sigma'$ , mutando il sistema semplice nel semplice; 2. ammetta in ogni coppia di punti corrispondenti un'omografia tangente  $K$  per cui le direzioni q. a. in detti punti sono caratteristiche. Si ha l'applicabilità forte o l'applicabilità inversa secondo che la direzione q. a. doppia o quella semplice risulta ipercaratteristica per  $K$ .

*P. Buzano.*

**Speranza, Francesco: Applicabilità proiettiva fra trasformazioni puntuali di 2ª specie.** Boll. Un. mat. Ital., III. Ser. 11, 526—537 (1956).

Riferendosi alla definizione di applicabilità proiettiva fra superficie di 2ª specie della  $V_4$  di Segre, data da Villa (v. la recensione precedente), l'A. ne deduce la nozione di applicabilità proiettiva per trasformazioni puntuali di 2ª specie e determina le condizioni analitiche perché essa si verifichi.

*P. Buzano.*

**Villa, M. e L. Muracchini: Sulle corrispondenze fra superficie della varietà di Segre.** Revista Un. mat. Argentina 17, 329—334 (1956).

Premesse le nozioni di omografia tangente e di direzioni caratteristiche per una corrispondenza puntuale fra due superficie di varietà  $V_4$  e  $\bar{V}_4$  di Segre, si determina il massimo numero di coppie di direzioni caratteristiche per un'omografia tangente appartenente all'insieme delle  $\infty^{16}$  omografie (degli spazi ambienti) che mutano  $V_4$  in  $\bar{V}_4$ , facendo corrispondere schiere prefissate di piani.

*P. Buzano.*



**Terracini, Alessandro:** Particolari superficie  $W$  dello  $S_5$  in relazione con le loro linee principali. Atti Accad. Sci. Torino, Cl. Sci. fis. mat. natur. 90, 591—603 (1956).

Le linee principali di una superficie  $F$  di  $S_5$  formano 5 sistemi  $\infty^1$  e sono caratterizzate dal fatto che i piani tangenti ad  $F$  in punti infinitamente vicini di una di dette linee sono incidenti secondo un ordine di approssimazione  $\sigma$  maggiore dell'ordinario ( $\sigma \geq 4$  cfr. A. Terracini, questo Zbl. 16, 75). In particolare può essere  $\sigma = \infty$ , ossia i piani tangenti lungo una linea principale possono essere a due a due incidenti, il che può avvenire in vari casi fra cui sono particolarmente notevoli i seguenti: a) i piani tangenti ad  $F$  nei punti di una linea principale di un sistema stanno in uno  $S_4$ ; b) le linee principali di un sistema sono piane. Esempi di superficie  $F$  per cui tutti i 5 sistemi di linee principali sono del tipo a) sono stati dato da Terracini (questo Zbl. 17, 226, 326) e da Buzano (questo Zbl. 21, 158). La presente ricerca è però indirizzata oltre che verso particolarità delle linee principali, anche verso particolari tipi di superficie. Occorre a questo riguardo tener presente che se  $F$  non rappresenta equazioni di Laplace e non è una superficie di Veronese, essa si può rappresentare, a meno di omografie, in coordinate curvilinee  $u, v$ , mediante un sistema di 4 equazioni a derivate parziali lineari omogenee del 3° ordine, esprimenti le derivate 3° di  $x(u, v)$  come combinazioni lineari di  $x$  e delle derivate 1° e 2° (cfr. Bompiani e Bortolotti, questo Zbl. 16, 74). Ebbene in questo lavoro si considerano esclusivamente superficie  $W$  ossia tali che (rispetto ad opportune coordinate curvilinee) i coefficienti del sistema suddetto risultino tutti costanti. L'A. dimostra che se su una superficie  $W$  4 sistemi di linee principali sono del tipo a), le linee del 5° sistema non possono essere nè del tipo a) nè del tipo b), ma sono invece tali che i piani tangenti nei punti di ognuna di esse appartengono ad una  $V_4^2$  non singolare: di tali superficie, tutte omografiche, vengono date le equazioni in termini finiti. L'A. si chiede poi ancora se si possono avere superficie  $W$  su cui 3 sistemi di linee principali appartengano ad uno dei tipi a), b) e gli altri due al rimanente tipo: la risposta è negativa per superficie con 3 sistemi a) e 2 sistemi b), mentre è positiva per superficie con 3 sistemi b) e 2 sistemi a) e anche in questo caso la soluzione è data in termini finiti, a meno di omografie. P. Buzano.

**Terracini, Alessandro:** Nuove superficie particolari dello  $S_5$  in relazione con le loro linee principali. Univ. Politec. Torino, Rend. Sem. mat. 15, 255—266 (1956).

L'A. riprende per superficie più generali una questione che in un suo precedente lavoro (v. la recensione precedente) aveva risolto negativamente per le superficie  $W$ : si tratta dell'esistenza di superficie di  $S_5$  per cui le linee principali di due sistemi siano piane e quelle dei rimanenti tre siano tali che i piani tangenti alla superficie nei punti di una linea principale di un sistema stanno in uno  $S_4$ . Abbandonando ora la limitazione che la superficie sia del tipo  $W$ , l'A. chiede invece che le linee principali di ciascuno dei tre sistemi suddetti stiano in  $S_3$  passanti per uno stesso piano e che i tre piani relativi ai tre sistemi siano a due a due incidenti in un punto. Dimostra allora che, a meno di omografie, esistono due sole superficie soddisfacenti alle condizioni suddette e che entrambe sono  $F^8$  razionali a sezioni iperpiane ellittiche. P. Buzano.

**Kunle, Heinz:** Über  $T$ -Figuren in einem quadratischen Komplex. Math. Z. 64, 270—285 (1956).

Eine von zwei Parametern  $(u, v)$  abhängige Gesamtheit von windschiefen Vierseiten des projektiven Raumes bildet eine  $T$ -Figur, falls die Vierseitecken  $y_i(u, v)$  ( $i = 0, 1, 2, 3$ ) die Brennflächen der Geradenkongruenzen  $(y_0, y_1)$ ,  $(y_1, y_2)$ ,  $(y_2, y_3)$ ,  $(y_3, y_0)$  erzeugen (vgl. S. Finikoff, dies. Zbl. 6, 79). Können die Geradengesamtheiten der vier Kongruenzen in einem gemeinsamen quadratischen Komplex liegen? Zur Behandlung dieser Frage werden die Formeln und Methoden von G. Bol (vgl. dies. Zbl. 43, 94 und: Projektive Differentialgeometrie, Bd. 3, im Erscheinen) verwendet.

Nur gewisse quadratische Komplexe gestatten eine solche Figur: a) Der quadratische Komplex ist von der Gattung 49 oder 45; gegenüberliegende Flächen in der Figur gehören derselben Quadrik (demselben Kegel bzw. dual demselben Kegelschnitt) an. Eine Funktion zweier Variablen ist frei wählbar. b) Der quadratische Komplex ist von der Gattung 46; alle Kongruenzen sind  $W$ -Strahlsysteme; die vier Brennflächen sind Regelflächen und liegen alle in einer festen linearen Kongruenz. Die Figur hängt von einer Funktion einer Variablen und von Konstanten ab; diese Abhängigkeit ist geometrisch erfaßt und beschrieben. Die Figur läßt sich im Geradenraum in einer Zentralbewegung im Sinne der projektiven Kinematik (vgl. M. Barner, dies. Zbl. 71, 147, 148) erzeugen und ist somit integralfrei darstellbar. *M. Barner.*

**Decuyper, Marcel:** Sur quelques couples de surfaces ayant mêmes premiers axes relativement au réseau conjugué commun. Acad. roy. Belgique, Bull. Cl. Sci., V. Sér. 42, 1018—1027 (1956).

Mittels der Methode von E. Cartan unter Verwendung der Bezeichnungsweise von S. P. Finikoff (dies. Zbl. 17, 421) werden sich entsprechende Paare konjugierter Netze mit gemeinsamer erster Achse untersucht (erste Achse eines Netzes ist die Schnittgerade der Schmiegeebenen an die Netzkurven). Diese Figur hängt von zehn willkürlichen Funktionen einer Variablen ab. Zwei Spezialfälle sind behandelt: entsprechende Netztangenten schneiden sich; dann sind die Netzkurven beider Netze ebene Kurven; acht willkürliche Funktionen gehen ein. Die Netztangenten schneiden sich wechselseitig; dann liegen die beiden Netze sich gegenüber in einer geschlossenen Laplace-Kette der Periode vier; diese Figur hängt von sechs willkürlichen Funktionen ab. *M. Barner.*

**Vincensini, P.:** Sur le problème de la transformation, par déformation, d'un réseau asymptotique en réseau conjugué. Acad. roy. Belgique, Bull. Cl. Sci., V. Sér. 42, 928—938 (1956).

Etant donnée une surface  $S$ , l'A. associe à chaque point  $P$  de  $S$ , d'une manière continue, un point  $I$  du plan tangent à  $S$  en  $P$ . Les courbes de  $S$  sur lesquelles doit se déplacer le point  $P$  pour que les déplacements infinitésimaux de  $P$  et de  $I$  soient orthogonaux, forment un réseau. Si, dans une déformation arbitraire de  $S$ , le point  $I$  est invariablement lié au plan tangent, ce réseau est invariant (ce Zbl. 30, 267). Ici, l'A. détermine le point  $I$  en considérant une congruence de sphères centrées sur  $S$ , la droite joignant les points caractéristiques des sphères passant par  $I$ . Il détermine le rayon des sphères de telle sorte que le réseau invariant soit un réseau conjugué ou le réseau des asymptotiques de  $S$ . Il en déduit une nouvelle solution du problème posé dans le titre, problème déjà résolu par Bianchi par une autre méthode. *L. Godeaux.*

**Plumier, S. et O. Rozet:** Sur les congruences de sphères de Ribaucour. Bull. Soc. roy. Sci. Liège 25, 347—356 (1956).

Eine zweiparametrische Kugelgesamtheit (des euklidischen dreidimensionalen Raumes) heißt Kongruenz von Ribaucour, wenn die Krümmungslinien auf den beiden Hüllflächen sich entsprechen. Es wird die Aufgabe behandelt, die Kongruenzen von Ribaucour zu bestimmen, die eine vorgegebene Fläche  $\chi(u, v)$  als Hüllfläche besitzen. Die Fläche  $\chi(u, v)$  sei auf ihre Krümmungslinien bezogen;  $r_1, r_2$  seien die Hauptkrümmungsradien der Fläche. Man gibt (an jeder Stelle der Fläche) eine die Fläche berührende Kugel durch ihren Radius  $R(u, v)$  vor. Damit die so festgelegte Kugelkongruenz eine Kongruenz von Ribaucour ist, muß  $R(u, v)$  einer gewissen Differentialgleichung genügen, die bei Bianchi [Lezioni di geometria differenziale, Vol. II, Parta prima, Pisa (1923)] durch die Substitution  $R = -\varphi/\omega$ , in der vorliegenden Arbeit durch die Substitution  $R = (\lambda r_1 - \mu r_2)/(\lambda - \mu)$  behandelt wird. Hierdurch wird die Aufgabe auf die Lösung von Laplacegleichungen zurückgeführt, deren Invarianten mit den Invarianten der Laplacegleichung, der  $\hat{\imath}(u, v)$  selbst (bei Bianchi) bzw. deren erste Laplace-Transformierte (in der vorliegenden Arbeit)

genügen, übereinstimmen. Geometrische Beziehungen, insbesondere zwischen den zugehörigen Laplace-Ketten, werden aufgezeigt. *M. Barner.*

### Riemannsche Mannigfaltigkeiten. Übertragungen:

Aczél, J.: Beiträge zur Theorie der geometrischen Objekte. I. Elementarer Beweis der Nicht-Existenz von rein differentiellen geometrischen Objekten höherer Klasse als der dritten mit einer Komponente im eindimensionalen Raum. II. Elementare Bestimmung aller rein differentiellen geometrischen Objekte erster, zweiter und dritter Klasse mit einer Komponente im eindimensionalen Raum. Acta math. Acad. Sci. Hungar. 7, 339—353, russ. Zusammenfassg. 354 (1956).

Es werden im eindimensionalen Raume alle geometrischen Objekte erster, zweiter und dritter Klasse mit einer Komponente, die rein differentiell sind, nochmals abgeleitet und zwar unter viel schwächeren Regularitätsannahmen als dies bis jetzt gemacht worden ist (bei Pensow und Gołąb). Der Verf. nützt einen wichtigen Hilfsatz über Transformationsscharen mit einem additiven Parameter (Aczél-Kalmár-Mikusiński) aus und löst die Aufgabe unter Stetigkeitsvoraussetzungen der gesuchten Funktion. Dabei wird auch die Nicht-Existenz von Objekten der Klasse  $s \geq 4$  unter schwächeren Annahmen abgeleitet, wie es beim Ref. früher durchgeführt wurde. *S. Gołąb.*

Sinjukov (Sinukov), N. S.: Normal geodesic mappings of Riemannian spaces. Doklady Akad. Nauk SSSR 111, 766—767 (1956) [Russisch].

Le problème de la représentation géodésique de deux espaces de Riemann  $V_n$  et  $\bar{V}_n$  a été résolu par Levi-Civita, dans le cas où l'espace  $V_n$  est à métrique définie positive. Ici on considère le cas où  $V_n$  et  $\bar{V}_n$  sont à métrique indéfinie et l'on considère ce qu'on appelle la représentation géodésique normale. Elle correspond au cas où il en existe dans l'espace  $V_n$  deux familles de sous-espaces à  $m$  dimensions  $(x^1, \dots, x^m)$  et à  $n - m$  dimensions  $(x^{m+1}, \dots, x^n)$ , qui sont normales entre elles et de façon que la représentation soit non triviale dans les variables  $x^1, \dots, x^m$ . [Une représentation géodésique est dite triviale si les symboles de Christoffel de la seconde espèce de deux métriques sont égaux.] On donne une forme canonique pour les métriques de  $V_n$  et  $\bar{V}_n$  dans le cas d'une représentation géodésique normale et on donne un exemple de représentation géodésique, qui n'est pas normale. *G. Vranceanu.*

Janenko, N. N.: Zur Theorie der Klasse eines Riemannschen Raumes. Trudy Sem. vektor. tenzor. Analizu 10, 139—191 (1956) [Russisch].

Die Arbeit ist im wesentlichen der algebraischen Untersuchung der Bedingungen der Einbettung ein Riemannschen Metrik  $U_m$  in den euklidischen Raum  $E_{m+q}$  sowie der Bestimmung von verschiedenen Kennzeichen für die Klasse  $q$  gewidmet. Zuerst werden die metrischen Invarianten:  $T_1 = R$  (Rang der Metrik), und  $T_2, T_3, \dots, T_q$  (Typen der Metrik), die in der Tat den Charakter der Einbettung bestimmen, eingeführt. Dann werden folgende Sätze bewiesen: 1. Wenn die Metrik  $U_m$  mit  $T_q \geq 2$  die Einbettung in den  $E_{m+q}$  gestattet, dann stimmen der Rang  $r$  und der Typus  $t$  der Realisation  $V_m$  mit den Invarianten  $T_1 = R$  und  $T_q$  der Metrik  $U_m$  überein. 2. Ist  $T_q \geq 2$ , dann kann die Metrik  $U_m$  nicht im  $E_{m+q-1}$  realisiert werden. 3. Die Bedingungen: a) die Gleichungen von Gauß  $\Omega_{ij} = \sum_{s=1}^q [\psi_i^s \psi_j^s]$  seien auflösbar, b) die Lösung  $\psi_i^s = \omega_i^{m+s}$  der Gaußschen Gleichungen erfülle die Differentialgleichungen  $A_i^s = (\psi_i^s)' - [\omega_j^s \psi_j^s]$ , sind notwendig und hinreichend, damit die Metrik  $U_m$  mit  $T_q \geq 3$  die Klasse  $q$  habe. 4. Damit die Metrik  $U_m$  mit  $T_q \geq 4$  die Klasse  $q$  habe, ist die Lösbarkeit der Gleichungen von Gauß notwendig und hinreichend. In dem letzten Abschnitt entwickelt Verf. die Methode der einschließenden Metrik im Fall der Klasse 2. Diese Methode besteht darin, daß wir für die gegebene Metrik  $U_m$  mit  $T_1 = R > 5$  und  $T_2 = 2$  eine solche Metrik  $U_{m+1} \supset U_m$



finden, daß der folgende Satz gilt: 5. Die  $U_m$  hat die Klasse 2 dann und nur dann, wenn die Metrik  $U_{m+1}$  die Klasse 1 hat. Alle diese geometrischen Ergebnisse gewinnt Verf. auf Grund der algebraischen Vorbereitung, die er in den drei ersten Abschnitten angibt.

W. Wrona.

Singal, M. K. and Ram Behari: Characteristic lines of a hypersurface  $V_n$  imbedded in a Riemannian  $V_{n+1}$ . Proc. Indian Acad. Sci., Sect. A 44, 53—62 (1956).

Für Hyperflächen eines Riemann-Raumes werden charakteristische Richtungen definiert als Paar konjugierter Richtungen, die einen extremalen Winkel bilden. Auf einer Hyperfläche positiver Gaußscher Krümmung existiert dann ein eindeutiges System charakteristischer Linien. Verf. beweist: Charakteristische Richtungen sind Linearkombinationen zweier Hauptkrümmungsrichtungen, deren zugehörige Hauptkrümmungen verschieden, aber gleichen Vorzeichens sind. Die Normalkrümmungen der beiden charakteristischen Richtungen sind gleich dem harmonischen Mittel der genannten Hauptkrümmungen. Richtungen, für welche das Verhältnis von geodätischer Torsion und Normalkrümmung extremal ist, sind charakteristische Richtungen.

W. Barthel.

Britan, B. U.: Differentialgeometrie der Geradenkongruenzen und der Regelflächen eines dreidimensionalen Raumes konstanter Krümmung. Trudy Sem. vektor. tenzor. Analizu 10, 269—278 (1956) [Russisch].

Die Schwierigkeiten einer Entwicklung der Differentialgeometrie der Geradenkongruenzen in den Riemannschen Räumen bestehen in erster Linie darin, daß der Parallelismus der Vektoren in den  $R_n$ -Räumen im allgemeinen nicht existiert. Der Verf. führt eben deshalb statt der durch den metrischen Grundtensor  $g_{ij}$  eines  $R_3$  von konstanter Krümmung  $K$  bestimmten Übertragung  $G_{ij}^k$  solche Übertragungsparameter  $\Gamma_{ij}^k = G_{ij}^k - \omega \varepsilon_{ij}^k$  ( $\varepsilon_{ij}^k$  der Diskriminantentensor von  $g_{ij}$ ,  $\omega^2 = K$ ) ein, bezüglich welcher die kovariante Ableitung der Vektoren  $V^i$ ,  $V|_a$  verschwindet. Dabei sind  $V^i$  und  $V|_a$  in folgender Weise bestimmt: Durch  $x^i = x^i(u^1, u^2, s)$ ,  $i = 1, 2, 3$ ,  $\xi^2 x^i / \xi s^2 + G_{\alpha\sigma}^i (\partial x^\sigma / \partial s) (\partial x^\alpha / \partial s) = 0$  ist die Geradenkongruenz im  $R_3$  festgelegt. Es ist dann  $V^i = \partial x^i / \partial s$  und  $V|_a$  ( $a = 1, 2$ ) die kovariante Ableitung bezüglich einer Übertragung  $\Gamma_{ij}^k = G_{ij}^k + \omega \varepsilon_{ij}^k$ . Für die Vektoren  $V^i$ ,  $V|_a$  werden verschiedene Ableitungsformeln bestimmt. Der Verf. behandelt dann die zu den Geradenkongruenzen gehörigen Regelflächen und fokalen Flächen; zum Schluß werden die Geradenkongruenzen durch gewisse Grundtensoren charakterisiert.

A. Moór.

Mishra, R. S.: Generalisations of Mainardi-Codazzi equations in a  $K_m$ -connected space. Tensor, n. Ser. 6, 108—114 (1956).

In einem komplexen  $m$ -dimensionalen Raum  $C_m$  sei ein analytischer komplexer  $n$ -dimensionaler Raum  $C_n$  eingebettet. Der Raum  $C_m$  wird zu einem Raum  $K_m$ , falls er mit einer unitären linearen Konnexion ausgestattet ist. Es wird eine Verallgemeinerung der Gleichungen von Gauß-Codazzi abgeleitet im Falle, daß der  $K_n$  nicht mit Hilfe von  $m - n$  zu  $K_n$  normalen Vektoren eingespannt ist, sondern daß im  $K_m$   $m - n$  Kurvenkongruenzen gegeben sind. Im speziellen Falle, daß die Kurvenkongruenzen normal zu  $K_n$  sind, hat T. Suguri die entsprechenden Gleichungen auf anderem Wege erhalten (dies. Zbl. 48, 399).

S. Golab.

Mishra, R. S. and Shri Krishna: Generalisations of the congruences of curves in Riemannian space. Tensor, n. Ser. 6, 125—131 (1956).

In einem Riemannschen Raum  $V_m$  sei ein Unterraum  $V_n$  ( $n < m$ ) eingebettet und außerdem sei  $V_m$  mit  $m - n$  Kurvenkongruenzen ausgestattet, die im allgemeinen nicht orthogonal zu  $V_n$  sind. Die Verff. definieren im Abschnitt A für eine Kurve  $C$  aus  $V_n$  die Begriffe der absoluten und normalen Krümmung der Kurve  $C$  in bezug auf die Kurvenkongruenz, der Krümmungslinien (ebenso relativ in bezug auf die Kurvenkongruenz) und der asymptotischen Richtungen der Kurvenkongruenz. Im Abschnitt B werden die klassischen Fundamentalgleichungen einer geradlinigen

Kongruenz im dreidimensionalen euklidischen Raum verallgemeinert für den  $n$ -dimensionalen Fall (eines euklidischen Raumes). *S. Golab.*

**Martinelli, Enzo:** *Sulle varietà kähleriane dotate di isotropia caratteristica.* Atti Accad. naz. Lincei, Rend., Cl. Sci. fis. mat. natur., VIII. Ser. 21, 400—404 (1956).

The following theorem is proved by considerations of local Riemannian geometry (the rev. has taken the liberty of a translation not only from Italian to English, but from Levi-Civita's geometry to holonomy groups): If on a Kähler variety there is a point where the holomorphic curvature does not depend on the direction, then the action of the homogeneous holonomy group attached to the holomorphic loops (i. e. circuits in holomorphic sections) is composed of two rotations of an angle depending only on the holomorphic curvature. One rotation depends only on the point, the other one is in the plane of chosen holomorphic section. *H. Guggenheimer.*

**Moór, Arthur:** *Allgemeine metrische Räume von skalarer Krümmung.* Publ. math., Debrecen 4, 207—228 (1956).

Verf. betrachtet einen differentialgeometrischen Raum, dessen Grundlelement eine kontravariante Vektordichte vom Gewicht  $p$  ist, mit einer auf derselben definierten Maßfunktion  $L(x, u)$ . Es bedeuten dabei  $x^i$  lokale Punktkoordinaten und  $u^i$  die Koordinaten der Vektordichte. Räume von solcher Struktur wurden zuerst von Schouten und Haantjes untersucht (siehe dies. Zbl. 13, 366—367) und für dieselben, mit Hilfe einer aus  $L(x, u)$  ableitbaren oskulierenden Maßbestimmung, die durch einen kovarianten Fundamentaltensor  $g_{ik}$  festgelegt ist, eine Übertragungsgeometrie erklärt. Verf. bestimmt für eine solche Geometrie nach Methoden von E. Cartan eine Krümmungstheorie. Man erhält drei Krümmungstensoren, von denen der eine die Verallgemeinerung des Riemannschen Krümmungstensors ist. Derselbe läßt sich in die Summe von zwei Tensoren zerlegen. Der eine dieser Tensoren ist der Hauptkrümmungstensor. Ausgehend von dem verallgemeinerten Riemannschen Krümmungstensor und dem zuletzt erwähnten Tensor läßt sich für eine Zweistellung nach dem Vorgang von L. Berwald je eine Krümmungsinvariante herleiten; die erste wird als vollständiges Krümmungsmaß, die andere als Hauptkrümmungsmaß bezeichnet. Während im Finslerschen Raum diese beiden Invarianten zusammenfallen, sind sie hier i. a. voneinander verschieden. Verf. stellt eine tensorielle Relation auf, die für diejenigen Räume charakteristisch ist, in denen die beiden Invarianten zusammenfallen. Im zweidimensionalen Falle hängt das vollständige Krümmungsmaß stets nur von der Richtung ab. Räume, für welche bei beliebiger Dimension das eine Krümmungsmaß nur von der Richtung abhängt, werden in bezug auf dieses Krümmungsmaß von skalarer Krümmung genannt. Die zweidimensionalen Mannigfaltigkeiten sind daher in bezug auf das vollständige Krümmungsmaß stets von skalarer Krümmung. In zwei Dimension entimmen die Krümmungsinvarianten nur dann überein, falls die Mannigfaltigkeit eine Finslersche ist (speziell eine Riemannsche), oder ihr vermöge des vollständigen Krümmungstensors definierter Krümmungsskalar verschwindet. Es werden jetzt Räume untersucht, die in bezug auf wenigstens ein Krümmungsmaß von skalarer Krümmung sind. Es wird eine für den betreffenden Krümmungstensor charakteristische Differentialgleichung aufgestellt. Man findet auch eine Relation, die charakteristisch dafür ist, daß der Raum in bezug auf beide Krümmungsmaße von skalarer Krümmung ist. Für einige weitere spezielle Sätze muß auf die Originalarbeit verwiesen werden. *O. Varga.*

**Kano, Chôtarô:** *Conformal geometry in an  $n$ -dimensional space with the arc length  $s = \int \{A_i(x, x') x''^i + B(x, x')\}^{1/p} dt$ .* Tensor, n. Ser. 5, 187—196 (1956).

Zugrunde gelegt ist ein  $n$ -dimensionaler Kawaguchischer Raum mit der Metrik  $s = \int F^{1/p} dt$ , wobei  $F = A_i x''^i + B$ . Die Grundlage für die Theorie eines solchen Raumes wurde in zwei Arbeiten von A. Kawaguchi entwickelt (s. dies. Zbl. 16, 419

und 19, 278). Sind zwei derartige Räume so aufeinander bezogen, daß entsprechende Punkte die gleichen Koordinaten haben und besteht  $F = e^{\rho\sigma} \bar{F}$ , wobei  $\sigma = \sigma(x, x')$ , dann heißen die beiden Räume zueinander konform. Verf. entwickelt ausgehend von der Kawaguchischen Übertragung eine konforminvariante Vektorübertragung. Gestützt auf diese Übertragung können die Konformkrümmungstensoren erklärt werden. Schließlich werden Bedingungen dafür angegeben, daß ein Raum konform zu einem solchen mit verschwindenden Konformkrümmungstensoren ist.

O. Varga.

**Kawaguchi, Syun-ichi and Tetsuro Nobuhara: On extremal curves in a special Kawaguchi space.** Tensor, n. Ser. 5, 197—200 (1956).

Ein spezieller Kawaguchischer Raum ist durch ein Bogenelement der Form  $ds = (A_i x'^i + B)^{1/p} dt$  bestimmt, wobei  $A_i$  und  $B$  differenzierbare Funktionen der lokalen Koordinaten  $x^i$  und der  $x'^i$  sind. Nach Einführung einer Übertragung ist der Begriff der autoparallelen Kurven einführbar. Verff. lösen die Frage, wann eine autoparallele Kurve zugleich extremal ist. Ist  $R_{kij}^l$  der zur Übertragung gehörige Krümmungstensor, dann ist die Bedingung durch  $A_i R_{kij}^l x'^k x'^j = 0$  gegeben.

O. Varga.

**Soós, Gy.: Über Gruppen von Automorphismen in affinzusammenhängenden Räumen von Linienelementen.** Publ. math., Debrecen 4, 294—302 (1956).

In einem Finsler-Raum (im Cartanschen Sinn) ist eine infinitesimale Transformation  $\bar{x}^i = x^i + \xi^i(x) dt$ ,  $\bar{v}^i = v^i \partial \bar{x}^i / \partial x^j$  genau dann eine infinitesimale Ähnlichkeitstransformation bzw. Affinität, wenn für die Lie-Ableitungen  $\Delta_{\xi} g_{ij} = 2 c g_{ij}$  bzw.  $\Delta_{\xi} \Gamma_{jk}^i = 0$ ,  $\Delta_{\xi} C_{jk}^i = 0$  gilt. Es zeigt sich, daß jede infinitesimale Ähnlichkeitstransformation auch eine infinitesimale Affinität ist. Während Verf. bereits früher die Existenz einer Gruppe von Affinitäten (vgl. dies. Zbl. 55, 404) und H. Hiramatu die Existenz einer Gruppe von Ähnlichkeitstransformationen (vgl. dies. Zbl. 58, 159) untersucht haben, wird in vorliegender Arbeit eine Beziehung zwischen solchen Gruppen behandelt. — Verf. beweist folgende Sätze: 1. Die Lie-Ableitung bezüglich einer infinitesimalen Transformation ist genau dann mit den kovarianten Ableitungen (erster und zweiter Art) vertauschbar, wenn es sich um eine infinitesimale Affinität handelt. 2. Eine infinitesimale Affinität mit der Eigenschaft  $\Delta_{\xi} g_{ij} = 2 \psi(x, v) g_{ij}$  ist eine infinitesimale Ähnlichkeitstransformation. 3. In einem Finsler-Raum konstanter Krümmung  $R \neq 0$  kann keine eigentliche ( $c \neq 0$ ) infinitesimale Ähnlichkeitstransformation existieren. — Schließlich werden für  $r$ -parametrische Gruppen von infinitesimalen Affinitäten notwendige und hinreichende Bedingungen zur Existenz von Untergruppen infinitesimaler Ähnlichkeitstransformationen angegeben.

W. Barthel.

**Freeman, J. G.: Finsler-Riemann systems.** Quart. J. Math., Oxford II. Ser. 7, 100—109 (1956).

Gegeben sei 1. in einem  $(2n-1)$ -dimensionalen Riemann-Raum  $S_{2n-1}$  durch  $y^x = y^x(x^1, \dots, x^n; t^{n+1}, \dots, t^{2n-1})$  ein deformierbarer  $n$ -dimensionaler Unterraum  $S_n$  mit den Koordinaten  $x^a$  und 2. in diesem Unterraum  $S_n$  durch  $x^a = x^a(\lambda^1, \dots, \lambda^{n-1}; \mu; t^{n+1}, \dots, t^{2n-1})$  eine  $(n-1)$ -parametrische, den  $S_n$  erzeugende Schar von Kurven mit dem Parameter  $\mu$ . Sind jetzt  $u^a$  die  $S_n$ -Komponenten eines Vektorfeldes tangential zu diesen Erzeugenden, so lassen sich die Deformationsparameter im allgemeinen durch homogene Funktionen nullter Ordnung in  $u$  ausdrücken,  $t^4 = t^4(x, u)$ . Damit erhält die erste Grundform von  $S_n$  die Gestalt  $ds^2 = g_{ab}(x, u) dx^a dx^b$  mit Komponenten homogen nullter Ordnung in  $u$ . Wegen der Analogie zum Finsler-Raum (im Sinne von E. Cartan) wird der deformierbare Unterraum  $S_n \subset S_{2n-1}$  zusammen mit seinen Erzeugenden ein Finsler-Riemann-System genannt. Für diese Systeme untersucht Verf. den induzierten Zusammenhang und stellt dessen Eigenschaften denen des Cartanschen Zusammenhanges in Finsler-Räumen gegenüber. Schließlich wird noch gezeigt: (A) Wenn in einem Finsler-Riemann-System die Deformations-



vektoren orthogonal zu  $S_n$  und bei Verschiebung längs der Erzeugenden von  $S_n$  parallel sind, gilt  $g_{ab} = \frac{1}{2} \partial^2 L^2(x, u) / \partial u^a \partial u^b$ . (B) Zu jeder Funktion  $L(u, x)$ , die in  $u$  homogen von erster Ordnung ist, gibt es ein Finsler-Riemann-System mit  $g_{ab} = \frac{1}{2} \partial^2 L^2 / \partial u^a \partial u^b$ .  
*W. Barthel.*

**Laugwitz, Detlef:** Die Vektorübertragungen in der Finslerschen Geometrie und der Wegegeometrie. Nederl. Akad. Wet., Proc., Ser. A 59, 21—28 (1956).

L'A. présente systématiquement les processus de transport parallèle dans les géométries finsleriennes; on voit que le point de départ de chaque théorie dans les géométries finsleriennes est la fonction de base  $F(x; x')$  [ $F > 0$  pour  $x' \neq 0$ ;  $F(x; \lambda x') = |\lambda| \cdot F(x; x')$ ], l'élément d'arc finslerien étant  $ds = F(x; dx)$ . Etant donné le système de „Paths“ défini par  $\ddot{x}^i + 2\Gamma^i(x, \dot{x}) = 0$ , la condition nécessaire et suffisante pour qu'à chaque direction il existe un seul „Path“ tangent est que:  $\Gamma^i(x; \lambda \dot{x}) = \lambda^2 \Gamma^i(x; \dot{x})$ . Dans le cas des espaces finsleriens le système d'équations:

$\ddot{x}^i + 2G^i(x; \dot{x}) = 0$  définit les géodésiques en posant  $G^i(x; \dot{x}) = \frac{1}{2} \frac{i}{k,j} x^k x^j$ , où

$\left| \frac{i}{k,j} \right|$  sont les symbols de Christoffel généralisés. On indique le tableau dans lequel on voit comment les différents transports parallèles sont réalisés soit à l'aide des équations différentielles des géodésiques, soit à l'aide des espaces riemanniens oscillants dont la métrique représente la meilleure approximation de la métrique finslerienne.  
*C. Ispas.*

**Okubo, Tanjiro:** On the order of the group of affine collineations in the generalized spaces of paths. I. Tensor, n. Ser. 6, 141—158 (1956).

Im ersten Kapitel der Arbeit werden affine Kollineationen in den allgemeinen Räumen der Bahnen, wie sie von J. Douglas definiert wurden [Ann. of Math., II. Ser. 29, 143—168 (1928)] untersucht. Die erhaltenen Resultate sind, wie Verf. selbst bemerkt, nicht neu, sondern rühren von M. S. Knebelman her [Amer. J. Math. 51, 527—564 (1929)], hingegen ist die Behandlung mit Hilfe Liescher Ableitungen nach Methoden von K. Yano (Groups of transformations in generalized spaces, Tokyo 1949) durchgeführt und dadurch ist in der Darstellung eine größere Übersichtlichkeit gewonnen. Dementsprechend sind die affinen Kollineationen durch das Verschwinden der Lieschen Ableitungen der Übertragungsparameter der Bahngeometrie charakterisiert. Die Integrabilitätsbedingungen dieser Differentialgleichungen sind ebenfalls durch Annullierung eines Systems von Lieschen Ableitungsgleichungen charakterisiert. Die Diskussion der Integrabilitätsbedingungen der so gewonnenen Form reduziert sich jetzt auf diejenige von gewöhnlichen linearen Gleichungssystemen. Speziell untersucht Verf. den Fall, daß die Ordnung  $r$  der affinen Kollineationsgruppe im  $n$ -dimensionalen Raume der Ungleichung  $n^2 + n \geq r > n$  genügt. Für einen Raum mit symmetrischem Affinzusammenhang folgt nämlich unter diesen Voraussetzungen, daß der Raum beim Vorhandensein einer solchen Gruppe ein gewöhnlicher affiner Raum wird. Im vorliegenden Falle kommt Verf. zu dem gleichen Resultat. Dieses Ergebnis ist Gegenstand des zweiten Kapitels der Arbeit.  
*O. Varga.*

**Auslander, Louis:** Examples of locally affine spaces. Ann. of Math., II. Ser. 64, 255—259 (1956).

Bieberbach [Math. Ann. 70, 297—336 (1911) et 72, 400—412 (1912)] a montré que: 1°. Toute variété riemannienne  $M$  compacte, localement euclidienne, à  $n$  dimensions, est recouverte par le tore à  $n$  dimensions. 2°. Pour tout  $n$ , il y a un nombre fini de variétés  $M$ . L'A. montre que ces deux théorèmes cessent d'être vraies, pour  $n = 3$ , si au lieu des variétés  $M$  métriques on considère les variétés compactes localement euclidiennes affines. Pour cela l'A. construit des sousgroupes  $\pi(i)$ ,  $i = 1, 2, \dots$ , en nombre infini, du groupe affine de l'espace euclidien  $A_3$  à 3

dimensions; ces groupes sont générés par les matrices

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & i^{-1} \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

et on a  $\pi(i)$  isomorphe à  $\pi(j)$  seulement si  $i = j$  et les espaces  $A_3/\pi(i)$  sont des variétés orientables compactes qu'on peut évidemment douer d'une structure localement affine.

C. Teleman.

**Simoni, Franco de:** Sulla geometrizzazione delle equazioni dinamiche di sistemi soggetti a vincoli anolonomi generali del prim'ordine. Ist. Lombardo Sci. Lett., Rend., Cl. Sci. mat. natur. **90** (III. Ser. **21**), 180—188 (1956).

L'auteur donne une interprétation géométrique au système mécanique  $S$ , qui est soumis aux liaisons holonomes et non holonomes générales du premier ordre: L'espace associé au système  $S$  est l'espace de la configuration  $\Sigma_n$  ayant la métrique (4)  $ds^2 = a_{hk} dq^h dq^k = 2T_2 dt^2$  donnée par le terme quadratique  $T_2$  de l'énergie cinétique, et les coefficients de la connexion

$$(31) \quad \Gamma_{jk}^i = \left\{ \begin{matrix} i \\ jk \end{matrix} \right\} + \frac{1}{4T_2} \frac{\partial a_{jk}}{\partial t} \dot{q}^i + \frac{1}{2T_2} (a_j^i L_k + a_k^i L_j - a_{jk} L^i)$$

qui ne sont pas ni riemanniens ni affines. Ces coefficients ont 3 termes: un terme donné par les symboles de Christoffel de seconde espèce de la métrique (4); l'autre linéaire dans les composantes la vitesse lagrangienne  $\dot{q}^i$ , dépendant seulement de la rhéonomie des liaisons holonomes, et le dernier analogue au celui-là de l'espace de Weyl, déterminé d'un vecteur  $L^i(q^k, \dot{q}^k, t)$  pseudo-orthogonale à la vitesse lagrangienne et dépendant des forces, de la rhéonomie des liaisons holonomes et des liaisons non holonomes. La connexion peut être riemannienne ou affine. On montre que les équations dynamiques du système  $S$  sont les équations différentielles des courbes autoparallèles. Dans § 1 de cette note, l'A. fait un court historique du problème de la géométrisation des systèmes holonomes et non holonomes de la Mécanique. Néanmoins, n'est pas cité G. Vranceanu, qui a traité ce problème [Atti Accad. naz. Lincei, Rend., Cl. Sci. fis. mat. natur., VI. Ser. **3**, 548—553 (1926) et **4**, 508—511 (1926)] et qui a introduit les espaces non holonomes  $V_n^m$  [C. r. Acad. Sci., Paris **183**, 852—854, 1083—1085 (1926)].

I. Teodorescu.

### Allgemeine metrische Geometrie. Konvexe Gebilde. Integralgeometrie:

**Lane, N. D.:** Differentiable points of arcs in conformal  $n$ -space. Pacific J. Math. **6**, 301—313 (1956).

In früheren Arbeiten des Verf. zusammen mit P. Scherk (dies. Zbl. **51**, 134) bzw. mit F. A. Scherk (dies. Zbl. **70**, 173) wurde eine Klassifikation der differenzierbaren Punkte auf Bogen im konformen 2- bzw. 3-dimensionalen Raum gegeben. Die vorliegende Arbeit enthält eine Verallgemeinerung auf  $n \geq 3$  Dimensionen. Diese Klassifikation beruht — entsprechend wie für  $n = 2$  und  $n = 3$  — einerseits auf Schnitt- bzw. Stützeigenschaften von Familien tangentialer  $(n - 1)$ -dimensionaler Sphären, andererseits auf der Natur oskulierender  $m$ -dimensionaler Sphären,  $m = 1, \dots, n - 1$ , im betrachteten Punkt. Übrigens läßt sich die Diskussion in Beziehung setzen zu der von P. Scherk (dies. Zbl. **16**, 227) gegebenen Klassifikation der differenzierbaren Punkte von Bogen im  $(n + 1)$ -dimensionalen projektiven Raum, nämlich vermittelt einer Darstellung des konformen  $n$ -dimensionalen Raumes im projektiven  $(n + 1)$ -dimensionalen Raum. — Verf. gelangt zu insgesamt  $(3n - 1) 2^{n-1}$  Typen differenzierbarer Punkte. Jeder Typus wird durch ein Beispiel realisiert. — Wegen der Einzelheiten verweisen wir auf die Arbeit selbst.

Otto Haupt.

**Pogorelov, A. V.:** Continuous mappings of bounded variation. Doklady Akad. Nauk SSSR **111**, 757—759 (1956) [Russisch].

Sind  $\Phi$  und  $\bar{\Phi}$  zwei glatte Flächen und ist  $f$  eine stetige Abbildung von  $\Phi$  auf  $\bar{\Phi}$ , dann heißt  $f$  von beschränkter Schwankung, wenn für ein beliebiges System endlich vieler, abgeschlossener, zueinander fremder Mengen auf  $\Phi$  die Inhaltssummen ihrer  $f$ -Bilder auf  $\bar{\Phi}$  gleichmäßig beschränkt sind. Dann hat es Sinn, von der absoluten Schwankung der Abbildung  $f$  auf der offenen Teilmenge  $G \subset \Phi$  zu sprechen; diese ist durch  $\limsup \sum_k \mu f(F_k)$  über die Inhaltssummen  $\mu f(F_k)$  aller zueinander fremden, abgeschlossenen Teilmengen  $F_k \subset G$  erklärt. Schließlich wird als absolute Schwankung  $v_f^0(H)$  der Abbildung  $f$  auf der beliebigen Menge  $H$  aus  $\Phi$  der untere limes der absoluten Schwankungen aller  $H$  enthaltenden offenen Mengen verstanden.  $v_f^0(H)$  erweist sich als voll additiv im Ring aller Borelschen Mengen  $H$  auf  $\Phi$ . Die totale Schwankung  $v_f(H)$  wird durch  $v_f(H) = v_f^+(H) - v_f^-(H)$  definiert, wobei  $v_f^+$  und  $v_f^-$  die absoluten Schwankungen von  $f$  je auf der Teilmenge aller Punkte von  $H$  mit positivem, bzw. negativem Abbildungsgrad bedeuten. Diese Begriffe erfahren ihre wesentliche Anwendung in dem Falle, daß  $\Phi$  eine glatte, orientierbare Fläche ist und  $\bar{\Phi}$  das sphärische Bild von  $\Phi$ . Ist dann die Abbildung  $f$  zwischen  $\Phi$  und  $\bar{\Phi}$  von beschränkter Schwankung, so nennt man  $\Phi$  eine Fläche beschränkter äußerer Krümmung und  $v_f^+(H)$ ,  $v_f^-(H)$  und  $v_f(H)$  heißen die positive, negative und Totalkrümmung von  $H$ . Fast alle Punkte von  $\Phi$  haben endlichen Abbildungsindex  $i(X)$ ;  $X$  heißt elliptisch, parabolisch oder hyperbolisch, je nachdem ob  $i(X) = +1$ ,  $0$  oder  $-1$  ist.

W. Burau.

**Pogorelov, A. V.:** An extension of Gauss theorem in the spherical representation to surfaces of bounded external curvature. Doklady Akad. Nauk SSSR 111, 945—947 (1956) [Russisch].

Um den bekannten Gaußschen Satz von der curvatura integra differenzierbarer Flächenstücke auf die in der Schule von A. D. Alexandrov betrachteten allgemeineren Flächen  $F$  beschränkter äußerer Krümmung auszudehnen, muß man die für beliebige Borelsche Mengen  $H$  auf  $F$  erklärten Größen  $\omega^+(H)$ ,  $\omega^-(H)$  und  $\sigma^+(H)$ ,  $\sigma^-(H)$  der positiven und negativen Teile der inneren und äußeren Krümmungen von  $H$  heranziehen (vgl. dazu Alexandrov, dies. Zbl. 38, 351; Pogorelov, dies. Zbl. 50, 165 und vorstehendes Referat). In der vorliegenden Note wird nun gezeigt: Es gilt  $\sigma^+(H) = \omega^+(H)$  und  $\sigma^-(H) \leq \omega^-(H)$  für beliebige Borelsche Mengen  $H$  auf  $F$ . Der Beweis arbeitet mit der Approximation von  $F$  durch reguläre Flächen. Für geschlossene Flächen und in hinreichend kleiner Umgebung eines regulären Punktes kann man die zweite Ungleichung auch durch eine Gleichung ersetzen. Es besteht die Vermutung, daß dies für alle Flächen beschränkter äußerer Krümmung gilt.

W. Burau.

**Strel'cov, V. V.:** Über die Zugehörigkeit von Flächen. Izvestija Akad. Nauk Kazach. SSR, Ser. Mat. Mech. 4(8), 128—140 (1956) [Russisch].

Verf. betrachtet stetige zur Kreisscheibe homöomorphe Flächen des euklidischen  $R_3$  und zeigt folgenden Satz: Hat eine solche Fläche  $P$  überall nichtpositive Krümmung, den Durchmesser  $d$ , negativen Krümmungsbestandteil  $\omega^-$  und negativen Schwenkungsteil  $\tau^-$  der Randkurve, so kann  $P$  in eine Fläche  $P_1$  eingebettet werden von gleichfalls nicht-positiver Krümmung.  $P_1$  hat ebenfalls den Durchmesser  $d$  und besitzt eine Randkurve mit überall nicht-negativer Schwenkung; die Länge der Randkurve von  $P_1$  ist bei  $\tau^- \geq -\pi$  durch  $\frac{1}{2}(2\pi - \omega^-)d$  und bei  $\tau^- < -\pi$  durch  $\frac{1}{2}(\pi - \omega^- - \tau^-)d$  begrenzt. Der Beweis dieses Satzes ist nicht ganz einfach. Für die dabei benutzten Begriffe, die zu Beginn nochmals kurz erläutert werden, vgl. man das Buch von A. D. Alexandrov: Innere Geometrie konvexer Flächen, dies. Zbl. 38, 352.

W. Burau.

**Hadwiger, Hugo:** Minkowskis Ungleichungen und nichtkonvexe Rotationskörper. Math. Nachr. 14, 377—383 (1956).



Die Minkowskischen Quermaßintegrale  $W_\nu$  des  $k$ -dimensionalen euklidischen Raumes lassen sich auch für nichtkonvexe Körper definieren, z. B. durch „integral-geometrische“ Integrale. Für solche vollen Rotationskörper, für welche die genannten Integrale existieren und welche sich durch polygonale Rotationskörper approximieren lassen, beweist Verf. die Ungleichung ( $A$  der betr. Körper,  $K$  die Kugel):  $W_\mu(A) \geq W_\mu(K)$  [ $W_\nu(A) = W_\nu(K)$ ;  $0 \leq \nu < \mu \leq k-1$ ]. Der Beweis beruht auf folgendem Gedanken: Der polygonale Rotationskörper wird in Glieder eingeteilt, die durch je eine Randstrecke des Meridianpolygons bestimmt sind. Man betrachtet die Änderung von  $W_\mu$  bei Ersetzung eines zweigliedrigen nichtkonvexen Rotationskörpers durch einen geeigneten eingliedrigen.

H. Gericke.

**Sancho de San Roman, J.:** Über einen neuen affinvarianten Breite-Begriff für Eikurven. *Revista mat. Hisp.-Amer.*, IV. Ser. 16, 151—171 (1956) [Spanisch].

Triangular width of a closed convex curve  $K$  at a point  $P$  is defined as the area of the inscribed triangle of greatest area with a vertex at  $P$ . Then: a) A necessary and sufficient condition in order that  $K$  be of constant triangular width is that the tangent at  $P$  be parallel to the opposite side of the maximum triangle (for any  $P$ ); b) There exist closed convex curves of constant triangular width which are not ellipses; c) Some properties of the ellipses related with their maximal inscribed triangles are given.

L. A. Santaló.

## Topologie:

**Kurepa, Duro:** Sur l'écart abstrait. *Periodicum math.-phys. astron.*, II. Ser. 11, 105—132, serbokroatische Zusammenfassung. 132—134 (1956).

Plusieurs types d'espaces abstraits sont examinés ici à trouver les conditions sous lesquelles ils deviennent des espaces à écart abstrait. L'écart est ici un élément d'un ensemble  $M$  muni d'une structure d'espace abstrait par l'association à chaque sous-ensemble  $X$  d'un sous-ensemble  $\bar{X}$ ; l'écart  $e(a, b)$  ai nsi défini pour chaque paire de points  $a, b$  de l'espace  $E$  est soumis aux axiomes suivants: 0<sup>1</sup>.  $e(a, b) = e(a, a) \Rightarrow a = b$ ; 0<sup>2</sup>.  $e(a, b) = e(b, a)$ ; et, ensuite l'opération de fermeture dans  $E$  est définie à partir de l'opération pareille définie dans  $M$  comme suivant: 0<sup>3</sup>. Si  $a$  est un point de  $E$  et  $F$  un sous-ensemble de  $E$ , alors  $a$  appartient à  $\bar{F}$  si, et seulement si,  $e(a, a)$  appartient à  $e(a, \bar{F})$ , où  $e(a, \bar{F})$  est l'ensemble des éléments  $e(a, f)$  de  $M$  quand  $f$  parcourt  $F$ . Une condition supplémentaire qui n'est pas toujours vérifiée, est: 0<sup>1'</sup>: (condition de continuité) Si  $a$  est un point de  $E$  et  $F$  un sous-ensemble de  $E$  tel que  $a$  appartient à  $\bar{F}$ , alors  $e(a, a)$  appartient à  $e(\bar{F}, \bar{F})$ , où  $e(\bar{F}, \bar{F})$  est l'ensemble des éléments  $e(f, f)$ , quand  $f$  parcourt  $F$ . Dans tous les exemples considérés par l'A. ici, l'espace  $M$  est un ensemble (partiellement) ordonné, souvent totalement ou bien ordonné. L'opération de fermeture est alors définie en termes de convergence par rapport à l'ordre, c. à d. il est la topologie d'ordre. On parle ainsi d'un écart numérique, ou bien ordonné, etc. Quand l'ensemble  $M$  dans lequel l'écart est défini est ordonné, on parle d'une proximité (abstraite) au lieu d'un écart si la relation d'ordre dans  $M$  est remplacée par la relation inverse (donc, le moins d'écart de  $b$  à  $a$  le plus de proximité de  $b$  à  $a$ ). En général on parle d'une proximité quand  $M$  est bien ordonné, et d'un écart quand  $M$  est inversement bien ordonné. Dans quelques cas l'écart  $e$  ou la proximité  $i$  étant défini(e), on a l'une des conditions (duales) suivantes:

$$(\Delta) e(a, b) \leq \sup \{e(a, c), e(c, b)\}, (\Delta^*) i(a, b) \geq \inf \{i(a, c), i(c, b)\}.$$

Celles-ci entraînent respectivement les conditions:

$$(J) e(a, b) < \xi, e(b, c) < \xi \Rightarrow e(a, c) < \xi; (J^*) i(a, b) > \xi, i(b, c) > \xi \Rightarrow i(a, c) > \xi.$$

Et les dernières conditions entraînent, chacune, que chaque triangle soit isocèle dans  $E$ . Parmi les espaces particuliers considérés par l'A., signalons les  $eT$ -espaces

et les  $R$ -espaces: Un ensemble ordonné  $T$  non vide est un tableau ramifié quand, pour chaque élément  $x$  de  $T$  l'ensemble,  $S(-, x)$ , des prédécesseurs de  $x$  dans  $T$  est bien ordonné; un tel tableau dévient un  $eT$ -espace quand les familles fondamentales des voisinages des points sont ainsi définies: ( $a$ ) est un voisinage de  $a$  quand  $a$  possède un prédécesseur immédiat; sinon, pour chaque prédécesseur  $z$  de  $a$ , l'ensemble,  $(z, -) - (a, -)$ , de successeurs de  $z$  qui ne sont pas successeurs de  $a$  est un voisinage de  $a$ . On ajoute encore aux  $eT$ -espaces la condition (N), par laquelle deux points  $a, b$  de l'espace sont identiques s'ils ont le même ensemble des prédécesseurs et parmi les prédécesseurs il n'y a pas un dernier élément. L'A. établit le résultat que chaque  $eT$ -espace peut être défini au moyen d'un écart bien ordonné de manière que chaque triangle soit isocèle et que la condition  $\Delta^*$  soit vérifié pour chaque triple de points distincts. Soit  $T$  une famille d'ensembles qui (partiellement) ordonné par la relation  $\supset$  est un tableau ramifié; alors la réunion,  $E$ , des ensembles de  $T$  devient un  $R$ -espace quand on prit les ensembles de  $T$  contenant un point de  $E$  comme voisinages de cet point. L'A. montre qu'un  $R$ -espace, qui vérifie aussi l'axiome de séparation  $T_1$  de Fréchet, admet un écart bien ordonné, vérifiant la condition du triangle isocèle. L'espace uniforme séparé est définissable moyennant un écart abstrait admettant un seul zéro, et satisfaisant, de plus, à une condition de régularité. Enfin soit  $E$  un espace pseudo-distancié [c. à d. admettant un écart dual symétrique,  $i$ , bien ordonné  $\leq \omega_\alpha$ , un ordinal initial, et vérifiant la condition de régularité: à chaque ordinal  $n \leq \omega_\alpha$  il y a un ordinal  $f(n) \leq \omega_\alpha$ , tel que, quelque soit le triple de points  $a, b, c$ , on a  $i(b, c) > n$  dès que  $i(a, b)$  et  $i(a, c)$  sont  $> f(n)$ ]; si, de plus, il existe une base,  $B$ , de l'espace telle que chaque ensemble fini de l'espace qui est l'intersection d'une famille monotone d'ensembles de  $B$  n'est pas isolé, alors l'espace est métrique ou totalement ordonnable ou les deux. *V. S. Krishnan.*

**Mamuzić, Zlatko:** Sur la solution d'un problème concernant  $eT$ -espaces. Periodicum math.-phys. astron., II. Ser. 11, 95—102, serbokroatische Zusammenfass. 102—103 (1956).

G. Kurepa a montré (voir le rapport précédent) qu'un  $eT$ -espace qui est aussi un  $T_1$ -espace peut être muni d'un écart bien ordonné; mais il ne doit pas satisfaire à la condition de continuité ( $0'$ ). Ici l'A. examine la question de trouver les conditions nécessaires et suffisantes pour qu'un tel espace vérifie la condition de continuité. Une telle condition qu'il trouve est la suivante: Pour chaque point  $x$  de l'espace  $T$  sans prédécesseur immédiat dans  $T$  il existe un prédécesseur  $z$  tel que chaque successeur  $y$  de  $z$  avec la même rangée dans  $T$  comme  $x$  soit identique avec  $x$ ; où la rangée d'un point de  $T$  est le type d'ordre de l'ensemble des prédécesseurs du point (qui est, par définition un ensemble bien ordonné). Parmi les théorèmes auxiliaires signalons les suivants: Tous les voisinages d'un  $T_1$ ,  $eT$ -espace sont à la fois ouverts et fermés; un  $T_1$ ,  $eT$ -espace est régulier; dans un  $T_1$ ,  $eT$ -espace, l'ensemble de tous les points ayant la même rangée, qui n'a pas un dernier élément, n'est pas ouvert. *V. S. Krishnan.*

**Papić, Pavle:** Sur les espaces pseudo-distanciés complets. Periodicum math.-phys. astron., II. Ser. 11, 135—141, serbokroatische Zusammenfassg. 142 (1956).

Un espace pseudo-distancié mais qui n'est pas distancié peut être défini moyennant une pseudo-distance  $d$  telle que la condition de régularité soit de la forme  $d(a, b) > \xi$ ,  $d(b, c) > \xi \Rightarrow d(a, c) > \xi$ . Dans ce cas l'espace  $E$  possède une base ramifiée  $B$  de voisinages tel que  $\nu B = \omega_\alpha$  (c. à d. deux ensembles appartenant à  $B$  sont ou bien disjoints ou comparables, donc les prédécesseurs d'un élément de  $B$  p. r. à  $C$  forment une chaîne; de plus  $\omega_\alpha$  est le plus petit ordinal tels que tous ces chaînes soient isomorphes aux chaînes des ordinaux  $\leq \omega_\alpha$ ). Inversement étant donné un espace  $E \in (D_\alpha)$  avec une base ramifiée  $B$  des voisinages tel que  $\nu B = \omega_\alpha$ , on peut définir une pseudo-distance  $d(B)$  tels que la condition de régularité ci-dessus soit vérifiée: la distance pour une paire de la forme  $(a, a)$  est  $\omega_\alpha$ , et pour une paire

( $a, b$ ) avec  $a \neq b$ , la distance est le premier nombre ordinal  $\xi$  tel que les voisinages de  $a$  et  $b$  appartenant à la  $\xi$ -ième rangée soient disjoints (un voisinage de  $a$  extrait de  $B$  appartient à la  $\xi$ -ième rangée si les prédécesseurs de ce voisinage dans  $B$  forment une famille bien ordonnée de type  $\xi$ ). Cette pseudo-distance est compatible avec la topologie originale de  $E$ . Dans un espace  $E$  pseudo-distancié par  $d$  (de type  $\omega_\alpha$ ) une  $\omega_\alpha$ -suite  $x = \{x_\xi\}$  (c. à d. une suite indexée par les ordinaux  $\xi < \omega_\alpha$ ) est une suite de Cauchy (p. r. à la pseudo-distance  $d$ ) si pour tout  $\xi < \omega_\alpha$  il existe une sphéroïde,  $S$ , de rayon  $\xi$  tel que tous les éléments de  $x$  sauf  $< N_\alpha$  entre eux soient contenus dans  $S$ . Un espace pseudo-distancié est complet si chaque suite de Cauchy converge dans l'espace à un point limite. Un espace pseudo-distanciable de type  $\omega_\alpha$  est pseudo-compact si on peut extraire de chaque  $\omega_\alpha$ -suite une suite partielle convergente. Avec ces définitions les théorèmes établis sont: Th. 1. Pour qu'un espace  $E \in (D_\alpha)$ ,  $\alpha > 0$ , soit complet relativement à la pseudo-distance  $d(B)$ , il faut et il suffit que pour tout chaîne de type  $\omega_\alpha$  appartenant à  $B$ , l'intersection de tous ses éléments ne soit pas vide. Th. 2. Si  $E \in (D_\alpha)$ ,  $\alpha > 0$ , est complet relativement à une pseudo-distance  $\rho$ , il existe au moins une base ramifiée  $B$  telle que  $E$  soit complet relativement à la pseudo-distance  $d(B)$ . Th. 3. Pour qu'un espace  $E \in (D_\alpha)$ ,  $\alpha > 0$ , soit pseudo-compact, il faut et il suffit qu'il soit complet relativement à  $d(B)$ ,  $B$  étant une base ramifiée quelconque de  $E$  avec  $\nu B = \omega_\alpha$ . Th. 4. Si  $E \in (D_\alpha)$  n'est pas complet relativement à  $d(B)$ , il existe un espace  $E \in (D_\alpha)$ , le complété de  $E$ , tel que  $E$  soit isomorphe à une partie partout dense de  $\bar{E}$ . Th. 5. Il existe une distance  $d$  compatible avec la topologie de l'espace  $Q$  des nombres rationnels telle que le complété  $\bar{Q}$  des  $Q$  relativement à  $d$  soit un espace totalement ordonné homéomorphe à l'espace des nombres irrationnels. Th. 6. Il existe une distance  $d$  compatible avec la topologie de l'espace  $Q$  des nombres rationnels telle que le complété  $\bar{Q}$  de  $Q$  relativement à  $d$  soit un espace totalement ordonné, homéomorphe à l'espace totalement discontinu de Cantor.

V. S. Krishnan.

Groot, J. de: Non-archimedean metrics in topology. Proc. Amer. math. Soc. 7, 948—953 (1956).

A metric  $\rho$  of a topological space is called non-Archimedean if  $\rho$  satisfies (instead of the triangle axiom) the stronger condition  $\rho(x, y) \leq \text{Max}(\rho(x, z), \rho(y, z))$  for any points  $x, y, z$ . The main theorem of this paper is that a topological space is non-Archimedeanly metrizable if and only if it is a Hausdorff space (or even a  $T_0$ -space) which has an open basis consisting of a countable number of locally finite families of open-closed sets. As a corollary the author proves that a metrizable space is non-Archimedeanly metrizable if and only if it is zero-dimensional in the sense of covering dimension (the author uses the terminology „strongly zero-dimensional“). As is stated in the remark added in proof of the paper, these results may be obtained from the results of M. Katětov (this Zbl. 52, 396) and K. Morita (this Zbl. 57, 390), and J. Nagata (this Zbl. 71, 160) proved a far reaching generalization of these results by characterizing the (finite) dimension of a metrizable space by means of the possibility of assigning a certain metric to the space.

K. Morita.

Iséki, Kiyoshi: On the property of Lebesgue in uniform spaces. VI. Proc. Japan Acad. 32, 117—119 (1956).

[Part I—III: this Zbl. 65, 380; part IV: Proc. Japan Acad. 31, 524—525 (1955), part V: this Zbl. 66, 411.] If the completion  $\hat{S}$  of a uniform space  $S$  having the finite Lebesgue property (this Zbl. 65, 380) is normal then both  $S$  and  $\hat{S}$  have the same Lebesgue dimension.

M. M. Peixoto.

Iséki, Kiyoshi: Notes on topological spaces. II. Some properties of topological spaces with Lebesgue property. Proc. Japan Acad. 32, 171—173 (1956).

[Part I: A theorem on uniform spaces, Proc. Japan Acad. 32, 27—28 (1956).] Besides some further remarks about Lebesgue property in uniform spaces it is shown



that when every continuous function on a connected metric space  $S$  is uniformly continuous then  $S$  is compact.

*M. M. Peixoto.*

**Iséki, Kiyoshi and Yasue Miyana:** Notes on topological spaces. IV. Function semiring on topological spaces. Proc. Japan Acad. **32**, 392—395 (1956).

[Part III ce Zbl. **70**, 28.] Soient  $S$  un espace topologique séparé,  $C^+(S)$  le „semi-anneau“ des fonctions numériques continues  $\geq 0$  dans  $S$ . Pour un „idéal“  $I$  dans  $C^+(S)$  (i. e.  $f, g$  dans  $I$  implique  $f + g \in I$  et  $f, h \in I$  pour tout  $h \in C^+(S)$ ) les AA. définissent l'ensemble  $I^*$  de parties fermées de  $S$  par la propriété suivante:  $A \in I^*$  signifie que pour toute partie fermée  $F$  de  $S$  ne rencontrant pas  $A$ , il y a une fonction  $f \in I$  telle que  $\inf_{x \in F} f(x) > 0$ . Pour tout filtre  $J$  de parties fermées de  $S$ , les AA. définissent l'ensemble  $J^0 \subset C^+(S)$  par la propriété suivante:  $f \in J^0$  signifie que pour tout  $\varepsilon < 0$ , il y a un ensemble fermé  $A \in J$  tel que  $f(x) < \varepsilon$  dans  $A$ . Ils montrent que  $I^*$  est un filtre d'ensembles fermés,  $J^0$  un idéal, et étudient les correspondances  $I \rightarrow I^*$ ,  $J \rightarrow J^0$  moyennant diverses hypothèses sur  $S$  (complète régularité, normalité).

*S. Dieudonné.*

**Iséki, Kiyoshi:** Notes on topological spaces. V. On structure spaces of semiring. Proc. Japan Acad. **32**, 426—429 (1956).

Continuation d'une note antérieure (ce Zbl. **70**, 28): à côté de l'espace des idéaux maximaux d'un „semi-anneau“, l'A. considère l'espace des idéaux premiers, muni d'une topologie définie suivant la méthode habituelle (Stone-Wallman-Jacobson) dont il indique quelques propriétés élémentaires.

*J. Dieudonné.*

**Iséki, Kiyoshi and Yasue Miyana:** A theorem on paracompact spaces. Proc. Japan Acad. **32**, 396—398 (1956).

Soient  $M$  un espace paracompact,  $f$  une fonction numérique définie dans  $M$  et dont l'oscillation en tout point est  $\leq \alpha$ . Généralisant un théorème de Gelfand et Šilov [Mat. Sbornik, n. Ser. **9** (51), 59—73 (1941)] les AA. montrent facilement, au moyen d'une partition de l'unité, qu'il existe pour tout  $\varepsilon > 0$  une fonction numérique continue  $g$  dans  $M$  telle que  $|f(x) - g(x)| \leq \alpha + \varepsilon$  pour tout  $x \in M$ .

*J. Dieudonné.*

**Isiwata, Takesi:** Some characterizations of countably compact spaces. Sci. Rep. Tokyo Kyoiku Daigaku, Sect. A **5**, 185—189 (1956).

Ein normaler  $T_1$ -Raum  $X$  ist dann und nur dann abzählbar kompakt, wenn jede Moore-Smithsche Folge stetiger reeller Funktionen auf  $X$ , die punktweise gegen eine stetige Funktion konvergiert, quasi-gleichmäßig konvergiert. Ein vollständig regulärer  $T_1$ -Raum  $X$  ist dann und nur dann abzählbar kompakt, wenn jede stetige Abbildung von  $X$  auf einen dem 1. Abzählbarkeitsaxiom genügenden  $T_2$ -Raum  $Y$  abgeschlossen ist. Einige Corollare werden angegeben.

*K. Krickeberg.*

**Nagata, Jun-iti:** On coverings and continuous functions. J. Inst. Polytechn., Osaka City Univ., Ser. A **7**, 29—38 (1956). Errata: **8**, 91 (1957).

Es werden untersucht die Beziehungen zwischen stetigen Funktionen und lokal endlichen Überdeckungen topologischer Räume. Hierdurch ergeben sich Charakterisierungen parakompakter und metrisierbarer Räume mittels der auf diesen Räumen definierten stetigen Funktionen. Der Hausdorffsche Satz über die Fortsetzbarkeit einer auf einer abgeschlossenen Teilmenge eines metrischen Raumes definierten, stetigen Abbildung in einen metrischen Bildraum wird auf parakompakte uniforme Räume übertragen. Die Natur dieser Sätze kommt deutlich in folgendem, an den allgemeinen Metrisationssatz von Nagata-Smirnov anknüpfenden Kriterium zum Ausdruck: Notwendig und hinreichend für die Metrisierbarkeit eines  $T_1$ -Raumes  $R$  ist die Existenz einer Familie  $\{f_\alpha\}_{\alpha \in A}$  stetiger, reeller Funktionen auf  $R$  mit folgenden Eigenschaften: 1. für jede Teilmenge  $B$  von  $A$  sind obere und untere Einhüllende der Familie  $\{f_\beta\}_{\beta \in B}$  stetige Funktionen auf  $R$ ; 2. zu jedem Punkt  $x$  aus  $R$  und jeder

Umgebung  $U$  von  $x$  existiert ein  $\alpha \in A$  und eine reelle Zahl  $\varepsilon > 0$  mit  $f_\alpha(x) < \varepsilon$  und  $f_\alpha(y) \geq \varepsilon$  für alle  $y$  aus dem Komplement von  $U$ . H. Bauer.

**Morita, Kiiti:** On closed mappings. *Proc. Japan Acad.* **32**, 539—543 (1956).

Im Anschluß an einen Satz von S. Hanai u. K. Morita [*Proc. Japan Acad.* **32**, 10—14 (1956)], der auch von A. H. Stone [*Bull. Amer. math. Soc.* **61**, 309 (1955), abstract] angekündigt wurde, beweist Verf. Sätze folgender Art: Das Bild eines metrischen Raumes bei abgeschlossener stetiger Abbildung ist parakompakt. Ein solches Bild eines parakompakten, perfekt normalen Raumes ist wieder parakompakt, perfekt normal. Eine solche Abbildung eines parakompakten lokal kompakten Hausdorff-Raumes auf einen lokal kompakten Raum kann stetig fortgesetzt werden auf die Freudenthalschen Kompaktifikationen. H. Freudenthal.

**Morita, Kiiti:** On decomposition spaces of locally compact spaces. *Proc. Japan Acad.* **32**, 544—548 (1956).

A decomposition space of a locally compact Lindelöf space is paracompact normal. (All spaces are Hausdorff spaces.) The images of locally compact metric spaces under open continuous mappings are the locally compact, locally metrizable spaces. The decomposition spaces of locally compact, paracompact spaces (locally compact Lindelöf spaces) are characterized by the existence of a closed covering (countable closed covering)  $\mathfrak{M}$  such that every element of  $\mathfrak{M}$  is compact and a set is closed if and only if the intersection with any element of  $\mathfrak{M}$  is closed.

H. Freudenthal.

**Morita, Kiiti:** Note on mapping spaces. *Proc. Japan Acad.* **32**, 671—675 (1956).

Let  $F^E$  be the mapping space with the compact-open topology. If  $X$  and  $Y$  are Hausdorff spaces, the natural mapping  $\theta: Z^{X \times Y} \rightarrow (Z^X)^Y$  ( $Z$  any space) is a homeomorphism into. If  $X \times Y$  is a Hausdorff space having the weak topology with respect to compact sets,  $\theta$  is also onto. In particular,  $\theta$  is a homeomorphism onto, if  $X$  is a CW-complex and  $Y$  is a locally compact Hausdorff space. F. Albrecht.

**Rhodes, F.:** A generalization of isometries to uniform spaces. *Proc. Cambridge philos. Soc.* **53**, 399—405 (1956).

The transitivity of a group of isometries of a connected metric space on itself can be proved as soon as there is an orbit with an interior point. The same is true for uniformly equicontinuous groups of isomorphisms of connected uniform spaces, and for isobasisms, i. e. transformations which carry every element of a basis of vicinities  $\mathfrak{B}$  into itself. The same notion can be applied to extend the Freudenthal-Hurewicz theorem on contractions and expansions to uniform instead of metric spaces.

H. Freudenthal.

**Kosiński, A.:** A note on labil points. *Colloquium math.* **4**, 11—12 (1956).

Sind  $A$  ein metrischer Raum,  $p$  ein Punkt aus  $A$  und  $U \ni p$  eine in  $A$  offene Menge, so heiße  $U$  eine „sternartige“ Umgebung von  $p$ , wenn gleichzeitig  $\bar{U}$  absoluter Retrakt und  $\bar{U} - U$  Retrakt von  $\bar{U} - p$ . Dann gilt für gewisse polyederähnliche metrische Räume  $R$ : der Punkt  $q$  aus  $R$  ist genau dann labil im Sinne von K. Borsuk (für die Definition vgl. z. B. Noguchi, dies. Zbl. **58**, 388), wenn in  $R$  offene Mengen  $W \ni q$  existieren derart, daß 1. der Durchmesser von  $W$  hinreichend klein, 2.  $W$  sternartig und 3.  $\bar{W} - W$  absoluter Retrakt ist. J. Weier.

**Burgess, C. E.:** Separation properties and  $n$ -indecomposable continua. *Duke math. J.* **23**, 595—599 (1956).

A continuum  $M$  is said to be  $n$ -indecomposable (or indecomposable under index  $n$ ) if  $M$  is the union of  $n$  continua such that no one of them is a subset of the union of the others and  $M$  is not the union of  $n + 1$  such continua. Thus an indecomposable continuum is 1-indecomposable. The author studies separation implications and consequences of  $n$ -indecomposability in compact metric continua and, in particular, bounded plane continua. For a compact metric continuum  $M$  a neces-

sary and sufficient condition that, for some  $n$ ,  $M$  shall be  $n$ -indecomposable is given in terms of the subcontinua of  $M$  which consist of a point  $x$  of  $M$  and all points of  $M$  not aposyndetic with respect to  $x$ .  
*W. R. Utz.*

**Brahana, Thomas R.:** Products of quasi-complexes. Proc. Amer. math. Soc. **7**, 954—958 (1956).

It is shown that the product of two quasi-complexes is a quasicomplex. This answers a question raised by E. Dyer at the Institute for Point Set Topology in Madison, Wisconsin (1955).  
*S. Stein.*

**Vaccaro, Michelangelo:** Sulla caratteristica dei complessi simpliciali  $\chi$ -omogenei. Ann. Mat. pura appl., IV. Ser. **41**, 1—20 (1956).

L'A. définit la notion de complexe simplicial  $\chi$ -homogène  $K$  de dimension  $n$ : l'étoile ouverte de tout simplexe de dimension  $r$  a même caractéristique d'Euler que la  $(n-r-1)$ -sphère. On calcule alors la caractéristique d'Euler  $\chi(K)$  en fonction du nombre  $\alpha_r$  des  $r$ -simplexes. Il en résulte que  $\chi(K)$  est nul, si  $n$  est impair, et si  $K$  est  $\chi$ -homogène pour les simplexes de dimension paire. Dans un complexe  $K$   $\chi$ -homogène de dimension paire,  $\chi$  s'exprime linéairement en fonction des seuls  $\alpha_i$  de dimension paire. Ces résultats apparaissent comme des généralisations de la dualité de Poincaré; il importerait de savoir si ces considérations pourraient trouver place dans le cadre de la théorie des faisceaux.  
*R. Thom.*

**Nakaoka, Minoru:** Cohomology theory of a complex with a transformation of prime period and its applications. J. Inst. Polytechn., Osaka City Univ., Ser. A **7**, 51—102 (1956).

This paper is devoted primarily to a detailed presentation of the work of R. Thom [Colloque de Topologie de Strasbourg 1951, Nr. 6 (1952)] and W. T. Wu (this Zbl. **49**, 240) on the relations between the reduced power operations and the cohomology of the  $p$ -fold cyclic product of a complex. Here  $p$  is a prime; the case  $p=2$  was treated by R. Bott (this Zbl. **53**, 301). In addition, the cohomology groups of the  $p$ -fold cyclic product of a complex over certain coefficient groups and the 3-fold symmetric product of the sphere over the integers are computed. It is pointed that the methods used would also apply to the 4-fold symmetric product of the sphere. *S. Stein.*

**Hilton, P. J.:** On Borsuk dependence and duality. Bull. Soc. math. Belgique **7**, 143—155 (1956).

Homotopy and dependence for maps of modules: A map  $A \rightarrow B$  is called  $i$ -nullhomotopic if it can be extended to every supermodule of  $A$ , and  $p$ -nullhomotopic if it can be lifted to every counterimage of  $B$ . Two maps are called  $i$ -homotopic ( $p$ -homotopic) if their difference is  $i$ -nullhomotopic ( $p$ -nullhomotopic). The map  $A \rightarrow C$  is called  $i$ -dependent on the map  $A \rightarrow B$  if for every  $A' \supset A$  the existence of an extension of the first to  $A'$  implies the existence for the second. In an analogous way  $p$ -dependence is defined. Homotopy and dependence for maps of spaces: The notions are quite analogous. In homotopy extension the Borsuk theory is arrived at (this Zbl. **64**, 412). Homotopy lifting leads to a dual theory. See the forthcoming book: B. Eckmann and P. J. Hilton, Homotopy and duality for spaces and modules.  
*H. Freudenthal.*

**Aoki, Kiyoshi, Eiitirô Honma and Tetuo Kaneko:** On natural systems of some spaces. Proc. Japan Acad. **32**, 564—567 (1956).

Using the notations and definitions of Postnikov's original papers, the authors obtain the relation between the natural Postnikov systems of a space and its loop space and a realizability theorem for a suitably restricted system as the system of a space of loops. The following theorem is adduced: let  $(G_i, k_i)$ ,  $(H_i, l_i)$  be natural systems and let

$$\cdots \rightarrow F_i \xrightarrow{f_i} G_i \xrightarrow{g_i} H_i \xrightarrow{h_i} F_{i-1} \rightarrow \cdots \rightarrow H_2 \xrightarrow{h_2} F_1 \xrightarrow{f_1} G_1 \xrightarrow{g_1} H_1 \rightarrow 0$$

be an exact sequence where  $g_i$  ( $i \geq 2$ ) is a  $g_1$ -homomorphism onto  $H_i$ , and the homo-



morphisms  $g_i$  ( $i \geq 1$ ) satisfy the Postnikov condition for geometrical realizability. Then there exists a fibration  $(E, X, F, p)$  such that  $(G_i, k_i)$ ,  $(H_i, l_i)$  are the natural systems of  $E$  and  $X$  and the given sequence is the homotopy sequence of the fibration. Proofs are promised later. (Reviewer's note: presumably it is intended that the  $f_i$  be  $f_1$ -homomorphisms. If the maps  $g_i$  are on to  $H_i$  then, of course, the  $h_i$  are zero-maps, the  $f_i$  are monomorphisms, and the theorem appears to be an immediate consequence of the fact that every map is homotopically equivalent to a fibre map.)

*P. J. Hilton.*

**Yokota, Ichiro:** On the cellular decompositions of unitary groups. J. Inst. Polytechn., Osaka City Univ., Ser. A 7, 39—49 (1956).

The author exhibits a cell decomposition of  $SU(n)$  and of  $W_{n,m}$  analogous to Whitehead's cell decomposition for  $SO(n)$ . Cup product and Steenrod powers are computed.

*W. T. van Est.*

**Frölicher, Alfred and Albert Nijenhuis:** Some new cohomology invariants for complex manifolds. I, II. Nederl. Akad. Wet., Proc., Ser. A 59, 540—552, 553—564 (1956).

The authors apply their theory of vector-valued forms [Nederl. Akad. Wet., Proc., Ser. A 59, 338—359 (1956)] to problems on cohomology. The first two paragraphs repeat the basic features of vector differential forms. In § 3, a quasi-complex structure is introduced as a real vector  $l$ -form  $J$  satisfying  $J\pi J = -I$ , and the basic theorems on splitting into types are proved (these theorems generalize former theorems by the ref., this Zbl. 57, 74). Writing  $P = \frac{1}{2}(I - iJ)$ ,  $Q = \frac{1}{2}(I + iJ)$ , partial differentiation of scalar forms is then defined directly by the Poisson brackets  $\partial\omega = [P, \omega]$ ,  $\bar{\partial}\omega = [Q, \omega]$ . On vector forms the two operations turn out to differ only by a factor  $-1$ , so one has a unique operation  $DM = [Q, M]$ . The Eckmann-Frölicher condition of integrability of the quasicomplex structure is  $[Q, Q] = 0$ , a new form of this condition is given in  $DD = 0$ . On a complex manifold,  $D$  is shown to transfer pure forms into pure ones, hence one may define the cohomology groups given by  $D$  operating on the modules of pure vector forms. The theorem of Dolbeault is generalized to vector forms, and it is shown that these  $D$ -groups are isomorphic to the cohomology groups of the manifold with coefficients in the faisceau of holomorphic vector forms. Then it is shown that the bracket-operation on vector-forms induces a bracket on the cohomology-classes, and so the cohomology-ring defined on the holomorphic vector forms turns out to be a Lie-algebra. If  $\theta_p$  is the faisceau of holomorphic vector  $p$ -forms,  $\Omega_r$  that of holomorphic scalar  $r$ -forms, one has  $[H^q(X, \theta_p), H^s(X, \Omega_r)] \subset H^{q+s}(X, \Omega_{p+r})$  hence the new („GLA“) cohomology may be represented as derivations of the Dolbeault cohomology ring. This defines a new and very strong algebraic structure for cohomology on complex manifolds.

*H. Guggenheimer.*

**Dolbeault, Pierre:** Formes différentielles et cohomologie sur une variété analytique complexe. I. Ann. of Math., II. Ser. 64, 83—130 (1956).

Cet article est consacré essentiellement à l'étude des formes différentielles méromorphes sur une variété complexe. Après une introduction sur la théorie des faisceaux et sur les variétés complexes, kähleriennes et de Stein, l'A. démontre en détail au Chap. I les théorèmes d'isomorphisme qu'il a antérieurement annoncés (ce Zbl. 50, 177): grâce à la trivialité locale de la  $d''$ -cohomologie, le procédé classique de démonstration du théorème de de Rham donne: Le groupe de  $d''$ -cohomologie des formes de type  $(p, q)$  est isomorphe au groupe de cohomologie  $H^q(V, \Omega^p)$  de la variété  $V$  dans le faisceau des germes de  $p$ -formes holomorphes; le groupe  $K^{p,q}$  de la  $d$ -cohomologie des formes (ou des courants) de type  $(p, q)$  est isomorphe au groupe de cohomologie  $H^q(V, E^p)$ , où  $E^p$  désigne le faisceau des  $p$ -formes holomorphes fermées. On donne ensuite des applications aux cas des variétés kähleriennes compactes et des variétés de Stein. L'espace  $K^{p,1}$  s'introduit dans le problème de Cousin pour une

$p$ -forme méromorphe dont on donne les parties singulières. Le Chap. II définit les rapports entre obstruction analytique et topologique à l'existence d'une section analytique d'un fibré de groupe de structure  $C^*$  des nombres complexes  $\neq 0$ . La classe caractéristique fondamentale de  $H^2(V; \mathbb{Z})$  est avec rigueur identifiée à la classe duale (par dualité de Poincaré) au cycle fondamental du diviseur associé. L'article se termine par une étude des fonctions „theta“, cas particulier des formes méromorphes „additives“ (formes non uniformes, où  $\pi_1(V)$  opère par addition d'une forme holomorphe). L'A. retrouve ainsi des résultats de Kodaira (cas des variétés kähleriennes compactes) et de Stein (cas des polycylindres). *R. Thom.*

## Theoretische Physik.

### Mechanik:

• **Proceedings of the first congress on theoretical and applied mechanics, November 1—2, 1955.** Kharagpur: Indian Society of Theoretical and Applied Mechanics. Indian Institute of Technology. 1956. VIII, 284 p. 30 s.

Die Arbeiten werden in diesem Zbl. einzeln angezeigt.

**Stehle, P.:** Dynamical principle for classical mechanics. *Amer. J. Phys.* **24**, 626—629 (1956).

Es wird gezeigt, daß sich bereits in der klassischen Beschreibung eines mechanischen Systems Züge erkennen lassen, welche gedanklich den drei Bildern der Quantenmechanik für den Bewegungsablauf an einem System entsprechen. Der Beschreibung des Zustandes eines Systems durch den Zustandsvektor entspricht klassisch die Beschreibung durch die kanonischen Variablen  $q_i, p_i$ . den Operatoren entsprechen die dynamischen Variablen  $Y(q_i, p_i)$ . Die zeitliche Änderung der dynamischen Variablen läßt sich, in Analogie zum Schrödingerbild, bei fester funktionaler Form von  $Y$  über die zeitliche Veränderung des „Zustandes“  $q_i, p_i$  nach den kanonischen Bewegungsgleichungen beschreiben, oder aber, analog zum Heisenbergbild, bei festen  $q_i, p_i$ , durch Änderung der funktionalen Form mittels Kontakttransformation mit der Erzeugenden  $H$  nach der Hamilton-Jacobischen Theorie. Schließlich ist eine gemischte Beschreibungsweise analog zum Wechselwirkungsbild möglich. *H. Stolz.*

**Stojanovitch, Rastko:** Brachistochronic motion of non-conservative dynamical systems. *Tensor*, n. Ser. **6**, 104—107 (1956).

Aufstellung der Bewegungsgleichungen eines skleronomen, holonomen Systems im Feld nicht konservativer, von Zeit und Geschwindigkeit unabhängiger Kräfte  $X_k$

nach dem Fermatschen Prinzip  $\delta \int_{M_0}^{M_1} (T_0 + A)^{-1/2} ds = 0$  mit gegebenen Anfangs- und Endkonfigurationen  $M_0$  bzw.  $M_1$  und gegebenem Anfangswert der kinetischen Energie  $T_0$ . Da die Arbeit  $A = \int_{M_0}^{M(x)} X_i dx^i$  vom Wege abhängt, ergibt sich zunächst

als System der Eulerschen Gleichungen ein System von Integrodifferentialgleichungen (\*)

$$(D\dot{x}_k/Ds) + \frac{1}{2} (T_0 + A) [X_k - \dot{x}_k (dA/ds)] = 0$$

mit  $s$  als Bogenlänge der Brachistochrone und  $D$  als kovariantes Differentiationsymbol. Nach einmaliger Differentiation nach  $s$  kann  $A$  eliminiert werden und es bleibt das Differentialgleichungssystem

$$(d\dot{x}^i/ds) X_i = (d/ds) [\{X_i (\dot{x}^i \dot{x}^k - g^{ik})\}/2 (D\dot{x}^k/Ds)], \quad (k = 1, \dots, n).$$

Die  $3n$  Integrationskonstanten ergeben sich aus den  $2n$  Anfangsbedingungen und nachträglichem Einsetzen der Lösung in (\*). Es zeigt sich, daß die von A. J. McConnell für den Fall konservativer Kräfte abgeleiteten Sätze [The brachistochronic motion of a dynamical system. *Proc. Roy. Irish Acad.*, Sect. A. **39**, 31—48 (1930)] über die eingepägten und Reaktionskräfte auch im nichtkonservativen Fall gültig bleiben.

*F. Selig.*

**Moser, Jürgen:** The analytic invariants of an area preserving mapping near a hyperbolic fixed point. *Commun. pure appl. Math.* **9**, 673—692 (1956).

Das Problem der flächentreuen Abbildung steht, wie H. Poincaré in seiner „*Mécanique céleste*“ gezeigt hat, in Zusammenhang mit gewissen kanonischen Systemen von Differentialgleichungen. Dieser Zusammenhang ist später von G. D. Birkhoff [*Acta Math.* **43**, 1—119 (1920)] systematisch untersucht worden. Poincaré beweist: In der Umgebung einer periodischen, stabilen Lösung des kanonischen Systems existiert im allgemeinen kein vom Hamilton-Integral unabhängiges Integral des Systems. Verf. setzt sich zum Ziel, hier das Gegenstück dieses Satzes zu beweisen: In einer gewissen Umgebung einer unstabilen periodischen Lösung des Systems gibt es im allgemeinen ein reelles, analytisches Integral, das unabhängig ist vom Hamilton-Integral. Birkhoff ist es gelungen, formale Reihenentwicklungen in der Umgebung instabiler, periodischer Lösungen anzugeben. Der Inhalt vorliegender Arbeit ist der Nachweis, daß diese Reihen auch konvergieren. Verf. bedient sich dabei der Majorantenmethode. *E. Hardtwig.*

**Sapa, V. A.:** Variationsprinzipien in der Mechanik veränderlicher Masse. *Izvestija Akad. Nauk Kazach. SSR, Ser. Mat. Mech.* **5** (9), 116—125 (1956) [Russisch].

The paper deals with the variational and non-variational principles in the mechanics of variable mass. The differential principles are first treated (the principle of virtual displacements, d'Alembert's principle and the least curvature principle of Gauss). Lagrange's equations of motion of the 1st kind are deduced from Gauss's principle and inversely, this principle from d'Alembert-Lagrange's general differential equations of motion. Further, Hamilton's principle is treated and by means of them Lagrange's differential equations of the 2nd kind are deduced. The principles are applied to system of variable mass rotating about a fixed axis. The author observes that the principle of least action cannot be deduced because the integral of energy does not exist for such systems. *D. Rašković.*

**Balescu, R.:** Le théorème de Poincaré pour un ensemble d'oscillateurs. *Acad. Roy. Belgique. Bull. Cl. Sci., V. Sér.* **42**, 622—627 (1956).

Nach einem Theorem von Poincaré ist bei einem mechanischen System, in dem nur Wirkungsvariable in der Hamilton-Funktion auftreten, auch nach dem Zusatz einer kleinen Störung, in der neben den Wirkungsvariablen auch die zugehörigen Winkelvariablen auftreten, unter sehr allgemeinen Bedingungen jedes Integral der Bewegung eine analytische Funktion der Hamilton-Funktion allein. Nach Fermi garantiert dieses Theorem den quasi-ergodischen Charakter der Bewegung. Es wird untersucht, unter welchen Bedingungen sich das Theorem auf ein System schwach gekoppelter Oszillatoren erweitern läßt. Die Bedingungen werden dann am Peierlschen System schwach anharmonischer Oszillatoren in einem Gitter diskutiert. Sie besagen, daß die Umklapp-Prozesse entartet sein müssen, was nur bei einem unendlichen System mit einem dichten Spektrum der Fall ist. *F. Schlögl.*

**Toraldo di Francia, Giuliano:** Sulla gittata massima di un missile. *Atti Accad. naz. Lincei, Rend., Cl. Sci. fis. mat. natur., VIII. Ser.* **21**, 404—407 (1956).

Fried e Richardson (questo Zbl. **71**, 181) hanno provato (supponendo nulla la resistenza dell'aria, la terra piana, e l'accelerazione di gravità costante) che la gittata massima di un missile si ottiene dando alla forza propulsiva una direzione costante normale alla velocità d'impatto. L'A. estende il teorema al caso in cui sul missile agisca anche una forza di resistenza proporzionale alla velocità. *D. Graffi.*

**Gazarchi, L. A.:** Über einen Fall der ebenen Bewegung von drei Massenpunkten. *Ukrain. mat. Žurn.* **8**, 208—213 (1956) [Russisch].

L'A. considère le mouvement plan de trois points de masses différentes, soumises à des forces proportionnelles à  $f(r)$ , où  $r$  désigne la distance entre deux points. Pendant le mouvement la distance  $r$  entre deux de ces points reste toujours proportion-



nelle à la distance  $\rho$  entre leur centre d'inertie et le troisième point. L'A. démontre que la seule forme:  $f(r) = A r + B r^3$  est possible, où  $A$  et  $B$  sont des constantes. Pour que la constante  $B$  soit différente de 0 des certaines conditions complémentaires doivent être satisfaites (p. e. l'égalité de trois masses). *C. Woronetz.*

• **Myklestad, N. O.: Fundamentals of vibration analysis.** New York-Toronto-London: McGraw-Hill Book Company, Inc. 1956. VIII, 260 p. \$ 6.50.

**Johnson, D. C. and R. E. D. Bishop: The modes of vibration of a certain system having a number of equal frequencies.** J. appl. Mech. 23, 379—384 (1956).

The mechanical conservative system discussed in this paper consists of a single mass ( $M$ ) to which is attached a system of  $n$  equal masses ( $m$ ), connected to the mass  $M$  by parallel springs, having the same stiffness ( $k$ ). This system represents an idealized bladed rotor. The frequency equation of this system with  $n + 1$  degrees of freedom is obtained in the usual way, and the natural frequencies are given by  $\omega_0^2 = 0$ ,  $\omega_i^2 = k/m$ ,  $i = 1, \dots, n - 1$ ;  $\omega_n^2 = k(M + n m)/M m$ . It is shown that 0th and  $n$ th principal modes are orthogonal, and that the system has  $n - 1$  principal modes, all having the same frequency. The equal-frequency modes must be orthogonal between themselves and have to satisfy  $n(n - 1)/2$  conditions, hence the number of the quantities which have to be chosen when selecting these modes is  $(n - 1)^2$ . It is shown how through the use of a principal coordinate for each mode, the response of the system may be deduced. Thus, the „cross-respectance“ and the „direct-respectance“ are expressed as series of partial fractions. Two methods are outlined for finding the respectances of the system: the reduction of number of degrees of freedom and the direct evaluation of respectance from the equations of motion. The 2nd method provides the respectances in a form which gives information on the nodal condition of the system. *D. Rašković.*

**Rašković, Danilo P.: On some characteristics of the frequency equation of small vibrations of holonomic conservative systems with static couplings.** Quart. appl. Math. 14, 309—311 (1956).

Einige Bemerkungen zur rekursiven Aufstellung der Frequenzdeterminanten von homogenen Schwingerketten. Aus den — bekannten — Formeln für die Eigenwerte ergeben sich gewisse trigonometrische Beziehungen. *R. Zurmühl.*

**Rosenauer, N.: Some fundamentals of space mechanisms.** Math. Gaz. 40, 256—259 (1956).

Verf. entwickelt eine Zahlsynthese für Raumgetriebe mit sieben Freiheitsgraden und mit 7, 6, 5, 4 und 3 Gliedern. *W. Meyer zur Capellen.*

**Ferrer Figueras, Lorenzo: Über die stationäre Bewegung eines Fadens bezüglich eines Achsensystems, das um die Achse OZ mit gleichförmiger Beschleunigung rotiert.** Collect. Math. 8, 109—169 (1956) [Spanisch].

Stationary movement of a cable with respect to a system of axis which has a uniformly accelerated motion around a fixed axis. The problem leads to a system of partial differential equations several particular cases of which are considered. *M. M. Peixoto.*

## Elastizität. Plastizität:

**Chilver, A. H.: Corrected discontinuities in structural stability problems.** J. Mech. Phys. Solids 5, 9—17 (1956).

Für die Ableitung der Differentialgleichungen von Stabilitätsproblemen der Elastizitätstheorie wird eine der konventionellen Methode von Timoshenko verwandte Methode vorgeschlagen, die Verf. als „Korrigieren der Unstetigkeiten“ bezeichnet. Sie hat den Vorteil, daß die Verformung der getrennten Strukturelemente einerseits und die linear-elastischen Eigenschaften der Gesamtstruktur andererseits voneinander unabhängig erörtert werden können. Als Beispiele werden behandelt der gerade Stab unter Druck, der lange dünne, an einer Längskante unterstützte und

an seinen Enden gleichförmig gedrückte Streifen sowie der dünnwandige Stab mit offenem Querschnitt unter gleichförmigem Druck an den Enden, wobei im letzten Fall die Erörterung der Torsionseigenschaften des Stabes umgangen wird.

*J. Pretsch.*

**Chilver, A. H.:** Buckling of a simple portal frame. *J. Mech. Phys. Solids* 5, 18—25 (1956).

Als Beitrag zur Stabilitätstheorie starr verbundener Rahmenstrukturen wird ein einfacher Torrahmen im Anschluß an Untersuchungen von Chwalla [Der Bauingenieur 19, 69 (1938)] behandelt. Die symmetrischen Knicklasten werden durch anfängliche Biegewirkungen stark beeinflusst. Wenn antisymmetrische Auslenkungen zugelassen werden, ist dieser Einfluß geringer.

*J. Pretsch.*

**Masur, E. F. and K. P. Milbradt:** On the carrying capacity of redundant structures. *J. appl. Mech.* 23, 403—406 (1956).

**Turner, M. J., R. W. Clough, H. C. Martin and L. J. Topp:** Stiffness and deflection analysis of complex structures. *J. aeronaut. Sci.* 23, 805—823, 854 (1956).

Für dynamische und aeroelastische Untersuchungen von Flugzeugauteilen verwickelter Bauart (Berechnung höherer Eigenschwingungen, Flatterrechnung) ist eine genauere Kenntnis des Last-Verformungszusammenhangs der Bauteile erforderlich. Nach einem kurzen Überblick über die bisher gebräuchlichen Methoden werden Verfahren zur Aufstellung der Steifigkeitsmatrix entwickelt, wobei das gesamte Bauwerk in eine große Anzahl von Elementen zerlegt wird, die in „Knoten“ zusammenhängen. Aus den Matrizen für die Elemente baut sich die Gesamtmatrix mit Hilfe von Verträglichkeits- und Gleichgewichtsbedingungen auf. Das Vorgehen erlaubt eine genügend genaue Berücksichtigung der für den vorliegenden Zweck nicht mehr vernachlässigbaren Nebeneffekte, wie „shear lag“ und Torsionsbiegung. Dies wird an einigen Zahlenbeispielen belegt. Die Untersuchungen werden unter dem Gesichtspunkt des Einsatzes digitaler Rechenanlagen geführt.

*R. Zurmühl.*

**Foa, J. V., A. Gail and T. R. Goodman:** Propulsive duets at the tips of rotor blades. *J. aeronaut. Sci.* 23, 381—383 (1956).

Die Verf. suchen die günstigste Form einer Brennkammer für ein Staustahltriebwerk. „Günstigst“ soll hier heißen (in einer zweidimensionalen Theorie), daß bei geringst möglicher Wandstärke der Kammer der Wandumfang (d. h. Gewicht) minimal und zugleich die Fläche des Querschnittes durch die Kammer (d. h. Schub) maximal werden. Die Kurve für die Wandung wird ermittelt nach der Modellvorstellung einer vollkommen biegsamen Wand, an deren Elementen Gleichgewicht herrscht zwischen den Materialspannungen, dem inneren Überdruck und den Trägheitskräften infolge Rotation des Turbinenlaufrades. Es zeigt sich, daß  $\beta = \gamma \cdot \omega^2 R t / (g \cdot p)$  mit  $\gamma$ : spez. Gewicht,  $\omega$ : Winkelgeschwindigkeit des Laufrades,  $R$ : Rotorradius,  $t$ : Wandstärke der Brennkammer,  $g$ : Erdbeschleunigung,  $p$ : Überdruck der Kammer, so klein wie möglich sein sollte, um bei gegebenem Wandumfang maximale Querschnittsfläche zu erzielen. Es wird dann noch eine Tabelle für die verschiedenen wichtigen geometrischen Größen bei variablem  $\beta$  angegeben. Die maximale Querschnittsfläche bei gegebenem  $\beta$  wird ermittelt aus der maximal zulässigen Wandspannung.

*E. Meister.*

**Berman, Alex:** Response matrix method of rotor blade analysis. *J. aeronaut. Sci.* 23, 155—161, 172 (1956).

Unter der Annahme kleiner Auslenkungen aus der Ebene des Drehflügels lautet die Differentialgleichung für die Abweichung  $Z(r, t)$  eines rotierenden Flügels

$$\begin{aligned} (\partial^2 / \partial r^2) [E \cdot J \cdot (\partial^2 Z / \partial r^2)] - \Omega^2 A \cdot (\partial^2 Z / \partial r^2) + m \cdot (\partial^2 Z / \partial t^2) \\ + \Omega^2 \cdot m r (\partial Z / \partial r) - \Omega \cdot \theta (\partial Z / \partial t) = L(r, t). \end{aligned}$$

Hierin bedeuten:  $EJ$ : Biegesteifigkeit,  $\Omega$ : Winkelgeschwindigkeit des Rotors,

$A = \int_0^R m r \cdot dr$ ,  $m$ : Masse pro Längeneinheit,  $r$ : radiale Koordinate,  $t$ : Zeit,  $\theta$ :

mittlerer aerodynamischer Dämpfungskoeffizient und  $L(r, t)$ : Flügelbelastung. Bei harmonischer Belastung kann der Autor  $\psi = \Omega \cdot t$  als neue Veränderliche einführen und  $L$  in eine Fourierreihe nach Potenzen von  $e^{-i\psi}$  entwickeln. Die Auslenkung  $Z(r, \psi)$  sucht er dann ebenfalls in Form solch einer Fourierreihe zu gewinnen. So gelangt er zu einer gewöhnlichen Differentialgleichung vierter Ordnung für die Fourierkoeffizienten  $Z_n(r)$  von  $Z$ . Zur Diff.-Gl. treten noch die Randbedingungen. Die „Einflußmatrizen“ für  $n = 0$  erhält man leicht aus tabulierten Lösungen der Diff.-Gl. für  $Z_0(r)$ , während für  $n > 0$  dieses direkte Verfahren zu langwierig ist, so daß sich ein Näherungsverfahren empfiehlt. Die Fourierkoeffizienten  $L_n(r)$  der Belastungsfunktion  $L$  sollen durch eine endliche Linearkombination dargestellt werden:  $L_n(r) = \sum_{k=1}^H b_{nk} \cdot \lambda_k(r)$ , wobei die  $\lambda_k(r)$  geeignet gewählte Funktionen seien,

so daß  $L_n(r)$  durch diese Linearkombination möglichst gut approximiert wird. Aus Linearitätsgründen kann der Verf. dann die Diff.-Gl. für  $Z_n(r)$  auf eine mit der Inhomogenität  $\lambda_k(r)$  zurückführen und braucht dann die Lösungen  $Z_{nk}(r)$  zu verschiedenen  $k$  nur zu superponieren. Will man die Werte von  $Z_n(r)$ ,  $dZ_n/dr$ ,  $d^2Z_n/dr^2$  oder  $M_n(r) = EJ \cdot (d^2Z_n/dr^2)$  an  $N$  verschiedenen Zwischenstellen  $r_v$  ( $v = 1, \dots, N$ ) des Rotorradius wissen, so braucht man die entsprechenden Werte für  $Z_{nk}(r_v)$  nur zu kennen und erhält dann für die verschiedenen Belastungsfunktionen durch Matrizenmultiplikation der  $n$ -ten „Einflußmatrizen“  $[Z_{nk}(r_v)]$ ,  $v = 1, \dots, N$ ;  $k = 1, \dots, H$ ; usw. mit der  $n$ -ten einspaltigen harmonischen Belastungsmatrix  $(b_{nk})$ ,  $k = 1, \dots, H$ ; die gesuchten Größen. Die Elemente der Einflußmatrizen sind also bei fester Wahl der  $\lambda_k(r)$  von der Belastung unabhängig (sie entsprechen ja den Greenschen Funktionen). Die Funktionen  $Z_{nk}(r)$  werden dann zu berechnen versucht durch Entwicklung nach den Eigenfunktionen  $\Phi_x$  der Diff.-Gl. zu  $n = 0$ . Dabei wird das entstehende unendliche Gleichungssystem zur Bestimmung der Entwicklungskoeffizienten in ein System von unabhängigen Gleichungen verwandelt durch die

Annahme vernachlässigbarer Dämpfungsglieder, d. h.  $\int_0^R \theta \cdot \Phi_x \cdot \Phi_\mu \cdot dr = 0$  für

$x \neq \mu$ . Die theoretisch entwickelten Formeln werden dann für spezielle Massen- und Steifigkeitsverteilungen erprobt und die Einflußmatrizen angegeben. Der Beitrag der ersten Glieder der Reihenentwicklung nach den  $\Phi_x$  wird graphisch angegeben.

E. Meister.

Sen, B. R. and R. Subramoniam: The effective width of  $T$ -beams. Proc. 1st Congr. theor. appl. Mech., Nov. 1—2, 1955, 117—124 (1956).

Boley, B. A. and I. S. Tolins: On the stresses and deflections of rectangular beams. J. appl. Mech. **23**, 339—342 (1956).

Spannungen und Verbiegungen in rechtwinkligen Balken werden durch ein der zweidimensionalen Elastizitätstheorie entnommenes Verfahren in Reihenform berechnet. Die Last besteht entweder aus langsam variierenden Normal- oder Tangentialkräften. Abschließend wird ein Vergleich mit der Balkentheorie von Timoschenko gegeben.

E. Hardtwig.

Abbassi, M. M.: The mathematical analysis of bow girders of any shape. J. appl. Mech. **23**, 522—526 (1956).

Contrary to Pippard's opinion [„The analysis of engineering structures“, London (1936)] in this paper the author treats mathematically the analysis of bow girders of shapes other than the circular arc using parametric equations. The parameter is the angle included between the tangent at any point on the bow girder and the tangent at the middle point. First, it is considered a symmetrical arc bow girder rigidly fixed at both ends carrying an uniformly distributed load ( $w$ ) per unit length. It is shown that in this case the maximum torque occurs at the points of zero bending moments whatever the shape of the girder may be. The bending moment  $M_0$  at the



middle point ( $O$ ) is dependent of the ratio  $\vartheta = \mathfrak{B}/\mathfrak{T}$  where  $\mathfrak{B}$  is the bending stiffness and  $\mathfrak{T}$  the torsional one, but  $M_x$  and  $T_x$  at any point ( $X$ ) are dependent also on  $X$ . The conditions which must be satisfied in order that  $M_0 \neq f(\lambda)$  are given and the position of points of zero bending moment are determined. The case of symmetrical bow girder of any shape carrying two equal concentrated loads placed symmetrically at the girder or single concentrated load ( $W$ ) at middle point ( $O$ ) is treated. Two examples which illustrate the theory are discussed: 1. cycloidal arc bow girder carrying a uniformly distributed load, and 2. parabolic arc bow girder carrying a concentrated load at the middle point.

*D. Rašković.*

**Kennard, E. H.:** Approximate energy and equilibrium equations for cylindrical shells. *J. appl. Mech.* **23**, 645—646 (1956).

Für die Energie und für die Gleichgewichtsbedingungen zylindrischer Schalen wurden vom Verf. Näherungsausdrücke angegeben, und zwar vermöge Reihenentwicklungen nach Potenzen von  $h$ . Die Entwicklungen führen auf so unübersichtliche Ausdrücke, daß ihr Wert nach Ansicht des Verf. in erster Linie in der Möglichkeit zu bestehen scheint, die Genauigkeit einfacherer Näherungsformeln zu überprüfen.

*E. Hardtwig.*

**Evan-Iwanowski, R. M.:** Stress solutions for an infinite plate with triangular inlay. *J. appl. Mech.* **23**, 336—338 (1956).

Probleme der zweidimensionalen Elastizitätstheorie lassen sich, wie erstmalig E. Goursat gezeigt hat, vermöge passender Funktionen einer komplexen Veränderlichen lösen. Die Methode wurde von N. I. Muskhelishvili systematisch weiterentwickelt. Verff. wenden sie hier auf folgende Probleme an: 1. Unendlich ausgedehnte Platte mit dreieckigem starrem Einschluß gleichförmiger Spannung im Unendlichen; 2. eine konzentriert angreifende Kraft auf das starre, in die unendlich ausgedehnte Platte eingelegte Dreieck; 3. dieselbe Aufgabe, jedoch tritt an die Stelle der Kraft ein Moment. Da am Rande die Verrückungen vorgeschrieben sind, handelt es sich um die Lösung der zweiten Randwertaufgabe. Die durch die komplexen Funktionen vermittelten Abbildungen werden besprochen.

*E. Hardtwig.*

**Radok, J. R. M.:** On the solution of problems of dynamic plane elasticity. *Quart. appl. Math.* **14**, 289—298 (1956).

In the case of motion the compatibility condition for a plane stress system can be satisfied by introducing a stress function  $U$ , from which both normal stress components can be derived. Equations of motion yield an equation for the tangential stress and a generalized biharmonic equation for  $U$ , formed by the product of two differential wave operators. If the stress state is moving with constant velocity along the  $x$ -axis the stress function can be formed by adding two analytic functions of two complex variables and their conjugate functions. Stress components and displacements can be expressed through the derivatives of these functions. The second half of the paper treats in some detail the moving Griffith crack and stresses in a half-plane under a moving parabolic punch. In the last section the problem of moving dislocations is briefly discussed.

*A. Kuhelj.*

**Prager, W.:** On conjugate states of plane strain. *J. Mech. Phys. Solids* **4**, 167—171 (1956).

In einer Arbeit vom Jahre 1955 [*J. Mech. Phys. Solids* **4**, 1 (1955)] hat R. Hill ein Dualitätsprinzip entwickelt, demzufolge die Kräfte und Spannungen in einem inkompressiblen, elastischen Körper dual zugeordnet sind den Verrückungen und Deformationen in einem anderen elastischen Körper (nur ebene Spannungszustände werden in Betracht gezogen). Verf. zeigt nun: die Hillsche Beschränkung auf elastische Körper ist unnötig. Das Dualitätsprinzip ist ganz allgemein anwendbar auf Paare von inkompressiblen Körpern in der Art, daß die Spannungs-Deformations-

beziehung in einem Körper zugeordnet ist der Deformation-Spannungsbeziehung im andern Körper. Beispiel: Maxwellscher und Voigtscher Körper. *E. Hardtwig.*

**Stolle, Hans-Wolfgang:** Die Verallgemeinerung der Theorie der Federkonstanten auf elastisch gebettete Träger und ihre Anwendung auf die Berechnung torsionsweicher Kreuzwerke und ebener Tragwerke durch ein vereinfachtes Ausgleichsverfahren. *Wiss. Z. Univ. Rostock, math.-naturw. R. 6*, 191—203 (1956).

**Morgan, Antony J. A.:** Stress distributions within solids bounded by one or two cones. *Z. angew. Math. Phys. 7*, 130—145 (1956).

The Mellin transform is used to obtain a formal solution for the state of stress, under quite general loading conditions, within solids bounded by one or two cones. For certain ranges of the cone semi-vertex angles, these solids, all of linearly varying thickness and semi-infinite in extent, may be descriptively classified as: (I) circular plates, (II) conical „shells“, and (III) solid cones. Under case III are subsumed: (a) the semi-infinite solid, (b) the semi-infinite solid with conical depression, and (c) the infinite solid with conical exclusion. As an example the solution for case IIIa, where a normal loading is uniformly applied over a circular area, is worked out in detail and shown to check with previously known results. (From author's summary.)

*D. Radenković.*

**Neidhardt, G. L. and Eli Sternberg:** On the transmission of a concentrated load into the interior of an elastic body. *J. appl. Mech. 23*, 541—554 (1956).

Die eine Schale eines zweischaligen Rotationshyperboloids ist von einem elastischen Körper erfüllt. Im Scheitelpunkt greift axiale Last an. Die Spannungs- und Verrückungsverteilung in diesem Körper wird berechnet, das Ergebnis in Reihenform dargestellt. Zur Berechnung wird die Spannungsfunktion von Boussinesq in sphäroidischen Koordinaten herangezogen. Die schon behandelten Fälle des elastischen Halbraums sowie des elastischen Kreiskegels werden durch Spezialisieren erhalten. Für Punkte der Rotationsachse werden die Normalspannungen (also die Spannungen in Ebenen senkrecht zur Achse) numerisch berechnet. Diese Zahlenwerte werden zur Diskussion der Frage herangezogen, in welcher Weise die Krümmung der Begrenzungsfläche die Ausbreitung der Belastung ins Körperinnere beeinflusst. Das Ergebnis: der Einfluß kann beachtlich sein, auf alle Fälle ist er nicht vernachlässigbar klein.

*E. Hardtwig.*

**Paria, Gunadhar:** Elastic stress distribution in a three-layered system due to a concentrated force. *Bull. Calcutta math. Soc. 48*, 75—81 (1956).

The zero-order Hankel transform of an axially symmetrical elastic body is determined by a fourth-order linear differential equation of the Euler type. The integration constants of solutions for the three layers are determined by the boundary conditions on all surfaces and through regularity considerations for great depths. Two integration constants can be eliminated easily, but for the remaining a system of eight linear equations is obtained, which can be simplified a little if numerical values for elastic constants are given. The expression for the equivalent depth of the two upper layers can be determined if three determinants of the equation system are known.

*A. Kuhelj.*

**Chandra Das, Sisir:** On the elastic distortion of cylindrical composite bars due to frictional forces on their curved surfaces. *Proc. 1st Congr. theor. appl. Mech.*, Nov. 1—2, 1955, 113—116 (1956).

**Bader, W.:** Zur numerischen Bestimmung der Wärmespannungen. *Z. angew. Math. Mech. 36*, 331—339 (1956).

Spannungskomponenten in einem elastischen Körper können in zwei Anteile zerlegt werden, von denen der erste vor allem die infolge des Wärmestromes auftretenden Verschiebungen wiedergibt, während durch den zweiten die für das resultierende Verschiebungsfeld geltenden Oberflächenbedingungen erfüllt werden. Partikuläre Lösungen der Poissonsgleichung für das Verschiebungspotential des ersten

Feldes werden für einige Koordinatensysteme angegeben, um dann auch einige Vorschläge über die Bestimmung von Näherungslösungen für das zweite Feld machen zu können. Schließlich werden Temperaturspannungen in einem Zylinder bestimmt, dessen Endflächen auf konstanter Temperaturdifferenz gehalten werden und dessen Mantelfläche Wärme an das umgebende Medium konstanter Temperatur abgibt.

*A. Kuhelj.*

**Rozovskij (Rosovsky), M. I.: Semisymbolic method of solving certain problems in the hereditary elasticity theory.** Doklady Akad. Nauk SSSR **111**, 972—975 (1956) [Russisch].

This paper presents in shortened form an earlier published one (this Zbl. **72**, 193). The compound process of the deformation with linear starting physical dependences is treated only. The results are mainly mathematical in nature. *D. Rašković.*

**Özden, K.: Biegung dünner Platten und Variationssätze bei einem nichtlinearen Elastizitätsgesetz.** Ingenieur-Archiv **24**, 133—147 (1956).

Nach einer Zusammenstellung der Grundgleichungen des nichtlinearen Elastizitätsgesetzes (H. Kauderer, dies. Zbl. **35**, 404) werden die Differentialgleichungen für die Biegung dünner Platten in rechtwinkligen und in Polarkoordinaten hergeleitet. Die letzteren werden für den speziellen Fall der gleichförmig belasteten dünnen Kreisplatte mit eingespannten Rändern mittels einer Potenzreihenmethode gelöst. Hierzu wird zunächst [J. H. Argyris, Aircraft Engineering **26**, (1954)] der Satz vom Minimum der Formänderungsarbeit für das nichtlineare Elastizitätsgesetz allgemein formuliert und sodann zu einer Näherungslösung des vorher behandelten Kreisplattenproblems nach dem Verfahren von Ritz herangezogen. Sodann wird gezeigt, daß man auch das Verfahren von Galerkin bei dem nichtlinearen Elastizitätsgesetz zur Berechnung der Plattenbiegung verwenden kann. Die nach den Verfahren von Ritz und Galerkin erzielten Ergebnisse zeigen eine gute Übereinstimmung mit dem Ergebnis der Potenzreihenmethode. Den Abschluß der Arbeit bilden einige kritische Bemerkungen über die erzielten Ergebnisse. (From author's summary.)

*D. Radenković.*

**Bromberg, Eleazer: Non-linear bending of a circular plate under normal pressure.** Commun. pure appl. Math. **9**, 633—659 (1956).

Verf. untersucht den Spannungs- und Deformationszustand in einer gleichmäßig belasteten Kreisplatte mit großen Durchbiegungen für drei Fälle der Randbedingungen: 1. tangentielle Dehnung und Neigung der Biegefläche in radialer Richtung = 0, 2. tangentielle Dehnung und radiales Biegemoment = 0, 3. Normalspannung und Biegemoment in radialer Richtung = 0. Ausgehend von den grundlegenden Differentialgleichungen für dünne Platte mit großen Deformationen von v. Kármán sucht der Verf. die Lösung dieses Problems in Abhängigkeit von einem Parameter  $k$ , proportional zu  $(N/E)^{1/3} \cdot (R/h)^{1/3}$ , wobei  $N$  — Normalbelastung je Einheit der Mittelfläche,  $E$  — Elastizitätsmodul,  $R$  — Halbmesser und  $h$  — Plattendicke bedeuten. Für  $k \leq 1$  wird die Methode der Störungsrechnung und für  $1 \leq k \leq 15$  die Potenzreihenmethode angewendet. Für größere Werte von  $k$  (große Last oder sehr dünne Platte) wird die Berechnung sehr umständlich; dabei bedient sich der Verf. der Methode der Grenzschicht-Theorie. Der Verlauf von Normalspannungen, Biegemoment und Neigung der Biegefläche für  $k = 6,3, 10, 14,1$  und  $k \rightarrow \infty$  ist graphisch dargestellt.

*V. Bogunović.*

**Yanowitch, Michael: Non-linear buckling of circular elastic plates.** Commun. pure appl. Math. **9**, 661—672 (1956); Errata. Ibid. **10**, 623 (1957).

In dieser Arbeit werden zwei Stabilitätsprobleme der dünnen Kreisplatte mit großer Durchbiegung mittels der Variationsmethode untersucht. 1. Frei drehbar gelagerte Kreisplatte unter gleichmäßig verteilter Querb Belastung. Bei Anwendung der Ergebnisse von E. Bromberg (s. vorstehendes Referat) wird nachgewiesen, daß die achsensymmetrische Lösung bei sehr großen Werten von Parameter  $k$  labil



ist. 2. Eine Kreisplatte — am Rande durch gleichmäßig verteilte elastische Federn unterstützt — wird durch einen längs des Umfanges konstanten Radialdruck  $P$  belastet. Ähnlich wie unter 1. wird nachgewiesen, daß eine achsensymmetrische Lösung bei sehr großen Werten des Parameters  $\lambda$  ( $\lambda \rightarrow \infty$ ,  $\lambda = P R^2/h^2$ ,  $R$  — Halbmesser,  $h$  — Plattendicke) labil ist. Dabei werden die Ergebnisse von K. O. Friedrichs und J. J. Stoker (dies. Zbl. 26, 163) benutzt. V. Bogunović.

● Grammel, R. (herausgegeben von): **Verformung und Fließen des Festkörpers.** Kolloquium Madrid 26. bis 30. September 1955. Berlin-Göttingen-Heidelberg: Springer-Verlag 1956. XII, 324 S., 188 Abb. Lw. DM 37,50.

Die Arbeiten werden in diesem Zbl. einzeln angezeigt.

Aroeste, H.: **Theory of melting and yield strength.** Verformung und Fließen des Festkörpers. Koll. Madrid 26.—30. Sept. 1955, 184—186 (1956).

Thomas, T. Y.: **Slip surfaces in plastic solids.** Proc. nat. Acad. Sci. USA 42, 923—927 (1956).

Verf. betrachtet einen elasto-plastischen Körper unter ebenem Spannungszustand, d. h.  $\sigma_{\alpha 3} = 0$  in einem kartesischen Bezugssystem  $x_1, x_2, x_3$  sowie Unabhängigkeit aller betrachteten Größen von  $x_3$ . Eine reguläre Schnittfläche  $F$  heißt Gleitfläche, wenn folgende Bedingungen erfüllt sind: (1)  $F$  liegt nicht im Inneren des reinelastischen Bereiches; (2) alle  $\sigma_{\alpha\beta}$  sind in einer Umgebung von  $F$  stetig differenzierbar, eventuell mit Ausnahme von  $F$  selbst; (3) beim senkrechten Durchgang durch  $F$  sind die Normalkomponente der Translationsgeschwindigkeit sowie der auf  $F$  wirkende Spannungsvektor stetig, jedoch (4) wenigstens eine räumliche Ableitung desselben (muß präzisiert werden, da er nur auf  $F$  definiert ist) sowie wenigstens eine Komponente des Spannungstensors unstetig; (5) die Matrix der genannten räumlichen Ableitungen besitzt eine von 0 verschiedene Spur. — Im vorwiegend interessanten Fall eines auf  $F$  unstetigen Geschwindigkeitsvektors  $v$  reicht für die Gültigkeit von (3) hin, daß (a) dessen auf  $F$  wirkender Sprungvektor  $\Delta v$  die Fläche  $F$  tangiert und (b) eine (einseitige) Normalkomponente  $v_n$  gleich der normalen Wanderungsgeschwindigkeit von  $F$  im betreffenden Punkte ist. — Unter alleiniger Benutzung des Huber-v. Miseschen Fließkriteriums errechnet Verf. ein Verschwinden der Neigung jeder Fließfläche gegen die  $x_3$ -Richtung, sowie eine Gleichung für den Neigungswinkel  $\theta$  der Fließfläche gegen die  $x_1$ -Richtung. Wird der Fall  $\theta = 0$  [welcher allerdings z. B. beim starrplastischen Stab-Hochkantbiegen an der sog. neutralen Faser auftritt, vgl. F. A. Gaydon, J. Mech. Phys. Solids 1, 103—112 (1952/53)] nicht berücksichtigt, so ist bei im Vergleich zu den Spannungsgrößen sehr kleinen Sprüngen derselben eine eindeutige genäherte Auflösung nach  $\theta$  möglich, die im Beispiel reiner Zugbeanspruchung in  $x_1$ -Richtung konstant  $\theta = 35^\circ 16'$  liefert (Experiment:  $\theta \approx 30^\circ$ ).

H. Lippmann.

Parsons, D. H.: **Plastic flow with axial symmetry, using the Mises flow criterion.** Proc. London math. Soc., III. Ser. 6, 610—625 (1956).

Es werden die den ideal-vollplastischen Körper beschreibenden Gleichungen (Misesche Fließbedingung, Bedingungen des Spannungsgleichgewichtes, Lévy-Misesches Stoffgesetz) im Hinblick auf ihre Lösbarkeit im achsialsymmetrischen Fall untersucht. Sie stellen ein System (A) von zwei algebraischen und fünf linearen partiellen Differentialgleichungen 1. Ordnung für 7 unbekannte Funktionen (Spannungen  $\sigma_r, \sigma_\theta, \sigma_z, \tau_{rz}$ ; Verformungsgeschwindigkeiten  $u$ -radial,  $w$ -achsial; positiver Proportionalitätsfaktor  $\lambda$ ) in Zylinderkoordinaten  $r, \theta, z$  dar, welches in folgendem Sinne singular ist: Längs keiner (regulären) Kurve des Definitionsbereiches können (im Hinblick auf den Kurvenparameter stetig differenzierbare) Werte der gesuchten Funktionen frei vorgegeben werden. Dagegen läßt sich (A) für  $u \neq 0$  auf ein nicht-singuläres System (B) von vier linearen partiellen Differentialgleichungen erster Ordnung mit vier unbekannten Funktionen transformieren, aus dessen (durch die längs einer Kurve vorgegebenen Werte eindeutig bestimmten) Lösungen das all-

gemeine Integral von (A) mittels zweier freier Konstanten aufgebaut wird. Daraus leitet Verf. einen Existenz- und Eindeigkeitssatz für (A) im Falle analytischer Integrale und analytischer Anfangswert-Kurven her. Für die praktische Behandlung von (A) mittels (B) [es bleibt offen, ob (B) hierfür wirklich geeignet ist] müssen die auf (A) bezogenen Randbedingungen für (B) umformuliert werden. Verf. weist den Weg in drei Fällen: (1) Spannungsfreier Rand; (2) Rand gleitet unter Reibung längs einer Rotationsfläche, deren Meridiankurven nicht parallel der Körperachse sind; (3) Rand gleitet an einem rauen Kreiszylinder, der sich mit der Zeit dehnt oder verengt. — Freilich verschärft Verf. dies nicht zu Existenzsätzen für (A). U. a. erscheint nämlich ungewiß, ob sich  $\lambda$  — wenn überhaupt — stets positiv bestimmen läßt.

*H. Lippmann.*

**Hill, R.:** On the problem of uniqueness in the theory of a rigid-plastic solid. I, II. *J. Mech. Phys. Solids* 4, 247—255; 5, 1—8 (1956).

I. An uniqueness theorem and the associated extremum principle for the momentary strain-rate field is derived for the rigid-workhardening solid for which the velocity is specified over part of the surface, the traction over the remainder. It is shown that, while the state of stress is uniquely defined by these boundary conditions, uniqueness of the momentary mode of deformation requires specification of the traction-rate over that part of the surface for which the traction is specified. — II. The uniqueness and variational principle demonstrated in Part I is applied to the boundary-value problem of torsion of a bar of hollow cross section.

*A. M. Freudenthal.*

**Hodge jr., P. G. and F. Romano:** Deformations of an elastic-plastic cylindrical shell with linear strain hardening. *J. Mech. Phys. Solids* 4, 145—161 (1956).

A thin-walled circular cylindrical shell of elastic-linear-strain hardening material subjected to a slowly increasing uniform radial pressure is analyzed under the assumption of a „square“ interaction curve between normal force and bending moment according to which plastic flow is initiated only if either the normal force or the moment alone attain their full yield value. (Thus the „square“ interaction curve is in essence a „no interaction“ curve). The stress-strain-rate law is derived from a plastic potential. Various limiting conditions, such as the elastic-plastic and the rigid-strain hardening are considered in the worked-out example.

*A. M. Freudenthal.*

**Radhakrishnan, S.:** Plastic buckling of circular cylinders. *J. aeronaut. Sci.* 23, 892—894 (1956).

**Weiner, Jerome:** An elasto-plastic thermal-stress analysis of a free plate. *J. appl. Mech.* 23, 395—402 (1956).

The thermal stresses in a free plate of elasto-plastic material subjected to heat input over one face are determined under the assumption of the Prandtl-Reuss stress-strain relations. The residual stresses resulting from the formation of, first, two external plastic regions, and, later, another plastic region near the center of the plate are computed and the relation established between the intensity of the heat-input and that of the residual stresses.

*A. M. Freudenthal.*

**Mandel, Jean:** Sur les corps viscoélastiques à comportement linéaire. *C. r. Acad. Sci., Paris* 242, 2803—2805 (1956).

This paper contains general remarks on the dynamics of viscoelastic bodies whose physical behaviour is specified by the hereditary integral representation. The author points out the connection between the equations of motion of a viscoelastic body and of an elastic one.

*M. Predeleanu.*

**Tiffen, R.:** Dilational and distortional vibrations of semi-infinite solids and plates. *Mathematika*, London 3, 153—163 (1956).

On the contrary to the other authors (Prescott, Lamb, Cooper) in this paper it is shown that Prescott's solutions about the possibility of the separate

existence of plane dilational and distortional waves in semi-infinite material are not unique and that special types of purely distortional vibrations are possible in the presence of a free plane boundary. Use of scalar and vector potentials has the advantage of reducing the fundamental equation of elasticity to the more familiar wave equations whose are treated. Further, reflection of plane dilational waves at a free surface and of plane distortional waves at a free plane surface are treated. It is shown that in the first case a different type of reflection is possible in the presence of a free boundary and Prescott's solution is not unique. In the second case there appears to be only one stable form of distortional plane waves, e. i. that in which the displacement vector is always parallel to the free surface. The remainder of this paper is concerned with investigating the possibility of purely dilational or distortional vibrations in an infinite flat plate. A Fourier transform method is employed and the new equations for the equations of motion, boundary conditions and displacements are given. It is shown that dilational vibrations cannot exist alone in an infinite plate but it is theoretically possible to strike a blow that will give rise to purely distortional vibrations. In the case of the plate with free boundaries the subdivision into dilational and distortional waves can effect no further simplification of the problem. However, there exists a stable form of purely distortional vibrations in which the displacement vectors are parallel to the free surfaces.

*D. Rašković.*

**Philipson, L. L.:** On the role extension in the flexural vibrations of rings. *J. appl. Mech.* **23**, 364—366 (1956).

Verf. leitet zunächst die Grundgleichungen für die Schwingungen eines dünnen Stabes ab, dessen Achse räumlich gekrümmt und dehnbar sein möge. Dabei werden einige Ungenauigkeiten berichtigt, die in Arbeiten von Love und Waltring durch nicht ganz konsequente Berücksichtigung kleiner Größen entstanden waren. Die allgemein gültigen Gleichungen werden auf den Kreisringsektor angewandt und es wird gezeigt, daß nur die hohen Eigenfrequenzen durch die Dehnung merklich beeinflußt werden. Werden die Schwingungen durch längs der Stabachse veränderliche radial wirkende harmonische Kräfte erregt, so kann sich die Achsdehnung u. U. schon bei niedrigen Frequenzen bemerkbar machen.

*A. Weigand.*

**Weidenhammer, F.:** Das Stabilitätsverhalten der nichtlinearen Biegeschwingungen des axial pulsierend belasteten Stabes. *Ingenieur-Arch.* **24**, 53—68 (1956).

Auf Grund ihrer großen Frequenzbreite sind für den axial pulsierend belasteten Stab jene Erregerfrequenzen besonders gefährlich, welche in der Nähe des doppelten Wertes einer Biegeschwingungseigenfrequenz liegen (Bereiche erster Ordnung). Für den frei drehbar gelagerten Stab werden die zugehörigen Einschwingvorgänge mit Hilfe der Methode der langsam veränderlichen Phase und Amplitude berechnet, wobei sich aufschlußreiche Zusammenhänge mit der Anfangsstörung ergeben. Weiterhin berechnet Verf. die Resonanzkurve für längserregte Querschwingungen mit Einbeziehung geschwindigkeitsproportionaler Dämpfungskräfte. Das zur Behandlung der (infolge der Kopplung von Längs- und Querschwingungen) nichtlinearen partiellen Differentialgleichungen eingeschlagene Näherungsverfahren wird eingehend begründet.

*H. Neuber.*

**Seiler, J. A., B. A. Cotter and P. S. Symonds:** Impulsive loading of elastic-plastic beams. *J. appl. Mech.* **23**, 515—521 (1956).

Ein beiderseits frei aufliegender Balken aus zähem Werkstoff wird einer solchen Stoßbeanspruchung unterworfen, daß der Anlaufvorgang einer halben Sinuswelle entspricht. Bei der Berechnung wird eine teilweise Plastizierung berücksichtigt. Der Zweck der Untersuchung ist vor allem, Aufschlüsse über Gültigkeitsbereich und Genauigkeit der sog. „starr-plastischen“ gegenüber den genaueren „elastisch-plastischen“ Rechnungsverfahren zu erhalten.

*H. Neuber.*



## Hydrodynamik:

● **Centro Internazionale Matematico Estivo (C. I. M. E.): Teorie non linearizzate in elasticità, idrodinamica, aerodinamica.** (4° Ciclo-Fondazione Giorgio Cini-Isola S. Giorgio (Venezia) 20—28 settembre 1955.) Roma: Istituto Matematico dell'Università 1956, 3 nr.

Die Arbeiten werden in dies. Zbl. einzeln angezeigt.

**Oswatitsch, Klaus: Über eine Verallgemeinerung des Potentials auf Strömungen mit Drehung.** Österreich. Ingenieur-Arch. **10**, 239—241 (1956): **11**, 326 (1958).

**Green, A. E. and R. S. Rivlin: Steady flow of non-Newtonian fluids through tubes.** Quart. appl. Math. **14**, 299—308 (1956).

For an incompressible isotropic fluid the stress components of which are expressible as polynomials in the velocity gradients only, the stress tensor  $t_{ij}$  (using Cartesian tensors) can be written in the form  $t_{ij} = \theta d_{ij} + \Psi d_{ik} d_{ki} + p \delta_{ij}$  ( $d_{ij}$  rate of deformation tensor,  $p$  hydrostatic pressure,  $\theta$  and  $\Psi$  polynomials in the invariants  $I_2 = \frac{1}{2} d_{ij} d_{ji}$  and  $I_3 = \frac{1}{3} d_{ij} d_{jk} d_{ki}$ ). As was shown by R. S. Rivlin (this Zbl. **32**, 319) for such fluids it is possible to maintain steady rectilinear flow through a uniform tube of circular cross-section without the application of body forces. According to J. L. Ericksen, however, this is not generally the case when the cross-section of the tube is non-circular (see the following review). — In the present note a suitable distribution of body forces for the maintenance of steady rectilinear flow through a non-circular tube is calculated. This distribution has non-zero components only in planes normal to the direction of flow and these components are independent of position along the tube. Applying only an uniform pressure gradient and no body forces a steady flow will thus be produced which consists of a rectilinear flow along the tube on which is superposed some flow distribution in planes perpendicular to the length of the tube. This flow is calculated for a tube with elliptical cross-section, for a nearly Newtonian fluid with  $\theta = \text{const}$ ,  $\Psi = \alpha (c + I_2)$ , where  $c$  is a constant and where  $\alpha$  is a constant sufficiently small to allow linearization of the governing equations with respect to  $\alpha$  ( $= 0$  would give a Newtonian fluid). The superposed flow consists in this case of four similar vortex-like flows in normal planes to the tube, one in each quadrant of the elliptical cross-section, having same sign of rotation in diagonally opposite quadrants and opposite signs in adjacent quadrants.

H. Behrbohm.

**Ericksen, J. L.: Overdetermination of the speed in rectilinear motion of non-Newtonian fluids.** Quart. appl. Math. **14**, 318—321 (1956).

On specializing to the case of rectilinear motion R. S. Rivlin's theory of non-Newtonian fluids [Nature **160**, 611—613 (1947)] yields two partial differential equations for determining a single unknown, the speed. If the two scalars which occur in Rivlin's theory are independent only a few types of rectilinear motion are possible, they are conjectured to be either rigid motions or such that the curves of constant speed are circles or straight lines. Hence rectilinear flow through an infinitely long cylindrical tube, to the walls of which the fluid adheres would be possible only when the cylinder is made up of portions of planes and right circular cylinders. The equations of rectilinear motion are given and the dependency conditions are discussed.

H. Behrbohm.

**Schmieden, Curt und Karl-Heinz Müller: Die Strömung einer Quellstrecke im Halbraum, eine strenge Lösung der Navier-Stokes-Gleichungen.** Z. Flugwiss. **4**, 300—309 (1956).

Die Verff. zeigen, daß bei gleichmäßiger Belegung der  $z$ -Achse eines räumlichen Koordinatensystems mit Quellen konstanter Ergiebigkeit und bei Einführung der  $x y$ -Ebene als feste Wand (s. A. van Wijngaarden, dies. Zbl. **27**, 172; die Verff. geben an, daß ihnen diese Arbeit unbekannt geblieben sei), die Navier-Stokes-Glei-

chung sich insoweit exakt integrieren läßt, daß im allgemeinen die Lösung als Quotient hypergeometrischer Reihen konstruiert und insbesondere die geschlossene Lösung, bei der diese Reihen abbrechen, diskutiert werden kann. Während für alle Quellstrecken und für eine Senkenstrecke von einer Stärke  $< 2\nu$  ( $\nu$  = kinematische Zähigkeit) die Steigung des Geschwindigkeitsprofils an der Wand beliebig vorgegeben werden kann, ist die Strömung einer Senkenstrecke von einer Stärke  $\geq 2\nu$  eindeutig bestimmt. — Der Unterschied in der mathematischen Behandlung der beiden Untersuchungen besteht darin, daß Wijngaarden Zylinderkoordinaten und die Verff. räumliche Polarkoordinaten anwenden, so daß der erste Autor die Navier-Stokes-Gleichung auf eine gewöhnliche Differentialgleichung 4-ter Ordnung zurückführt, die sich nur einmal integrieren läßt, während die Verff. ihre entsprechende Differentialgleichung 4ter Ordnung dreimal integrieren und die dadurch erhaltene Riccatische Differentialgleichung auf eine hypergeometrische Differentialgleichung reduzieren. Es gelang deswegen Wijngaarden, die Lösung des Problems nur in einer der Grenzschichttheorie entsprechenden Annäherung anzugeben. Die weitgehend entwickelte Theorie der hypergeometrischen Differentialgleichung gestattet dagegen den Verff., wichtige hydrodynamische Schlüsse zu ziehen. Nach Ansicht der Reff. ist es wünschenswert, zu den von den Verff. betrachteten effektiven Lösungen noch diejenigen speziellen Lösungen heranzuziehen, die aus der Möglichkeit hervorgehen, daß sich die hypergeometrische Differentialgleichung

$$H(\alpha, \beta, \gamma; y, x) = 0$$

in geschlossener Form noch in den Fällen

$n$	$\alpha$	$\beta$
$\alpha$	$\beta$	$\alpha + n$
$\alpha$	$m + n - \alpha$	$n + \frac{1}{2}$
$\alpha$	$\alpha - m + \frac{1}{2}$	$n + \frac{1}{2}$
$\alpha$	$\alpha - n + \frac{1}{2}$	$2\alpha - m$

( $m, n$  = ganze Zahlen)

integrieren läßt.

*Bl. Dolaptschiew-Iw. Tschobanow.*

**Alekseev, N. I.:** Über die stationäre Strömung einer inkompressiblen zähen Flüssigkeit, die eine Schar von orthogonalen Ebenen besitzt. Untersuchungen über ausgewählte Fragen der Analysis und Geometrie 5—19 (1956) [Russisch].

Ausgehend von bekannten Grundgleichungen der Hydrodynamik zäher Flüssigkeiten werden zuerst unter Anwendung der Theorie Cartanscher Formen die geometrischen Ausgangsgleichungen für die gestellte Aufgabe entwickelt. Eine nähere Betrachtung solcher Strömungen ergibt, daß diese entweder Parallelströmungen sind, oder die Wirbelvektoren der Geschwindigkeit sind zueinander parallel, oder sowohl die Geschwindigkeits- als auch die Wirbelvektoren bilden für sich je ein paralleles Vektorfeld. Allgemein gilt, daß bei diesen Strömungen die Bahnen der Flüssigkeitsteilchen entweder geradlinig oder kreisförmig sind. Schließlich werden dann noch die Strömungsverhältnisse für die drei oben erwähnten Fälle näher untersucht.

*A. Kuhelj.*

**Krzywoblocki, M. Z.:** On the generalized fundamental equations for the interaction between dissipative flows and external streams. Acad. Serbe Sci., Publ. Inst. math. 9, 9—39 (1956).

Das Problem der gegenseitigen Wirkung einer zähen kompressiblen Strömung in der Nähe einer Wand und einer „äußeren“ isentropischen Strömung ist von L. Crocco und L. Lees (dies. Zbl. 47, 185) an einem vereinfachten Modell untersucht worden. In der vorliegenden Arbeit werden auch die molekularen Erscheinungen bei geringer Gasdichte, sowie die Geschwindigkeitskomponente und der Druckgra-

dient senkrecht zur Wand berücksichtigt. Verf. benutzt dabei die Gradschen Gleichungen für monoatomige Gase und verwendet die vollständigen Impuls- und Energiegleichungen. Es wird ein besonders für elektronische Rechenmaschinen geeignetes Verfahren entwickelt, um Geschwindigkeits-, Dichte-, Druck- und Temperaturverteilung in der Grenzschicht, ebenso wie die Komponenten des Schubspannungstensors und des Wärmeflußvektors zu berechnen. Die Konvergenz der aufeinanderfolgenden Näherungen wird geprüft. *W. Wuest.*

**Bellman, Richard and G. Milton Wing: Hydrodynamical stability and Poincaré-Lyapunov theory. I.** Proc. nat. Acad. Sci. USA 42, 867—870 (1956).

Um ein vereinfachtes Modell der Strömung einer zähen Flüssigkeit mit Wärmeübergang zu diskutieren, verallgemeinern Verff. die Theorie von Poincaré und Lyapunov über die Stabilität der Lösung von Systemen gewöhnlicher Differentialgleichungen (vgl. R. Bellman, Stability Theory of Differential-Equations. New York, dies. Zbl. 53, 247) auf die Lösungen partieller Differentialgleichungen. Wesentlich ist dabei, daß die Störungen nicht durch lineare Differentialgleichungen beschrieben werden, sondern daß durch ein iteratives Verfahren nicht-lineare Rekursionsformeln für eine Folge von Lösungen aufgestellt werden. *C. Heinz.*

**Carrier, G. F. and R. C. di Prima: On the torsional oscillations of a solid sphere in a viscous fluid.** J. appl. Mech. 23, 601—605 (1956).

Die Torsionsschwingungen einer festen Kugel in einer zähen Flüssigkeit werden unter Berücksichtigung der Zentrifugalkraft untersucht, wobei die vereinfachende Annahme entfällt, daß die Flüssigkeit auf zur Drehachse konzentrischen Kreisen strömt; vielmehr ist eine Zirkulationsbewegung in den Ebenen vorhanden, welche die Drehachse enthalten. Die Näherung dieser Zirkulationsbewegung wird für eine Korrektur des Kugeldrehmomentes berechnet. *J. Pretsch.*

● **Blenk, Hermann** (herausgegeben von): Jahrbuch 1955 der Wissenschaftlichen Gesellschaft für Luftfahrt e. V. (WGL). Mit den Vorträgen der WGL-Tagung in Augsburg vom 12. bis 15. Oktober 1955. Braunschweig: Friedr. Vieweg & Sohn 1956. 360 S. Ganzleinen DM 48,—.

Die Arbeiten werden in diesem Zbl. einzeln angezeigt.

● **Vernotte, Pierre: Calcul numérique, calcul physique, application à la thermocinétique.** Préface de Gustave Ribaud. (Publications scientifiques et techniques du Ministère de l'Air.) Paris: Au service de documentation et d'information technique de l'Aéronautique 1956).

**Dom, U.: Über die Wirbelstraßen von geringster Instabilität.** Z. angew. Math. Mech. 36, 367—371 (1956).

Es werden die Untersuchungen von A. W. Maue und Bl. Dolaptschiew, die eine linearisierte Theorie auf Wirbelstraßen mit nicht auf Lücke stehenden Wirbeln erweitert haben, durch die Berücksichtigung von Störgliedern zweiten Grades weitergeführt. Als Folge eines etwas allgemeineren Störungsansatzes genügen auch bereits Störglieder zweiten Grades zum Nachweis der Instabilität, im Gegensatz zu N. E. Kotschin, der unter Verwendung von Gruppenstörungen nach C. Schmieden und unter Benutzung einer von Liapounoff gegebenen Methode gezeigt hat, daß die doppelreihige Wirbelstraße mit auf Lücke stehenden Wirbeln instabil ist, wenn man Störglieder von höherem als dem zweiten Grad berücksichtigt. Die Rechnungen sind durch die Verwendung der Maue-Dolaptschiew-Bedingung  $(1) \operatorname{sh}(\kappa\pi) = \sin(\mu\pi)$  ( $\kappa = h/l$ ,  $\mu = d/l$ ;  $h$  = Straßenbreite,  $l$  = Straßenteilung,  $0 < \mu < 1$ ) vereinfacht. Die Bemerkungen: „Es existiert eine Zwei-Parameterklasse  $(\kappa, \mu)$  von Wirbelstraßen, die sich im Gleichgewicht befinden: unter Voraussetzung einer Zwei-Gruppenstörung der Wirbel jeder Straßenseite wird aus dieser Klasse durch die Maue-Dolaptschiew-Bedingung (1) eine Ein-Parameterklasse von Wirbelstraßen geringster Instabilität ausgesondert, denn jede Straße der Klasse  $(\kappa, \mu)$ , die dieser Bedingung nicht genügt, ist bereits ersten Grades instabil und jede Straße, die ihr genügt,



wird erst vom zweiten Grade instabil“, benötigen weitere Verfeinerung. Zum Schluß ist ohne Beweis der Satz von Dolaptschiew erwähnt, der besagt, daß die Karman-Wirbelstraße ( $\mu = \frac{1}{2}$ ) bei gleicher vorgegebener Teilung  $l$  und Zirkulation  $\Gamma$  diejenige Straße aus der Klasse der Wirbelstraßen minimaler Instabilität ist, die die größte Breite  $h$  und geringste Translationsgeschwindigkeit  $U$  besitzt. *B. Dolaptschiew.*

**Lance, G. N.:** Motion of a viscous fluid in a tube which is subjected to a series of pulses. *Quart. appl. Math.* 14, 312—315 (1956).

Für die laminare Strömung durch einen zweidimensionalen Kanal und durch ein kreiszylindrisches Rohr werden die Durchflußmengen errechnet für den Fall, daß dem Druckgradienten eine Reihe von Pulsen in axialer Richtung überlagert wird. Es werden Kriterien angegeben, unter welchen Bedingungen die Strömung angehalten werden kann. Das Problem wurde durch Berichte gestellt, nach denen die Brennstoffzufuhr in Strahltriebwerken beim Schießen der Bordkanonen zum Erliegen kommt. *J. Pretsch.*

**Benton, G. S.:** The effect of the earth's rotation on laminar flow in pipes. *J. appl. Mech.* 23, 123—127 (1956).

Die durch die Corioliskraft erzeugte Störung wird als klein angenommen und die Bewegungsgleichung linearisiert. Weiter soll die Störung in Richtung der Rohrachse nicht variieren. Die erhaltene Sekundärströmung ergibt eine bei mittleren Reynoldsschen Zahlen merkbare asymmetrische Verzerrung des parabolischen Geschwindigkeitsprofils laminarer Rohrströmungen. Durchgeführte Experimente scheinen die Theorie qualitativ zu bestätigen, wenn sich auch ungefähr nur der dritte Teil des theoretischen Effekts zeigt. Der letztere Umstand wird mit nicht ausreichender Rohrlänge zur vollen Ausbildung der Sekundärströmung erklärt. *W. Szablewski.*

**Benfratello, Guglielmo:** Su alcuni transitori stabili in sistemi idraulici non conservativi. *Ist. Lombardo Sci. Lett., Rend., Cl. Sci. mat. natur.* 90 (III. Ser. 21), 267—301 (1956).

Die Ausflußerscheinungen aus einem prismatischen Behälter mit konstant gehaltenem Wasserspiegel durch eine zylindrische Röhre werden in Abhängigkeit von einer plötzlichen Änderung des Wasserspiegels oder der Ausflußöffnung untersucht. Für die charakteristischen geometrischen Parameter werden nichtlineare Differentialgleichungen erster Ordnung aufgestellt, wobei die Flüssigkeit als inkompressibel und die Trägheit der Strömung als entscheidende Größe angesehen wird. Die möglichen Strömungsformen werden qualitativ untersucht und auf Grund von graphischen Darstellungen diskutiert. *Th. Szxl.*

**Peschka, W.:** Der Axialverdichter als Schallquelle. *Österreich. Ingenieur-Arch.* 10, 80—96 (1956).

Für einen mit  $\omega$  rotierenden Verdichter in einem schallharten Rohr endlicher Länge wird durch Kombination partikulärer Integrale eine Lösung der Wellengleichung gefunden, die die Randbedingungen am Verdichterrand erfüllt. Die partikulären Lösungen sind in Zylinderkoordinaten separiert. Die  $\varphi$ -Lösung ist harmonisch mit  $n\omega$ ; auch die  $z$ -Lösung ist harmonisch, ihre Wellenzahl  $\lambda$  ergibt sich durch die Randbedingung am Rohrende; die  $r$ -Lösung ist eine Bessel-Funktion  $n$ -ter Ordnung. Die Gesamtlösung wird durch Summieren über  $n$  und  $\lambda$  erhalten. Das Schallfeld im Rohr ist aus den Harmonischen der Grundfrequenz aufgebaut, rotiert aber noch zusätzlich mit  $\omega$ . Die Zahl der Harmonischen hängt einzig von der Druckverteilung am Rand ab. Die Koeffizientenberechnung der Gesamtlösung versagt im Resonanzfall. Dieser Fall wird gesondert durch Vergleich mit dem einfacheren Fall einer Kolbenmembran am Rohrende behandelt. Es ergibt sich so eine Reihe von Axial-Resonanzen. Einige technisch interessierende Randbedingungen werden betrachtet. Mehrstufige Verdichter lassen sich durch Superposition behandeln. *K. Rawer.*

**Yang, Hsun-Tiao and Lester Lees:** Rayleigh's problem at low mach number according to the kinetic theory of gases. *J. Math. Physics* 35, 195—235 (1956).

Unter dem Rayleighschen Problem verstehen die Verff. die Untersuchung einer zweidimensionalen reibenden Gasströmung, die durch eine sehr rasche Beschleunigung einer unendlich ausgedehnten Platte aus der Ruhe heraus in eine gleichförmige Bewegung  $U$  hervorgerufen wird. Den zwei unabhängigen Variablen, der Zeit  $t$  und der Koordinate normal zu der Platte  $y$  stehen die neun abhängigen Variablen: Dichte  $\rho$ , Druck  $p$  (bzw. Temperatur  $T$ ), Geschwindigkeitskomponenten  $u$  und  $v$ , Komponenten der Spannungsdyaide  $p_{xx}$ ,  $p_{xy}$ ,  $p_{yy}$  und die beiden Komponenten des Wärmestromes  $q_x$ ,  $q_y$  gegenüber. Wegen der Nichtlinearität ist das auftretende System von partiellen Differentialgleichungen erster Ordnung kaum zu lösen. Infolgedessen wird angenommen, daß nicht nur die Endgeschwindigkeit der Platte  $U$  (bzw. die Machsche Zahl), sondern auch die Temperaturdifferenz zwischen Platte und ungestörter Gasströmung genügend klein sind, so daß die Gleichungen linearisiert werden können. Das System der partiellen Differentialgleichungen wird dabei nach einer Methode von H. Grad gewonnen, die eine Abänderung der bekannten Hilbert-Enskog-Chapmannschen Methode zur Integration der Boltzmannschen Integrodifferentialgleichung der kinetischen Gastheorie darstellt und im wesentlichen annimmt, daß die Abweichung der Verteilungsfunktion von der Maxwell'schen als lineare Entwicklung nach den Komponenten der Spannungsdyaide und des Wärmestromes angesetzt werden kann. Für sehr kleine Zeiten  $t \rightarrow 0$  kann die Strömung physikalisch als Molekularströmung betrachtet werden, wobei der die Strömung beherrschende Parameter  $M^2/\text{Re} \sim$  freie Weglänge ( $M =$  Machsche,  $\text{Re} =$  Reynoldssche Zahl) ist. Für große Zeiten  $t \rightarrow \infty$  ergibt die gefundene Lösung asymptotisch das Rayleighsche Resultat  $\lim_{t \rightarrow \infty} p_{xy}(t, y) \sim (\rho_0 U^2/\sqrt{\pi}) (1/\sqrt{\text{Re}}) e^{-(y^2/4\nu_0 t)}$  ( $\nu_0 =$  kinematische Zähigkeit). Die gefundene Lösung für große Zeiten weist nach Ansicht der Autoren erneut die Unverläßlichkeit der Chapman-Enskog'schen Methode der sukzessiven Approximationen nach.

*Th. Seel.*

Jarre, Gianni: Scambi di quantità di moto, di calore e di massa fra correnti di miscele gasvapore e superfici bagnate. Atti. Accad. Sci. Torino, Cl. Sci. fis. mat. natur. 90, 25—45 (1956).

Ein gleichförmiger Parallelstrom eines Gas-Dampfgemisches fließt längs einer strömungsparallelen ebenen Wand, längs welcher der Dampf eine Zustandsänderung erleiden kann (die halbdurchlässige Wand besteht aus der festen oder flüssigen Phase des Dampfes; sie ist durchlässig für den Dampf, aber nicht für das Gas). Sowohl auf der Wand als auch im freien Strom seien die Tangentialgeschwindigkeiten, die Enthalpien und die Konzentrationen konstant, doch wird die meist übliche Voraussetzung geringer Dampfkonzentrationen nicht gemacht. Unter den Annahmen 1. stationärer Strömung mit konstantem Druck und niedriger Machzahl, 2. der Gesetze für vollkommene Gase sowohl für das Gas als auch für den überhitzten Dampf, 3. der klassischen Grenzschichtapproximationen und 4. gleicher Transportkoeffizienten für Impuls, Wärme und Masse werden die Gleichungen für die Geschwindigkeits-, Enthalpie- und Konzentrationsfelder aufgestellt und der Austausch des Impulses, der Wärme und des Dampfes zwischen Strömung und Wand bestimmt und diskutiert.

*H. Behrbohm.*

Kaufmann, W.: Nachtrag zu dem Aufsatz: Zur Berechnung der Zirkulationsverteilung bei der ebenen, inkompressiblen Umströmung dünner Flügelprofile. ZFW 3 (1955) S. 373—367. Z. Flugwissenschaften 4, 280—281 (1956).

Ergänzende Bemerkungen über die Berücksichtigung des Anstellwinkels für stoßfreien Eintritt in der genannten Arbeit.

*F. W. Riegels.*

Betz, Albert: Näherungsformeln für die Zirkulationsverteilung um eng stehende Schaufeln von Strömungsgittern. Z. Flugwissenschaften 4, 166—169 (1956).

Unter engstehenden Schaufeln werden solche verstanden, deren Erstreckung in Durchflußrichtung größer als der mittlere Abstand der Schaufeln ist. Unter der Vor-

aussetzung unendlich dünner Schaufeln ist die Zirkulation bei sehr engstehenden Kreisgittern bekannt. Bei endlichem Schaufelabstand fällt sie am Austrittsende der Schaufel (und bei stoßfreiem Eintritt auch am Eintrittsende) auf Null ab. Eine in der Kreisebene längs des Radius angesetzte Wirbelquelle wird nach Transformation in die Ebene eines geraden Gitters aus der vorgegebenen (ebenfalls transformierten) Verteilung der Normalkomponente (in Umfangsrichtung) bestimmt. Die analytische Durchführung der Rechnung führt auf einfache Endformeln für den Zirkulationsabfall, die in einem Diagramm für verschiedene Teilungsverhältnisse dargestellt sind. Der Einfluß der endlichen Schaufeldicke wird näherungsweise berücksichtigt.

*F. W. Riegels.*

● **Ginsburg, Theo:** Untersuchungen über die dreidimensionale Potentialströmung durch axiale Schaufelgitter. (Mitteilungen aus dem Institut für Aerodynamik. Nr. 22.) Zürich: Verlag Leemann 1956. 79 S.

Ausführliche Darstellung der in einem Kurzbericht von J. Ackeret in *Z. angew. Math. Mech.* **35**, 360—362 (1955) angekündigten Arbeit. — Mit Hilfe des Biot-Savartschen Gesetzes werden die Geschwindigkeiten von Stromlinien eines rechtwinklig abgelenkten Wirbelfadens bestimmt. Liegt das eine Ende eines solchen Winkelwirbels in der Achse zweier coaxialer Zylinderflächen und durchstoßt das andere radial verlaufende diese beiden Zylinder, so werden auf beiden Zylindern Geschwindigkeitskomponenten induziert, die durch Quellsenkenbelegungen kompensiert werden können. Das von diesen in der Nähe des Radialwirbels induzierte Feld der Zusatzgeschwindigkeiten wird berechnet. In größerem Abstand vom radialen Wirbelstück wird die Zusatzströmung für den Winkelwirbel mit Hilfe der elektrischen Analogie in einem durch zwei coaxiale Zylinder begrenzten elektrolytischen Tank bestimmt. Die Zusatzgeschwindigkeiten ergeben sich dann durch Differenzbildung mit dem ebenfalls ausgemessenen Feld eines ebenen Wirbelgitters. Durch Überlagerung mehrerer solcher Winkelwirbel können die Schaufeln eines axialen Gitters angenähert werden. Auf Grund der Ergebnisse hat der Verf. ein Rechenverfahren zur Bestimmung der dreidimensionalen Zusatzgeschwindigkeiten für beliebige Beschau-felungen angegeben und auf das Beispiel eines speziellen vierschaufeligen Turbinengitters mit dem Nabenvverhältnis 0,308 bei elliptischer Zirkulationsverteilung angewandt. Ein Vergleich mit einer Berechnung nach der zweidimensionalen Gittertheorie ergab für die Schaufelskelettlinien am Außenzylinder eine Verringerung der Wölbung um 0,3% und am Nabenzylinder eine Vergrößerung der Wölbung um 0,5%.

*F. W. Riegels.*

**Fabri, Jean et Lucien Jarlan:** Sur une représentation non linéarisée du champ aérodynamique induit par le décollement tournant dans une grille axiale. *C. r. Acad. Sci.*, Paris **243**, 1827—1830 (1956).

**Dombrovskij (Dombrovsky), G. A.:** On subsonic flow past a lattice made of flat plates with dead air. *Doklady Akad. Nauk SSSR* **111**, 312—315 (1956) [Russisch].

Dans le travail considéré est développée une méthode analogue à celle publiée par l'A. dans quelques travaux précédents (voir *Zbl.* **65**, 187). Cette méthode permet de construire des solutions des équations qui déterminent l'écoulement, avec ou sans circulation, d'un gaz parfait à deux dimensions. Une bonne approximation à un écoulement adiabatique est assurée par cette méthode.

*C. Woronetz.*

**Seibold, Wilhelm:** Theoretische Abschätzung der Spoilerwirkung im Überschallbereich. *Jahrbuch 1955 wiss. Ges. Luftfahrt* 192—202, (1956) [engl. und französ. Zusammenfassg. Diskussion 202—204].

„Ein ‚Spoiler‘ ist eine Störscheibe, die senkrecht oder nahezu senkrecht aus einer Wand in eine Strömung ragt und zur Erzeugung von Querkraften auf die Wand dient.“ Näherungsweise Berechnung der Quer- und Widerstands-Kräfte in reibungsfreier Überschallströmung für rechteckige und halbkreisförmige Spoiler an der Flügelhinterkante. Der Grenzschichteinfluß läßt sich näherungsweise durch Abzie-



hen der Grenzschichtdicke von der Spoilerhöhe berücksichtigen. In der Diskussion werden dazu von A. Naumann vorläufige Versuchsergebnisse über Druckverteilungs- und Kraft-Messungen an Spoilern zwischen  $Ma = 0,6$  und  $Ma = 2,35$  mitgeteilt, deren Tendenzen mit den Rechenergebnissen des Verf. übereinstimmen.  
K. Nickel.

**Kaeppler, H. J.:** Über den Einfluß einer Variation der Gerätedaten, insbesondere der Flügelfläche, auf die maximale Verzögerung und Hauttemperatur von Rückkehrgeräten. Z. Flugwiss. 4, 382—388 (1956).

In einem früheren Bericht [H. J. Kaeppler und M. E. Kübler, Bericht V. intern. astronaut. Kongr. 120—149 (1955)] waren näherungsweise analytische Integration der Bewegungsgleichungen eines geflügelten Gerätes in einer Überschallgleitbahn durchgeführt und es waren u. a. analytische Formeln zur Berechnung der maximalen Bahnverzögerung und der maximalen Hauttemperatur angegeben worden. Der Witz dabei war — analog wie schon in einer früheren Arbeit des Ref. über den Sturz- und Gleitflug von Flugzeugen [Technische Berichte des Generalluftzeugmeisters 11, H. 8 (1944)], daß die Gerätedaten (Flächenbelastung und Widerstandsbeiwert) zusammen mit dem konstanten Bahnneigungswinkel und der jeweiligen Luftdichte in der unabhängigen Variablen der Bewegungsgleichungen zusammengezogen wurden. Im vorliegenden Bericht nutzt Verf. die aus dem analytischen Integral fließenden Kenntnisse aus, um den Einfluß von kleinen Änderungen einiger aerodynamischer und konstruktiver Daten auf die maximale Hauttemperatur des Fluggerätes zu studieren. Besondere Beachtung wird dabei der Variation der Flügelfläche geschenkt. H. Behrbohm.

**Uchida, Shigeo and Michiru Yasuhara:** The rotational field behind a curved shock wave calculated by the method of flux analysis. J. aeronaut. Sci. 23, 830—845 (1956).

Verff. betrachten die ebene bzw. dreh-symmetrische, nichtlinearisierte und iso-energetische Strömung um einen Körper, der auch stumpf sein kann, so daß die Kopfwelle abgelöst ist. Führt man die Stromlinien ( $\beta = \text{const}$ ) und deren Orthogonaltrajektorien ( $\alpha = \text{const}$ ) als Koordinatenlinien ein, so läßt sich durch Integration des Wirbelsatzes von Crocco längs  $\alpha = \text{const}$  ein erstes Integral ( $A$ ) der Bewegungsgleichungen angeben, welches den Geschwindigkeitsbetrag  $q$  im Strömungsfeld hinter der Kopfwelle als Funktional der Entropie-Verteilung  $S(\beta)$  liefert. Dies gibt Anlaß zu folgendem Iterationsverfahren: Gegeben sei eine angenäherte Form der Kopfwelle  $\beta = \beta_s(\alpha)$ , eine angenäherte Entropie-Verteilung  $S(\beta)$  (die, wegen der Konsistenz des Iterationsverfahrens, mit der Form der Kopfwelle nicht streng verträglich zu sein braucht) und ein angenähertes Strömungsfeld hinter der Kopfwelle. ( $A$ ) liefert hierzu eine neue Verteilung von  $q$ . Mit Hilfe der Energiegleichung folgt aus  $S(\beta)$  und  $q(\alpha, \beta)$  die Dichte  $\rho(\alpha, \beta)$ . Durch Integration der Kontinuitätsgleichung erhält man die verbesserte Stromfunktion  $\psi$ , die jetzt natürlich nicht mehr nur von  $\beta$ , sondern auch von  $\alpha$  abhängt. Die Linien  $\psi = \text{const}$  werden als verbesserte Stromlinien betrachtet und zu ihnen die Orthogonaltrajektoren bestimmt. Nunmehr müssen noch die Randbedingungen am Stoß verbessert werden, die streng  $\delta = \vartheta_s$  ( $\delta$ : Ablenkungswinkel, der sich aus dem Stoßwinkel  $\omega$  ergibt,  $\vartheta_s$  = Neigungswinkel der Stromlinien unmittelbar hinter dem Stoß) lauten. Da die Lage des Scheitelpunktes  $N$  der Kopfwelle nicht bekannt ist, somit also noch ein Parameter im Laufe der Iteration mitbestimmt werden muß, bestimmen Verff. in dem verbesserten Strömungsfeld durch Zwischeniterationen eine einparametrische Schar von Kurven, für die  $\vartheta_s = K \cdot \delta$  bei veränderlichem „Verbindungsfaktor“  $K$  ist.  $K$  ist dabei in einer sich aus der Iteration ergebenden Weise den Punkten  $N$  zugeordnet. Jede dieser Kurven, als Stoßlinie betrachtet, liefert eine neue Entropie-Verteilung hinter dem Stoß, womit der Kreis für die Iteration geschlossen ist. Beim nächsten Iterationsschritt entsprechen den Punkten  $N$  andere Werte von  $K$ . Die richtige Lösung ist dann diejenige, bei welcher sich als Grenzwert für die Iteration  $K = 1$  ergibt. Das Verfahren

wird an einigen Beispielen ausprobiert, darunter dem der Umströmung eines Kreiszylinders für  $M = 2$ . Vergleich mit eigenen Messungen und solchen von Kim [J. phys. Soc. Japan, **11**, 439—445 (1956)] und Alperin [Jet. Prop. Lab. Calif. Inst. Techn., Progress Report RER 4—44, 1—26 (1950)] ergeben, wenigstens für den Abstand der Kopfwelle vom Zylinder, sehr gute Übereinstimmung. *C. Heinz.*

**Andriankin, E. I.:** Problems concerned with a strong explosion, approaching a spherical one. Doklady Akad. Nauk SSSR **111**, 554—556 (1956) [Russisch].

Le travail se rapporte à la propagation des ondes de pression dues à une forte explosion. Le problème symétrique correspondant a été résolu par Sedoff à l'aide de la théorie de similitude. L'A. suppose que la forme de l'onde ne diffère que très peu de la forme sphérique, ce qui permet de linéariser les équations de mouvement. Les solutions ainsi obtenues peuvent être appliquées à des plusieurs problèmes intéressants où l'on peut tenir compte du champ des vitesses, de la variation de la densité, du changement de pression etc. *C. Woronetz.*

**Michajlov (Mikhailov), G. D.:** The distortion and interaction of acoustic waves of finite amplitude in a viscous medium. Soviet Phys., Doklady **1**, 409—413 (1957), Übersetz. von Doklady Akad. Nauk SSSR **109**, 68—71 (1956).

After having established the first and second approximation of the continuity equation and of the equation of motion of a viscous fluid in one dimension author derives second-order expressions for pressures if one or two harmonic oscillations are generated at the origin. In the first case waves of double frequency appear in the fluid and in the second case both summation and difference tones are obtained. The position of maxima for these waves is determined basically by the viscosity of the fluid. Results are in agreement with author's experiments and, for short distances from the origin, coincide with earlier theoretical results [H. Lamb, Dynamical theory of Sound, London (1931)]. *A. Kuhelj.*

**Townsend, A. A.:** The properties of equilibrium boundary layers. J. Fluid Mechanics **1**, 561—573 (1956).

L'auteur considère la couche limite d'une plaque plane  $y = 0$ , pour un courant d'ensemble dirigé dans le sens de l'axe  $OX$ . Il essaie de construire une théorie de la couche limite en équilibre, à l'aide de lois de similitude. Il suppose que la vitesse moyenne dans la couche limite est donnée par la formule  $U = U_1 + U_0 f(y/\delta)$ , où  $U_1$  est la vitesse à la sortie de la couche limite, et où  $u_0$  et  $\delta$  dépendent de  $x$ . En appliquant les règles de similitude à l'équation du mouvement moyen, on trouve des solutions valables si la variation de vitesse dans la couche limite est faible.  $U_1$  est de la forme  $B x_1^a$ ,  $a > -1/3$ . Si en outre la viscosité turbulente est indépendante de  $y$  dans la partie extérieure de la couche limite, on peut calculer les propriétés de la couche limite extérieure en les raccordant à celles de l'intérieur, supposées connues. En ajoutant enfin une hypothèse sur le rôle des grands tourbillons dans l'équilibre du mouvement turbulent, on arrive à des conclusions qui peuvent être comparées numériquement avec les résultats expérimentaux de Clauser. *J. Bass.*

**Stewart, R. W.:** Irrotational motion associated with free turbulent flows. J. Fluid Mechanics **1**, 593—606 (1956).

Die Ergebnisse von Phillips (dies. Zbl. **64**, 205) an einem einfachen Modell drehungsfreier Strömung außerhalb eines turbulenten Gebietes werden durch kleine Inhomogenitäten in den Randbedingungen kaum beeinflusst. Die Tatsache, daß im Flüssigkeitsstrahl die Geschwindigkeitskomponente stromab energiereicher ist als die quer zur Hauptströmung gerichtete, kann nicht aufgeklärt werden. *J. Pretsch.*

**Tollmien, Walter:** Spektralanalyse der homogenen Turbulenz. Z. Flugwissenschaften **4**, 195—198 (1956).

Ausgehend vom Spektrum der Geschwindigkeitsschwankungen werden in einheitlicher Weise einige zum Teil bekannte Beziehungen für den Spektral-Tensor der

homogenen isotropen und homogenen anisotropen Turbulenz hergeleitet.

*F. W. Riegels.*

**Ribner, H. S.: Spectral theory of buffeting and gust response: Unification and extension.** J. aeronaut. Sci. **23**, 1075—1077 und 1118 (1956).

Die Theorie von H. W. Liepmann (dies. Zbl. **66**, 428) über das Verhalten von Flugzeugen in turbulenter Luftströmung, die auf der Annahme einer spektralen Darstellung turbulenter Böen beruht und auf die Idealisierungen des tragenden Punktes und der tragenden Linie angewandt wurde, wird auf die tragende Fläche und ganz allgemein auf den dreidimensionalen Tragflügel verallgemeinert. Für die tragende Linie wird die Theorie auf Pfeilflügel erweitert; für den tragenden Punkt wird eine Erweiterung zur Erfassung von Rollmomenten gegeben.

*W. Szablewski.*

**Eskinazi, Salamon and Hsuan Yeh: An investigation on fully developed turbulent flows in a curved channel.** J. aeronaut. Sci. **23**, 23—34, 75 (1956).

Die Arbeit bringt eine vorwiegend experimentelle Untersuchung an einem gekrümmten Kanal mit einem Verhältnis von innerem zu äußerem Krümmungsradius  $r_i/r_a = 0,9$  bei einer Reynoldszahl  $Re = 74200$ . Seit den Veröffentlichungen von Wilcken [Ingenieur-Arch. **1**, 357—376 (1930)] und später von Wattendorf [Proc. Roy. Soc. London, Ser. A **148**, 565—598 (1935)] ist einiges über die turbulente Strömung in gekrümmten Kanälen bekannt. So weiß man z. B., daß sich die Geschwindigkeitsverteilung unsymmetrisch verformt und daß die Turbulenzbewegung an der konkaven Wand verstärkt, an der konvexen dagegen abgeschwächt wird. Wesentliches über die Strömungsvorgänge blieb jedoch verborgen. In der vorliegenden Arbeit werden außer den Verteilungen der mittleren Geschwindigkeit und des statischen Drucks vor allem vermittlels der Hitzdrahtmethode verschiedene Quantitäten der Turbulenzbewegung gemessen, nämlich die Geschwindigkeitsschwankungen parallel und senkrecht zur Wand, sowie die spektrale Verteilung dieser Größen und der Mittelwert des Produkts aus beiden (scheinbare Schubspannung). Diese Werte zeigen deutliche Unterschiede gegenüber den Beobachtungen im geraden Kanal. Mit den so gemessenen Werten ist eine wesentlich weitergehende Analyse der Strömung als bisher möglich. Das universelle Wandgesetz wird für die Strömung in der Nähe innerer und äußerer Wand bestätigt. Das Mittengesetz zeigt jedoch einen erheblichen Einfluß der Krümmung. Die Energiebilanz der Geschwindigkeitsschwankungen gibt einige Auskunft über den Turbulenzmechanismus. Die Kanalkrümmung kommt dabei hauptsächlich in einem Glied zum Ausdruck, welches gleich dem Produkt aus der scheinbaren Schubspannung und der örtlichen Umfangsgeschwindigkeit, dividiert durch den örtlichen Krümmungsradius ist. Dieses Glied bewirkt eine Dämpfung der Querbewegung nahe der inneren Wand und eine Anfachung derselben nahe der äußeren Wand.

*J. Rotta.*

**Williams, W. E.: Diffraction by a cylinder of finite length.** Proc. Cambridge philos. Soc. **52**, 322—335 (1956).

Die Beugung einer ebenen harmonischen Schallwelle an einem hohlen, sehr gut reflektierenden Kreiszylinder endlicher Länge wird mit Hilfe der Laplacetransformation behandelt. Das Problem reduziert sich dabei auf die Lösung zweier komplexer Integralgleichungen. Für den Fall des langen Zylinders (Produkt aus Wellenzahl und Länge des Zylinders ist groß) wird eine genäherte Lösung der Gleichungen angegeben. Insbesondere erfolgt die Untersuchung der Resonanz des Systems; eine Gleichung für die Resonanzlängen wird abgeleitet. Genäherte Lösungen dieser Gleichung können für lange Zylinder angegeben werden. Es erfolgt eine Diskussion der Endkorrektur (d. h. des Unterschiedes der wirklichen Resonanzlänge zu dem nächsten ganzzahligen Vielfachen der halben Wellenlänge). Vergleiche mit dem Experiment werden angestellt.

*G. Helms.*



**Bhattacharyya, R. N.:** Waves produced by a pressure system moving with an acceleration over the surface of deep water. *Proc. nat. Inst. Sci. India, Part A* **22**, 155—169 (1956).

Für die Untersuchung der Wellenentstehung kann ein fahrendes Schiff durch ein wanderndes Druckfeld ersetzt gedacht werden. Bei der beschleunigten Bewegung dieses Druckfeldes treten drei Arten von Oberflächenstörungen hinzu, nämlich ein nach hinten wanderndes Wellensystem, dessen Wellenzahl von der augenblicklichen Geschwindigkeit der Druckstörung abhängt und das im Gegensatz zum stationären Fall in einer gewissen Entfernung abklingt, ferner geringfügige seitliche Störungen und ein direkter Beschleunigungseffekt, der vorherrschend ist. *W. Wuest.*

**Greenspan, H. P.:** The generation of edge waves by moving pressure distributions. *J. Fluid Mechanics* **1**, 574—592 (1956).

Unter Verwendung eines der Wirklichkeit besser angepaßten Modells, setzt der Verf. die Untersuchungen von Munk, Snodgrass und Carrier zur analytischen Erfassung der Brandungswellen längs einer geraden Küste fort, die von Stürmen angefacht werden, welche längs der Küste streichen. Es wird angenommen, daß die Ozeantiefe proportional der Entfernung von der Küste anwächst. Da es sich erfahrungsgemäß um Amplituden von etwa 1 m, Wellenlängen von 300 km und Schwingungsdauern von 6 Stunden handelt, kann die Wellenlänge als groß, hingegen die Amplitude als klein gegenüber der Ozeantiefe angesehen werden, wodurch eine Linearisierung der hydrodynamischen Grundgleichungen ermöglicht wird. Für die zeitlich veränderliche Druckverteilung an der Oberfläche, die die Anfachtung bewirkt, wird der Ansatz von Munk, Snodgrass und Carrier benützt. Das Problem wird durch zwei inhomogene, lineare, partielle Differentialgleichungen zweiter Ordnung beschrieben, in denen der Wellenausschlag und das Geschwindigkeitspotential als abhängige, bereits entkoppelte Variable auftreten. Als unabhängige Variable figurieren zwei horizontale Ortskoordinaten ( $x$  längs der geradlinig gedachten Küste,  $y$  senkrecht dazu) und die Zeit. Die Lösung wird mittels einer kombinierten Fourier- und Laplace-Transformation eingeleitet, bei der die Variablen  $x$  und  $t$  wegtransformiert werden. Im Bildraum erhält man zwei gewöhnliche Differentialgleichungen, die durch Laguerre-Polynome gelöst werden können. Die inverse Fouriertransformation bereitet gewisse Schwierigkeiten, die aber durch eine Modifikation der Wellenzahl  $k$ , die durch einen Grenzübergang wieder rückgängig gemacht werden kann, überwunden werden. Zuletzt wird statt der obigen Druckverteilung eine Gaußsche Verteilung angenommen. Der Rechnungsgang wird dadurch nur geringfügig modifiziert. Die Übereinstimmung mit den Meßwerten ist sehr gut.

*G. Heinrich.*

**Kidder, Ray E.:** Flow of immiscible fluids in porous media: Exact solution of a free boundary problem. *J. appl. Phys.* **27**, 867—869 (1956).

Eine geneigte, durchlässige, ölgesättigte Fläche besitzt eine unendlich periodische Reihe von Öl liefernden Löchern. Die Fläche sei nach unten durch Wasser begrenzt. Die Öl-Wasser-Grenze bildet eine freie Stromlinie, deren auf die zweidimensional angenommenen Punktquellen hinweisende „fingerförmige“ Gestalt gesucht ist. Diese „Wasser-Finger“ dringen bei zu starker Ölförderung bis zu den Quellöchern vor; die maximal mögliche Ölfördermenge ohne Wassereinzug wird daher gleichzeitig gefragt. Das Problem wird zweidimensional durch konforme Abbildung auf die Hodographen-Ebene exakt gelöst. In einem Grenzfall ergibt sich dabei, daß die freie Grenzschicht die Gestalt einer Zykloide aufweist. *F. W. Riegels.*

**Yuan, S. W.:** Further investigation of laminar flow in channels with porous walls. *J. appl. Phys.* **27**, 267—269 (1956).

Berman (dies. Zbl. **50**, 411) behandelt den Fall der ebenen laminaren Kanalströmung mit porösen Wänden für sehr kleine Reynolds-Zahlen (gebildet mit der Absauge- bzw. Ausblasegeschwindigkeit). Verf. behandelt den Grenzfall hoher

Reynoldszahlen. Die angegebene Lösung gestattet die Angabe der Geschwindigkeitsverteilung  $u$  und  $v$  sowie des Druckverlustes und der Wandreibung. Es zeigt sich, daß — verglichen mit der Poiseuille-Strömung bei undurchlässiger Wand — das Geschwindigkeitsmaximum und der Geschwindigkeitsgradient an der Wand bei Ausblasen von Flüssigkeit zunehmen, bei Absaugung dagegen abnehmen. Ein Vergleich der vorliegenden strengen Lösung mit einer Näherungslösung von Morduchow zeigt recht gute Übereinstimmung. *F. W. Riegels.*

**Chalilov, Z. I.: Lösung einer Filtrationsaufgabe für verdampftes Naphtha mit der Netzmethode.** Akad. Nauk Azerbajdz. SSR, Doklady **12**, 245—248 (1956) [Russisch].

Die zu lösenden Gleichungen heißen in eindimensionaler Formulierung

$$\partial p / \partial t = \Phi_{11} \partial^2 p / \partial x^2 + \Phi_{12} (\partial p / \partial x)^2 + \Phi_{13} (\partial p / \partial x) (\partial \rho / \partial x),$$

$$\partial \rho / \partial t = \Phi_{21} \partial^2 p / \partial x^2 + \Phi_{22} (\partial p / \partial x)^2 + \Phi_{23} (\partial p / \partial x) (\partial \rho / \partial x)$$

mit den Randbedingungen  $p(0, t) = p_0(t)$ ,  $p(l, t) = p_1(t)$  und den Anfangsbedingungen  $p(x, 0) = \varphi(x)$ ,  $\rho(x, 0) = \rho_0(x)$ , wobei  $\Phi_{\kappa\lambda} = \Phi_{\kappa\lambda}(p, \rho)$  hinreichend glatte Funktionen sind. Verf. gibt hierfür das Ersatzsystem von Differenzengleichungen an und beschreibt den Weg zu dessen Lösung. *W. Schulz.*

### Wärmelehre:

**Kac, M.: Foundations of kinetic theory.** Proc. 3rd Berkeley Sympos. math. Statist. Probability **3**, 171—197 (1956).

An Hand eines mathematischen Modells für die Maxwell-Boltzmannsche Gleichung der kinetischen Gastheorie wird eine befriedigende Lösung der insbesondere mit dem „Stoßzahlansatz“ zusammenhängenden Problematik gegeben. Nach der Auffassung des Verf. wird der Stoßvorgang der  $n$  Moleküle durch einen Markoffschen Prozeß in einem  $3n$ -dimensionalen Raum beschrieben, dessen Projektion auf den Phasenraum eines Moleküls durch eine Gleichung vom Typ der Maxwell-Boltzmannschen Gleichung beschrieben werden kann. Das Modell entspricht der Maxwell-Boltzmannschen Gleichung im räumlich-homogenen Fall mit folgenden Verein-fachungen: (a) der Phasenraum des einzelnen Moleküls ist eindimensional und der Impulssatz für Stöße wird deshalb aufgegeben. (b) die Stoßhäufigkeit ist durch einen einfacheren Ausdruck ersetzt. Die Kolmogoroffsche Gleichung des Markoff-schen Prozesses lautet dann

$$\frac{\partial \varphi(\mathfrak{x}, t)}{\partial t} = \frac{\nu}{n} \sum_{i < j} \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} [\varphi(\mathfrak{A}_{ij\vartheta} \mathfrak{x}, t) - \varphi(\mathfrak{x}, t)] d\vartheta,$$

wobei  $\mathfrak{x} = \{x_1, \dots, x_n\}$ ,  $\sum_{\nu=1}^n x_\nu^2 = n$  und  $\mathfrak{A}_{ij\vartheta}$  eine Drehung in der  $x_i, x_j$ -Ebene um den Winkel  $\vartheta$  bezeichnet. Die  $k$ -dimensionalen marginalen Wahrscheinlichkeiten  $f_k^n(x_1, \dots, x_k; t)$  genügen dann Gleichungen wie z. B.

$$\frac{\partial f_1^n(x, t)}{\partial t} = \left(1 - \frac{1}{n}\right) \frac{\nu}{2\pi} \int_{-\sqrt{n-x^2}}^{\sqrt{n-x^2}} dy \int_0^{2\pi} [f_2^n(x \cos \vartheta + y \sin \vartheta, -x \sin \vartheta + y \cos \vartheta, t) - f_2^n(x, y, t)] d\vartheta$$

und das vollständige Analogon für die Maxwell-Boltzmannsche Gleichung entsteht, wenn man  $f_2^n(x, y, t) = f_1^n(x, t) \cdot f_1^n(y, t)$  setzt. Verf. zeigt nun als Haupt-ergebnis, daß aus der asymptotischen Unabhängigkeit

$$\lim_{n \rightarrow \infty} f_k^n(x_1, \dots, x_k; t) = \prod_{\nu=1}^k \lim_{n \rightarrow \infty} f_1^n(x_\nu; t)$$

zur Zeit  $t = 0$  dieselbe Eigenschaft („Boltzmann-Eigenschaft“) für alle  $t$  folgt. Weiterhin wird eine Klasse von Wahrscheinlichkeitsverteilungen angegeben, die diese Boltzmann-Eigenschaft haben:  $\varphi_n(\mathfrak{x}) = C_n \prod_{\nu=1}^n c(x_\nu)$  (wo  $c(x) \geq 0$  gewissen Re-

gularitäts- und Wachstumsbedingungen genügen muß). Das Analogon des Boltzmannschen  $H$ -Theorems wird für die Modellgleichung nachgewiesen und verallgemeinert und das Streben der Dichten  $\varphi(\mathbf{x}, t)$  und  $f(\mathbf{x}, t)$  gegen die Gleichgewichtslösung  $\varphi = \text{konst.}$  bzw.  $f(\mathbf{x}) = (1/\sqrt{2\pi}) e^{-x^2/2}$  bei  $t \rightarrow \infty$  nachgewiesen und genauer untersucht. Die allgemeine Lösung wird mittels harmonischer Funktionen aufgestellt (was an die Untersuchungen von Truesdell und Ikenberry, dies. Zbl. 70, 235 erinnert; Ref.). Auch ein anderer Spezialfall von Dichte-Lösungen der allgemeinen Gleichung wird betrachtet:  $\varphi(\mathbf{x}, 0) = C c(\mathbf{x}_1)$ ; es entsteht dann eine lineare Funktionalgleichung für die marginale Dichte. Der letzte Abschnitt beschäftigt sich noch mit der linearen Gleichung, die sich als erster Schritt bei einem Störungsansatz ergibt, und wirft damit neues Licht auch auf diese Methode im Zusammenhang mit der Maxwell-Boltzmannschen Gleichung. *D. Morgenstern.*

**Frisch, Harry L.:** Poincaré recurrences. Phys. Review, II. Ser. 104, 1–5 (1956).

Für ein mechanisches System aus  $N$  ununterscheidbaren elastisch aufeinanderstoßenden Punktmolekülen auf einer Kreislinie der Länge 1 wird die „Wiederkehrzeit“  $\hat{t}$  für die Beobachtungsgenauigkeit  $\varepsilon$  abgeschätzt. Da die Geschwindigkeiten  $v_i$  bei Stößen ungeändert bleiben, kommt es nur auf die Ortskoordinaten  $\vartheta_i \pmod{1}$  an, für die  $|\vartheta_i(\hat{t}) - \vartheta_i(0)| < \varepsilon$  gelten soll. Die offenbar von den  $\vartheta_i$  unabhängige Wiederkehrzeit läßt sich auf Grund von Sätzen über diophantische Approximationen so abschätzen:  $\hat{t} \leq [(1 + 1/N) \varepsilon]^{-N} [\max v_i]^{-1}$ . Ebenfalls wird auf Grund des Weylschen Satzes über Gleichverteilung der Zahlen mod 1 die mittlere Verweilzeit in solchen  $\varepsilon$ -Umgebungen zu  $\varepsilon^N$  bestimmt. Der Zusammenhang mit dem Entropiesatz und Verallgemeinerungen auf andere Systeme werden besprochen.

*D. Morgenstern.*

**Teramoto, Ei:** The statistical mechanical aspect of the  $H$ -theorem. II. Progress theor. Phys. 15, 480–486 (1956).

A simple model is considered, according to which particles are at time  $t = 0$  in the left-hand compartment of a one-dimensional box. They are then allowed to diffuse to the right-hand part of the box, so that the number left in the left-hand compartment decreases. This model has been discussed before (E. Teramoto and C. Suzuki, this Zbl. 65, 420), and the behaviour of Boltzmann's  $H$ -function is now studied. It is found, as one would expect, that this function reaches equilibrium more quickly if the macroscopic observations are coarse, and less quickly the less coarse the observation. This example is attractive because of its simplicity. *P. T. Landsberg.*

**Kac, M.:** Some remarks on the use of probability in classical statistical mechanics. Acad. Roy. Belgique, Bull. Cl. Sci., V. Sér. 42, 356–361 (1956).

Es wird an folgendem Modell [ähnlich dem von P. u. T. Ehrenfest, Enzykl. d. math. Wiss. [IV, 32 (1909)] die Bedeutung des Boltzmannschen Stoßzahlansatzes, der Nichtumkehrbarkeit und der Wahrscheinlichkeitsauffassung erläutert:  $n$  schwarze und weiße Moleküle durchwandern in fester Richtung  $n$  zyklische Plätze, von denen  $m$  ausgezeichnet sind, in der Art, daß jedes Molekül in der Zeiteinheit zum nächsten Platz geht und dabei seine Farbe wechselt, falls dieser ein ausgezeichneter ist. Das Verhältnis der Anzahlen weißer und schwarzer Moleküle wird untersucht. Der Vorgang selbst ist determiniert, umkehrbar und sogar periodisch. Durch Mittelung über alle möglichen Kombinationen von  $m$  ausgezeichneten Plätzen unter den  $n$  möglichen wird durch direkte Rechnung u. a. gefunden, daß dies Verhältnis bei  $n \rightarrow \infty$  ( $m/n \rightarrow \mu = \text{konst} \neq 0,1$ ) zu  $(1 - 2\mu)^t$  strebt. Der Verf. bemerkt abschließend, daß eine Betrachtung entsprechend der Gibbs'schen Auffassung (Mittelung über alle möglichen Anfangszustände) zu keinem brauchbaren Ergebnis führt.

*D. Morgenstern.*



**Blanc-Lapierre, André and Albert Tortrat:** Statistical mechanics and probability theory. Proc. 3rd Berkeley Sympos. math. Statist. Probability **3**, 145—170 (1956).

A study is made of the following two basic problems of statistical mechanics. (1) What are the statistical properties of one component of a many component system? (2) What can one say about the distribution of the different components of a system among their different possible states? Both problems are treated in some detail after first reducing them to problems in probability theory. The use of exponential weights, characteristic functions and à priori probabilities are discussed. The treatment of these problems has affinities with that adopted by Khinchine in „Mathematische Grundlagen der Quantenstatistik“ (1956) (this Zbl. **71**, 210) to which there is no reference since the translation of this book appeared only after the symposium.

*P. T. Landsberg.*

**Mazur, P. and S. R. de Groot:** On pressure and ponderomotive force in a dielectric. Statistical mechanics of matter in an electromagnetic field. II. Physica **22**, 657—669 (1956).

[Teil I, Mazur und Nijboer [Physica **19**, 971 (1953)].] Ableitung der Kelvinschen und Helmholtzschen Gleichungen für die von einem elektrischen Feld auf ein Dielektrikum ausgeübte Kraft und den Druck. Ausgangspunkt ist die in Teil I abgeleitete Bewegungsgleichung für den Erwartungswert einer Observablen

*H. Kümmel.*

**Sragovič (Sragovich), V. G.:** The statistics of unstationary systems as considered on the probability basis. Doklady Akad. Nauk SSSR **111**, 768—770 (1956) [Russisch].

Analog der Khintchineschen Methode bei der Begründung der Quantenstatistik durch Heranziehung bereits bekannter Grenzwertsätze der Wahrscheinlichkeitsrechnung zur Ableitung der Grenzesetzmäßigkeiten in den einzelnen statistischen Schemata der Quantenmechanik (s. A. Khinchine, Mathematical foundations of quantum statistics, dies. Zbl. **54**, 79), gibt Verf. eine Reihe von Ergebnissen im Falle nichtstationärer Systeme an. R. H. Fowler löste diese Aufgaben zum Teil bereits 1929 mit Hilfe seines speziellen analytischen Apparats. Hier skizziert Verf. eine wahrscheinlichkeitstheoretische Begründung der Theorie der nichtstationären Systeme und teilt mehrere Resultate über asymptotische Abschätzungen der Mittelwerte verschiedener, aus den Statistiken abgeleiteter physikalischer Größen mit.

*W. Richter.*

**Heitler, W.:** Le principe du bilan détaillé. Ann. Inst. Henri Poincaré **15**, 67—80 (1956).

Von Hamilton und Peng (dies. Zbl. **60**, 457) war gefunden worden, daß bei dem Prozeß  $h\nu + p \rightarrow N + \pi^+$  das Prinzip des detaillierten Gleichgewichts verletzt ist, d. h. nur im Mittel über alle Kernspins gilt. Das hat den Verfasser zu dieser Untersuchung angeregt: Er weist auf die (bekannte) Tatsache hin, daß die Bedingung (1)  $w_{AB} = w_{BA}$  des detaillierten Gleichgewichts ebenso durch die schwächere (2)  $\sum_A w_{AB} = \sum_A w_{BA}$  ersetzt werden kann, weil auch diese das Anwachsen der Entropie garantiert. Die Gleichung (2) läßt sich allgemein nach der Quantentheorie beweisen. Verf. zeigt dann, daß in der Quantentheorie statt (1) (3)  $w_{p|m|p_0 m_0} = w_{p_0 - m_0 | p - m}$  gilt ( $p, p_0$  = Impulse,  $m, m_0$  = Drehimpulse vor und nach dem Stoß). Zum Beweise braucht er allerdings die neuerdings in Frage gestellte Symmetrie der Naturgesetze gegen Zeitumkehr und Raumpiegelungen. Gleichung (3) führt bei Mitteilung über  $m$  und  $m_0$  wieder zu (1), so daß nur ein Prinzip des „halb detaillierten Gleichgewichts“ gilt.

*H. Kümmel.*

**Prigogine, I.:** On the statistical mechanics of irreversible processes. Canadian J. Phys. **34**, 1236—1244, discussion 1244—1245 (1956).

Zusammenfassende Darstellung früherer Ergebnisse [s. R. Brout, dies. Zbl. **72**, 211; R. Brout und I. Prigogine, Physica **22**, 35—47; 621—636; dies. Zbl. **71**, 412;

sowie G. Klein und I. Prigogine, dies. Zbl. 51, 427] mit Diskussionsbemerkungen.

*H. Meixner.*

● **Popoff, Kyrille:** Les bases mathématiques de la théorie des processus thermodynamiques irréversibles. Mém. Sci. phys. 63, 85 p. (1956).

Bericht über die phänomenologische irreversible Thermodynamik mit einer Ableitung der Onsagerschen Symmetriebeziehung  $L_{ik} = L_{ki}$  durch Umrechnung der  $L_{ik}$  auf die  $g_{ik}$  (mit  $\Delta S = -g_{ik} x_i x_k$ ) und Untersuchung der Lösungstheorie der Differentialgleichungssysteme  $dx_i/dt = X_i \equiv -\partial \Delta S / \partial x_i$ . Dabei geht nur die Hypothese ein, daß die Lösungen eine Annäherung ans Gleichgewicht beschreiben. Einige klassische Anwendungsbeispiele werden vorgeführt.

*H. Kümmer.*

**Doob, J. L.:** Interrelations between Brownian motion and potential theory. Proc. internat. Congr. Math. 1954 Amsterdam 3, 202—204 (1956).

**Saito, Nobuhiko and Mikio Namiki:** On the quantum mechanics-like description of the theories of the Brownian motion and quantum statistical mechanics. Progress theor. Phys. 16, 71—94 (1956).

This paper traces the analogies which exist between Brownian motion, quantum mechanics and quantum statistics. Comparisons are set up between mathematical concepts such as (a) Transition probability, transformation function, density matrix; (b) Fokker-Planck equation, Schrödinger equation, Bloch equation; (c) Wiener integral, Feynman integral; etc. The analysis seeks to clarify these relationships without, however, attempting a new physical application.

*P. T. Landsberg.*

**Cotte, M.:** Sur un problème de transport de chaleur par déplacement d'un solide. J. Phys. Radium 17, Suppl. 116 A—120 A (1956).

L'A. si propone di calcolare la distribuzione della temperatura in un cilindro che esce da un forno con velocità  $v$ . Il problema viene ricondotto alla ricerca, in un cilindro circolare  $C$  con lunghezza infinita, di una soluzione dell'equazione stazionaria del calore per un mezzo mobile, tale che la sua derivata normale alla superficie di  $C$  rappresenti la perdita di calore (espressa dalla legge di Newton) in due ambienti, di temperatura diversa, separati da un piano normale all'asse di  $C$ . L'A. approfondisce specialmente l'ipotesi di  $v$  grande e considera anche il caso del cilindro con un manicotto formato da un mezzo di piccola conduttività.

*D. Graffi.*

**Jung, H.:** Zur Berechnung von Wärmeaustauschern. Österr. Ingenieur-Arch. 10, 382—392 (1956).

Il lavoro è connesso con la progettazione di apparati di riscaldamento o refrigerazione. Il problema matematico viene impostato schematizzando l'apparato in una corrente piana calda indefinita, mobile, tra pareti rigide parallele, di moto piano, irrotazionale, stazionario che investe un sistema di cilindri cavi pure indefiniti, con pareti di spessore finito, aventi asse normale al piano della corrente, supposto che nella loro cavità interna scorra un fluido di assegnata temperatura. Nota la temperatura della corrente fluida, la sua velocità asintotica, la temperatura del mezzo che scorre nei tubi e le caratteristiche fisiche dei materiali, elasticamente e termicamente isotropi, si determinano, in regime stazionario anche per lo stato termico, in modo formale e in via approssimata, mediante sviluppi in serie: 1. il potenziale cinetico della corrente piana; 2. lo stato termico nelle pareti dei tubi; 3. il relativo stato di tensione elastica, nell'ipotesi che il coefficiente di conducibilità esterna attraverso alla parete in contatto con la corrente calda, sia funzione della velocità tangenziale di questa. Nel caso più aderente alla realtà e cioè di una corrente calda turbolenta, il metodo di valutazione approssimata istituito rimane valido, ove si conosca per via sperimentale la temperatura sulla parete esterna dei tubi.

*G. Sestini.*

### Elektrodynamik. Optik:

**Durand, Émile:** Les équations fondamentales d'un électromagnétisme classique non conservatif. C. r. Acad. Sci., Paris 242, 1862—1865 (1956).

Durand, Émile: Les équations de l'électromagnétisme non conservatif déduites d'une intégrale d'action invariante. *J. Phys. Radium* 17, 1016 (1956).

Jones, E. E.: The magnetostatic characteristics of two non-magnetic elliptical cylinders. *J. Math. Physics* 35, 266—277 (1956).

Due cilindri conduttori, di eguale sezione ellittica, assi paralleli, permeabilità  $\mu$  identica a quella del vuoto, sono percorsi da corrente continua uguale e di verso opposto. L'A., evitando il calcolo diretto dell'integrale che esprime il potenziale vettore, determina il campo magnetico generato dai due cilindri ed il risultante e il momento delle forze agenti su uno di essi. Considera infine il caso in cui le correnti hanno lo stesso verso e  $\mu$  è diversa da quella del vuoto.

*D. Graffi.*

Bordewijk, J. L.: Interreciprocity applied to electrical networks. *Appl. Sci. Research B* 6, 1—74 (1956).

Ein lineares elektrisches Netzwerk mit  $n$  (äußeren) Polpaaren ( $2n$ -Pol) heißt reziprok, wenn, über alle Polpaare summiert,  $(1) \sum I_k V'_k = \sum I'_k V_k$  gilt. Dabei sind  $I_k$  und  $V_k$  Strom und Spannung am  $k$ -ten Polpaar als komplexe Größen zu einem beliebigen Zeitpunkt und  $I'_k$ ,  $V'_k$  die entsprechenden Größen für einen zweiten beliebigen Zeitpunkt. Werden die Polpaare als Zweige gedeutet und betrachtet man daneben auch die inneren Zweige des Netzwerks (Index  $b$ ), so folgt aus den beiden Kirchhoffschen Gesetzen [vgl. etwa Tellegen, *Philips Research Rep.* 7, 259—264 (1952), wie auch Synge, dies. Zbl. 43, 200; 53, 321, wo  $i = C i'$  und  $C_t W = 0$  zu  $i_t W = 0$  führt,  $t$  = Transponieren einer Matrix]  $\sum I_k V_k = \sum I_b V_b$ ; und daraus folgt, daß  $(1)$  gleichbedeutend ist mit  $\sum I_b V'_b = \sum I'_b V_b$ , über alle inneren Zweige summiert. Daher ist ein  $2n$ -Pol, der aus reziproken  $2\nu$ -Polen (etwa aus Zweipolen, idealen Transformatoren und gekoppelten Spulen) zusammengesetzt ist, gleichfalls reziprok. Ein  $2n$ -Pol ist genau dann reziprok, wenn seine Admittanz (Impedanz)-Matrix  $Y$  ( $Z$ ) symmetrisch ist. Die Reziprozitätsbeziehung ist für dissipative lineare mechanische Systeme bereits von Lord Rayleigh (*The theory of Sound*. Vol. I, London 1877) Art. 108) aufgestellt worden. Enthält ein Netzwerk z. B. Gyratoren, Trioden oder Transistoren, so wird  $(1)$  im allgemeinen verletzt. Ein solches Netzwerk heißt nicht-reziprok. Verf. gibt eine modifizierte Interpretation für  $(1)$ , welche auch auf nicht-reziproke Netzwerke anwendbar ist und welche für ein reziprokes Netzwerk Resultate ergibt, die, in begrenztem Umfang, den Resultaten unter der „alten“ Interpretation entsprechen. Bei der „neuen“ Interpretation beziehen sich die gestrichenen und ungestrichenen Größen  $I$  und  $V$  nicht auf zwei verschiedene Zustände desselben Netzwerkes, sondern auf zwei verschiedene Netzwerke mit gleicher Anzahl von Polpaaren. Verf. nennt daher zwei  $2n$ -Pole, zwischen deren Klemmenpaaren eine eindeutige Zuordnung besteht, bei der einander entsprechende Paare die gleiche Bezugspolarität besitzen, „inter-reziprok“, falls  $(1)$  in der neuen Interpretation erfüllt ist. Zwei  $2n$ -Pole, die ihrer Struktur nach in gleicher Weise aus inter-reziproken  $2\nu$ -Polen (im einfachsten Fall aus reziproken  $2\nu$ -Polen) zusammengesetzt sind, sind ihrerseits inter-reziprok. Zwei  $2n$ -Pole sind genau dann inter-reziprok, wenn  $Y' = Y$  ( $Z' = Z_t$ ) gilt. Ein äquivalentes Kriterium wird mit Hilfe der „Scattering“-Matrix angegeben. Da die Inter-Reziprozität selbst keine eindeutige und umkehrbare Operation an  $2n$ -Polen darstellt, gibt Verf. eine Anweisung, wie man aus einem Netzwerk mit  $2n$  (äußeren) Polpaaren eindeutig-umkehrbar ein inter-reziprokes herleiten kann, nämlich indem man jedes Netzwerk-Element durch ein gewisses inter-reziprokes Element ersetzt. Diese „transponierten“ Elemente werden für Gyration, Triode, Dualtriode, Transistor, Dualtransistor und Isolator aufgestellt. Sodann werden einige Transpositions-Sätze bewiesen. Ab S. 33 bringt Verf. verschiedene Anwendungen der Transpositionstheorie.

*H.-J. Hoehnke.*

Lupanov, O. B.: On rectifier and contact rectifier circuits. *Doklady Akad. Nauk SSSR* 111, 1171—1174 (1956) [Russisch].



On définit les  $(p, q)$ -schémas à ventils (où plus court  $(p, q)$ -schémas) comme les schémas avec  $p + q$  pôles:  $a_1, \dots, a_p$  d'entrée,  $b_1, \dots, b_q$  de sortie qui satisfont:  $(a_{i_1}, a_{i_2}) = 0; i_1 \neq i_2, 1 \leq i_1, i_2 \leq p, (b_{j_1}, b_{j_2}) = 0; j_1 \neq j_2, 1 \leq j_1, j_2 \leq q, (b_j, a_i) = 0; 1 \leq i \leq p, 1 \leq j \leq q$ . Chaque couple  $(c, d)$  est égal à 1 si  $c = d$  ou si l'orientation du circuit est de  $c$  à  $d$  et il est égal à 0 dans les autres cas. A chaque  $(p, q)$ -schéma  $S$  on a attaché une matrice  $A = \|\alpha_{ij}\|$  avec  $\alpha_{ij} = (a_i, b_j), 1 \leq i \leq p, 1 \leq j \leq q$ ; et au contraire étant donnée une matrice  $A$  à  $p$ -lignes et  $q$ -colonnes, dont les éléments sont 0 ou 1, elle représente un  $(p, q)$ -schéma. Soit  $B_r(A)$  le nombre minimum de ventils dans le schéma à ventils dont le rang ne dépasse pas à  $r$  qui est réalisé par la matrice  $A$ . On a les relations suivantes:  $B_r(p, q) = \max B_r(A)$ ,  $B_r(A) = B_r(A')$  ( $A'$  étant la matrice transposée de  $A$ ),  $B_r(p, q) = B_r(q, p)$ ,  $B(p, q) = B(q, p)$ ,  $B(p, q) \leq B_r(b, q)$ ,  $B_1(p, q) = p \cdot q$ . L'A. démontre les théorèmes suivants: Lemme:  $B_2(p, q) \leq p + q \cdot 2^{p-1}$ . Théorème I: Soit la suite  $(p_1, q_1), \dots, (p_n, q_n), \dots$  qui satisfait aux conditions:  $p_n \rightarrow \infty, p_n \geq q_n, (\log_2 p_n)/q_n \rightarrow 0$ , alors  $B_2(p_n, q_n) \sim p_n q_n / \log_2 p_n$ . Théorème II:  $L_{KB}(n) \sim 2^n/n$  où  $L_{KB}(n)$  est le nombre minimum de contacts et ventils (ensemble) des schémas à l'aide desquels se peut réaliser toute fonction de l'algèbre de logique à  $n$  arguments. Théorème III: Pour chaque  $\varepsilon > 0$  et  $n > n(\varepsilon): \frac{1}{2} 2^{n/2} (1 - \varepsilon) < \tilde{L}(n) < 2 \sqrt{2} 2^{n/2}$  où  $\tilde{L}(n)$  est le nombre minimum tel qu'à l'aide des schémas à contacts et ventils qui ont un nombre qui ne dépasse pas  $\tilde{L}(n)$  contacts, peut être réalisée toute fonction d'algèbre de logique à  $n$  arguments comme fonction de conductibilités. M. Nedelcu.

● Nodelman, Henry M. and Frederick W. Smith: **Mathematics for electronics with applications.** New York, Toronto, London: McGraw-Hill Book Co., Inc. 1956. VIII, 391 p. 160 line drawings, 6 halftones. \$ 7.—

Das Buch setzt beim Leser bereits eine gewisse Vertrautheit mit der Elektronik, aber kaum mathematische Kenntnisse voraus, die über die Grundtatsachen der Differential- und Integralrechnung hinausgehen. — Inhaltsübersicht in Stichworten: Beispiele für Anwendungen der Differential- und Integralrechnung. Rechnen mit dimensionsbehafteten Größen. Determinanten und Matrizen mit Anwendungen auf Netzwerke (insbesondere Vierpole) einschließlich Röhren-, Transistor- und Verstärkerschaltungen. Die Anfangsgründe der Reihenlehre werden entwickelt und insbesondere für die Behandlung nichtlinearer Probleme nutzbar gemacht. Methode der kleinsten Quadrate. Harmonische Analyse. Anfangsgründe der Theorie der Differentialgleichungen und der Laplacetransformation. Boolesche Algebren und ihre Anwendung auf Schaltungen. — Die einzelnen Kapitel sind weitgehend unabhängig voneinander lesbar. Überall finden sich zahlreiche, oft dem neuesten Schrifttum entnommene Anwendungsbeispiele und Übungsaufgaben, wobei auch auf die numerische Durchführung Wert gelegt ist. Zahlreiche Literaturangaben sind in den Text eingestreut. Die beigegebenen Halbtonbilder zeigen typische Szenen und Erzeugnisse angewandter Elektronik ohne spezielle Beziehung zum Text. — Auch wer den Stoff des Buches bereits im wesentlichen kennt, sei auf das Schlußkapitel hingewiesen. Die Verff. weisen dort auf das immer weitere Eindringen von ehemals der reinen Mathematik zugerechneten Disziplinen in die Ingenieurpraxis hin. Eine bemerkenswerte Tabelle (auf S. 358—359) gibt durch Auszählung der in 917 Zeitschriftenaufsätzen über Elektronik, Physik und Aeronautik benutzten Mathematik gewissermaßen eine quantitative Antwort auf die Frage, welche Zweige der Mathematik der Elektronik-Ingenieur beim heutigen Stand der Technik hauptsächlich benötigt. A. Stöhr.

Silverman, Richard A.: **Turbulent mixing theory applied to Radio scattering.** J. appl. Phys. 27, 699—705 (1956).

Im Gegensatz zur bisher benutzten heuristischen wird die statistische Mischungstheorie von Obukhoff [Izvestija Akad. Nauk SSSR, Geograf. Ser. Geofiz. 13, 58

(1949)] herangezogen, die der Kolmogoroffschen Turbulenztheorie entspricht. Dort ergibt sich die Strukturfunktion (mittleres Differenzenquadrat)  $D(r)$  aus Ähnlichkeits- und Dimensionsbetrachtungen zu  $B^2 \cdot r^{2/3}$  und die Spektralverteilung  $\Phi(k) = C \cdot k^{-5/3}$ . Mit Hilfe einer Fourier-Entwicklung nach der Wellenzahl  $k$  kann die Relation  $C = B^2/2,4$  abgeleitet werden, woraus schließlich ein einfacher Ausdruck für die mittlere quadratische Schwankung als Funktion der Wellenzahl folgt (proportional  $k^{-3}$ ). Daraus läßt sich der Streu-Koeffizient berechnen. Er wird erheblich höher als nach den heuristischen Theorien. Für ionosphärische Streuung ergibt sich ein Frequenzgang mit  $\lambda^{11/3}$ , statt  $\lambda^5$  bei Villars und Weisskopf. Für die troposphärische Streuung wird aus experimentellen Streu-Ergebnissen ein  $B$ -Wert der Temperatur-Schwankung berechnet, etwa gleich Obukoffs Wert  $3 \cdot 10^{-2}$ . Das geht nur im Winter, im Sommer überwiegt der Feuchtigkeits-Einfluß. Die Frequenzabhängigkeit wird  $\lambda^{-1/3}$  (gegen  $\lambda^0$  bei Gordon und  $\lambda^1$  bei Villars-Weisskopf). Genaue Vergleiche von meteorologischer Mikro-Struktur und Streuquerschnitt werden vorgeschlagen.

K. Rawer.

Duncan, R. A.: Lunar variations in the ionosphere. Austral. J. Phys. 9 112—132 (1956).

Theoretische Ableitung der Gezeiteneffekte in der  $F2$ -Schicht (bei Tag), ausgehend von einer Approximationsformel für das Stromsystem, das aus erdmagnetischen Gezeiten-Beobachtungen für die  $E$ -Schicht abgeleitet wird. Die lunare Druckvariation am Boden ist empirisch bekannt, Mit der Coriolis-Ablenkung folgt daraus ein Windfeld am Boden, in der  $E$ -Schicht muß ein umgekehrtes Feld angenommen werden. Aus dem Stromfluß um einen Erdquadranten und der Leitfähigkeit folgt die entsprechende EMK des Dynamo-Effekts und entsprechende (horizontale) Windamplitude in der  $E$ -Schicht (1,3 m/s). Die Dynamoströme bringen eine elektrische Polarisation hervor, die als Überlagerung (im Verhältnis 80 V:300 V) einer äquatorialen „Schuster-Polarisation“ (mit 4 Ladungszentren auf dem Äquator) und einer „Hall-Polarisation“ (je im Zentrum der Strom-Ringe) beschrieben wird. Entsprechend den Martynschen Vorstellungen muß sich dieses elektrostatische Feld (wegen der guten Leitung längs der magnetischen Kraftlinien) nach oben fortsetzen; so wird eine räumliche Potential-Verteilung erhalten. Für das Plasma der  $F$ -Region ist dieser indirekte Gezeiten-Einfluß groß gegen die Gravitationswirkung. Das horizontale elektrostatische Feld zusammen mit dem Erdmagnetfeld sollte eine Quer-Drift des Plasmas der  $F$ -Region als Ganzes hervorrufen, die die neutralen Teilchen jedoch nicht mitmachen. Die größte Vertikalkomponente dieser Bewegung (etwa 2 m/s) sollte in mittleren Breiten auftreten. Die Verschiebung aus dem Gleichgewichtszustand käme dort auf 12 km Amplitude, wenn ihr nicht die Ionendiffusion, in geringem Maß auch der Vertikalgradient der Rekombination, entgegenwirkten. So wird effektiv in mittlerer Breite nur eine Amplitude von 1,26 km erhalten, während am magnetischen Äquator, wo die Ionendiffusion längs der magnetischen Kraftlinien keinen Vertikalaustausch bewirken kann, sich 6 km Amplitude ergeben. Eine Variation der maximalen Elektronendichte der  $F$ -Region wird einerseits durch die Divergenz der Driftbewegung entstehen; diese entspricht der des geomagnetischen Feldes und gibt, entgegen früheren Vermutungen, nur einen kleinen Effekt. Andererseits führt der Höhengradient der Elektronen-Produktion und -Rekombination auf einen größeren Effekt zu den Zeiten, wo die Relaxationszeit genügend groß ist. Wird ein dichte-proportionaler Rekombinationskoeffizient angesetzt, so folgt eine lunare Total-Variation der Elektronendichte im Schichtmaximum von 3,6% in mittlerer Breite mit 3 h Zeitverschiebung gegen die Höhenvariation. Am magnetischen Äquator dagegen liegt die  $F2$ -Schicht so hoch, daß die Relaxationszeit immer groß ist. Hier ist die Druck-Abhängigkeit der Elektronen-Produktion entscheidend, der Effekt auf die Elektronendichte wird 9,4% bei 4 h Voreilung gegen die lunare Höhenvariation.

K. Rawer.



Schumann, Winfried Otto: Der Einfluß des horizontalen Erdmagnetfeldes auf elektrische Wellen zwischen Erde und Ionosphäre, die schräg zum magnetischen Meridian verlaufen. *Z. angew. Phys.* 8, 126—127 (1956).

Verallgemeinerung der Arbeit (W. O. Schumann, dies. Zbl. 67, 196) auf Ausbreitung schief zur magnetischen Meridianebene ergibt keine wesentliche Verschiedenheit für SE- und SW-Ausbreitung. Deshalb müssen abweichende experimentelle Befunde an der Atmosphäre durch einen Unterschied im Charakter der Gewitterentladung und nicht der Ausbreitung erklärt werden. *K. Rawer.*

Kovács, R. and L. Solymár: Theory of aperture aerials based on the properties of entire functions of the exponential type. *Acta phys. Acad. Sci. Hungar.* 6, 161—184 (1956).

In der Arbeit werden verschiedene Aufgaben besprochen, die mit der Abstrahlung von elektromagnetischen Wellen aus Öffnungen von hauptsächlich rechteckigem Querschnitt zusammenhängen. Mathematisch stützen sich diese Rechnungen auf die Theorie der ganzen Funktionen vom Typus der Exponentialfunktion. Die Strahlungsdiagramme, die bei endlichen Dimensionen der Öffnung erzielt werden können, gehören zu der  $W_1$ -Klasse dieser Funktionen. Jedes beliebig vorgegebene Strahlungsdiagramm ist zumindest annäherungsweise auch zu verwirklichen. Es läßt sich darstellen als eine im Mittel konvergente unendliche Reihe von  $W_1$ -Funktionen. Ein Gewinn in der Verstärkung der ausgesandten Strahlung ist notwendig immer verbunden mit einer Zunahme in der Güte der Strahlung. Dabei wird unter der Güte der Strahlung der Quotient aus der Blindleistung zur Wirkleistung im Energiefluß der Strahlung verstanden. Die untere Grenze für die Güte bei einer bestimmten Verstärkung wird festgelegt. Schließlich werden auch noch Lösungen von Näherungsproblemen mitgeteilt, wie sie beim praktischen Entwurf der behandelten Strahler auftreten. *H. Buchholz.*

● King, R. W. P.: The theory of linear antennas with charts and tables for practical applications. Cambridge, Mass.: Harvard University Press 1956. 944 p.

Grinberg, G. A., N. N. Lebedev, I. P. Skal'skaja (Skal'skaia) and Ja. S. (Ja. S.) Ufljand (Ufliand): The electromagnetic field of a linear emitter located inside an ideally conducting parabolic screen. *Soviet Phys., JETP* 3, 366—378 (1956), Übersetz. von *Žurn. eksper. teor. Fiz.* 30, 528—543 (1956).

In der Arbeit wird auf der Grundlage der Maxwell'schen Gleichungen die Aufgabe gelöst, die Gesetze der Reflexion elektromagnetischer Wellen an der Innenseite eines vollkommen leitenden parabolischen Zylinders zu bestimmen. In der Hauptsache wird der Fall betrachtet, bei dem die Erzeugung des Wellenfeldes von einer sog. leuchtenden Linie ausgeht, die mit der Brennnlinie des Parabols zusammenfällt. Das primäre Feld wird dann bekanntlich von der Hankelschen Funktion beschrieben. Für die vollständige Lösung wird ein Ansatz gemacht in Form eines Mellin-Integrals, dessen Integrand sich u. a. aus dem Produkt zweier Funktionen zusammensetzt, dessen einer Faktor allein von der Koordinate  $\alpha$ , der andere allein von der Koordinate  $\beta$  abhängt, mit  $\alpha$  und  $\beta$  als den Koordinaten des parabolischen Zylinders. Die beiden Funktionen sind so gewählt, daß ihr Produkt der Wellengleichung in den parabolischen Koordinaten  $\alpha$  und  $\beta$  genügt. Diese Art des Lösungsansatzes entspricht dem Lösungsvorgang bei der Untersuchung der Reflexion elektromagnetischer Wellen im Innern eines Drehparabols. Nachdem die in dem Lösungsansatz aufgenommene, nur von der Integrationsvariablen abhängende unbekannte Funktion mittels der Grenzbedingungen an der Oberfläche des vollkommen leitenden parabolischen Zylinders bestimmt worden ist, werden die Konvergenz der lösenden Integrale und die Regularität der Lösung untersucht und verschiedene Formen der Lösung hergeleitet. Hierbei glauben die Verff. gegen die Arbeit von Magnus (dies. Zbl. 26, 174) über das nämliche Problem gewisse Bedenken äußern zu müssen. Sie beziehen sich auf das Verhalten der Lösung in der Brennnlinie. Am Schluß der Arbeit wird noch der Gang



der Lösung für den allgemeineren Fall besprochen, da die leuchtende Linie in der durch die Brennpunktlinie gehende Mittelebene des parabolischen Zylinders liegt.

H. Buchholz.

**Dnestrovskij (Dnestrovsky), Ju. N. (Yu. N.): Perturbation of characteristic numbers of electromagnetic cavities.** Doklady Akad. Nauk SSSR 111, 94—97 (1956) [Russisch].

Die Änderungen  $\Delta\lambda$  der Eigenfrequenzen  $\lambda$  eines elektromagnetischen Resonators a) bei kleinen Formänderungen des Resonators und b) beim Hineinbringen kleiner, ideal-leitender Körper  $g$  wurden von vielen Autoren nach der Störungsmethode untersucht, wobei man sich zur Vereinfachung auf die 1. Näherung beschränkte. Für die Aufgabe b) ist das Ergebnis der 1. Näherung der Störungstheorie zu roh. K. D. Sinel'nikov, A. I. Achieser, G. Ja. Ljubarskij [Učenyje Zapisk. Chařkovsk. gos. univ. 35, 61 (1950)] sowie L. C. Majer, J. C. Slater [J. appl. Phys. 23, 68 (1952)] haben versucht, die Resultate der Störungstheorie für Körper regelmäßiger Form (Kugel, Rotationsellipsoid) zu verbessern ohne jedoch den Genauigkeitsgrad ihrer Formeln zu bestimmen. Mittels einer konvergenten Folge sukzessiver Approximationen (Collatz, dies. Zbl. 23, 235) gewinnt nun Verf. für die Änderung des 1. Eigenwertes  $\lambda_1$  eine Formel, die für beide Fälle a) und b) gilt (einschließlich der Fehlerabschätzung) und die als Spezialfall die Formel von Majer-Slater für die leitende Kugel enthält. — Nach der gleichen Methode berechnet Verf.  $\Delta\lambda$  bei Änderung der Dielektrizitätskonstanten  $\varepsilon$  in einem kleinen Gebiet  $g$ , das im Inneren des Resonators liegt. Speziell für eine kleine dielektrische Kugel  $V_g = \frac{4}{3}\pi R_g^3$  mit der Dielektrizitätskonstanten  $\bar{\varepsilon}$  ergibt sich

$$\Delta\lambda = -\lambda_1 (\bar{\varepsilon} - \varepsilon) [(3\varepsilon)/(2\varepsilon + \bar{\varepsilon})] \bar{\mathbf{e}}_1^2 V_g + O(R_g^5),$$

während nach der Störungstheorie  $\Delta\lambda \sim -\lambda_1 (\bar{\varepsilon} - \varepsilon) \bar{\mathbf{e}}_1^2 V_g$  ist, wobei  $\bar{\mathbf{e}}_1$  den räumlichen Mittelwert von  $\mathbf{e}_1$  innerhalb  $V_g$  bezeichnet.  $\mathbf{e}_1$  ist die Lösung von  $\text{rot rot } \mathbf{e} = \lambda_1 \mathbf{e}$ ,  $[\mathbf{e}, \mathbf{n}]_r = 0$  im ursprünglichen Resonator (Rand  $\Gamma$ ). — Anm. des Ref.: Auf S. 95 ist  $\gamma$  nicht definiert. Vermutlich ist  $\gamma = \Gamma \cap \text{Rand } g$ ,  $z \cap \gamma = \emptyset$  gemeint.

H.-J. Hoehnke.

**Svešnikov (Sveshnikov), A. G.: An approximate computation method in designing a slightly irregular wave guide.** Doklady Akad. Nauk SSSR 110, 197—199 (1956) [Russisch].

Es wird die Ausbreitung elektromagnetischer Wellen längs eines Leiters untersucht, der sich von einem regulären zylindrischen Wellenleiter nur wenig, und zwar wie folgt unterscheidet: Entlang einer glatten Raumkurve  $L$  mit der Bogenlänge  $s$ , der Krümmung  $\kappa(s)$  und der Torsion  $\nu(s)$  bewege sich normal zu  $L$  eine Ebene  $S$ , wobei  $L$  die Ebene  $S$  stets im gleichen Punkt 0 schneidet und eine fixierte Richtung in der Ebene  $S$  immer mit der Richtung der Hauptnormalen von  $L$  (im Schnittpunkt 0) zusammenfällt. Bei dieser Verschiebung erzeugt eine glatte, geschlossene, den Punkt 0 enthaltende Kontur  $C$  in der Ebene  $S$  die Oberfläche  $\Sigma$  des betrachteten Wellenleiters. Der maximale Durchmesser  $D$  des von  $C$  begrenzten Gebietes soll dann der Bedingung  $D \ll 1/\varepsilon_0$  genügen, wo  $\varepsilon_0 = \max \{\kappa(s), \nu(s)\}$ . Die Lage eines beliebigen Punktes in bezug auf den Wellenleiter wird durch die drei Koordinaten  $s$  und  $r, \varphi$  (Polarkoordinaten in der Ebene  $S$ , wobei die Achse  $\varphi = 0$  mit der Hauptnormalen von  $L$  zusammenfällt) beschrieben. Wenn die Zeitabhängigkeit in der Form  $e^{-i\omega t}$  berücksichtigt wird, so gehen die Maxwell'schen Gleichungen für das elektromagnetische Feld  $\{\mathbf{E}, \mathbf{H}\}$  um einen Wellenleiter mit idealleitender Oberfläche  $\Sigma$  über in (1)  $\text{rot } \mathbf{H} = -i k \mathbf{E}$ ,  $\text{rot } \mathbf{E} = i k \mathbf{H}$  ( $k = \omega/c$ ), mit der Randbedingung (2)  $[\mathbf{E} \times \mathbf{n}]_\Sigma = 0$ , wo  $\mathbf{n}$  die Oberflächennormale ist. Verf. bildet diese Gleichungen für obiges Koordinatensystem und macht den Ansatz  $\mathbf{E} = \mathbf{E}^0 + \varepsilon_0 \mathbf{E}' + \dots$ ,  $\mathbf{H} = \mathbf{H}^0 + \varepsilon_0 \mathbf{H}' + \dots$ , wo  $\{\mathbf{E}^0, \mathbf{H}^0\}$  eine Lösung von (1), (2) in Zylinderkoordinaten  $(s, r, \varphi)$  (d. h. mit  $\kappa = \nu = 0$ ) ist. Anschließend werden nur Glieder mit den ersten

Potenzen von  $\kappa$  und  $\nu$  beibehalten. Für das Feld  $\{\mathbf{E}' \mathbf{H}'\}$  erhält man in den Zylinderkoordinaten  $(s, r, \varphi; \kappa = \nu = 0)$  das Gleichungssystem  $\text{rot } \mathbf{H}' = -i k \mathbf{E}' - \mathbf{N}$ ,  $\text{rot } \mathbf{E}' = i k \mathbf{H}' + \mathbf{M}$ , wo  $\mathbf{M}, \mathbf{N}$  leicht angebbare Funktionen von  $\kappa(s), \nu(s)$  und des als bekannt anzusehenden Grundfeldes  $\{\mathbf{E}^0 \mathbf{H}^0\}$  sind. Analog wird (2) behandelt. Außerdem muß  $\{\mathbf{E}' \mathbf{H}'\}$  den Strahlungsbedingungen im Unendlichen genügen. Verf. führt nun eine Hilfsfunktion  $i k \mathbf{H}'' = i k \mathbf{H}' + \mathbf{M}$  ein, wodurch das Problem auf die Bestimmung des Feldes  $\{\mathbf{E}' \mathbf{H}''\}$  zurückgeführt wird, das eine Lösung der inhomogenen Maxwell'schen Gleichungen (in Zylinderkoordinaten!)  $\text{rot } \mathbf{H}'' = -i k \mathbf{E}' - i 4 \pi k \mathbf{J}^{ST}$ ,  $\text{rot } \mathbf{E}' = i k \mathbf{H}''$  mit  $i 4 \pi k \mathbf{J}^{ST} = \mathbf{N} + i/k \text{rot } \mathbf{M}$  ist, die den Grenz- und Strahlungsbedingungen genügt. Dieses Problem der Erregung bei vorgegebener Verteilung der Stromdichte  $\mathbf{J}^{ST}$  und vorgegebenem Wert der Tangentialkomponente von  $\mathbf{E}'$  auf  $\Sigma$  läßt sich lösen mit Hilfe von Resultaten von A. A. Samarskij und A. N. Tichonov, *Žurn. éksper. teor. fiz.* **17**, 1283—1296, 1431—1440 (1947) und nach Ja. N. Fel'd, *Osnovy teorii ščelevych antenn* (1948).

H.-J. Hoehnke.

**Achiezer (Akhiezer), N. I. and Achiezer (Akhiezer), A. N.: On the diffraction of electromagnetic waves at a circular hole in a flat screen.** *Doklady Akad. Nauk SSSR* **109**, 53—56 (1956) [Russisch].

This paper offers an application of the fact, that the integral equation for  $C(\lambda)$ ,

$$\int_0^\infty C(\lambda) J_m(\lambda r) \lambda^{m+1} d\lambda = 0 \quad (r > a),$$

$$\int_0^\infty C(\lambda) J_m(\lambda r) \lambda^{m+1} (\lambda^2 - k^2)^{-1/2} d\lambda = F(r) r^m \quad (0 < r < a),$$

where  $m \geq 0$  is integral,  $k \geq 0$   $\int_0^\infty |C(\lambda) \lambda^m|^p \lambda d\lambda < \infty$ , for any  $p > 2$ , has a solution in terms of the solution of a Fredholm integral equation of the second kind, with real symmetric kernel involving hyperbolic functions. This is essentially contained in the work of one of the authors (N. I. Achiezer, this Zbl. **56**, 100). The application is to the problem of a plane electromagnetic wave, normally incident upon a thin conducting plane screen with a circular hole. The solution is sought in terms of a Hertz potential in the form of a double integral (cf. K. Westpfahl, this Zbl. **64**, 440). The solution is not obtained in closed form, but as a series in terms of  $k^2$ , and the authors only have space to outline it. It appears mainly suitable for small values of  $k a$ .

F. V. Atkinson.

**Burštejn (Burstein), É. L. (E. L.) and L. S. Solov'ev (Soloviev): On the diffraction of a finite beam of electromagnetic waves upon a cylindrical obstacle.** *Doklady Akad. Nauk SSSR* **109**, 473—476 (1956) [Russisch].

The incident radiation has a component of the form

$$k \int_{-\pi/2 - i\infty}^{\pi/2 + i\infty} f(\beta) \cos \beta \exp(i k (x \sin \beta + z \cos \beta)) d\beta,$$

where the obstacle has its generators parallel to the  $x$ -axis. The diffracted field is given in terms of that for the case of a single normally incident wave, and is approximated by the method of steepest descent. Details of the latter calculation are not available for checking, a certain result being merely asserted. Applications are sketched to two cases in which a result for a normally incident plane wave is available, (i) the case of a plane wave reaching the open end of a plane wave guide, and (ii) the case of an infinite slit in a metallic screen.

F. V. Atkinson.

**Gorjainov (Goryainov), A. S.: Diffraction of a plane electromagnetic wave by a conducting cylinder.** *Doklady Akad. Nauk SSSR* **109**, 477—480 (1956) [Russisch].

The author uses an improvement of the stationary-phase method to obtain higher-order approximations to

$$\int \exp \left( -\frac{1}{2} i \pi v \right) \cdot \cos v \varphi \left[ H_v^{(1)} (k a) \sin v \pi \right]^{-1} dv,$$

taken along a contour parallel to the real axis. Good results are claimed for the region  $ka \geq 5$  ( $k = 2\pi/\text{wavelength}$ ,  $a = \text{radius of cylinder}$ ). *F. V. Atkinson.*

**Ratcliffe, J. A.:** Some aspects of diffraction theory and their application to the ionosphere. *Phys. Soc., Rep., Progr. Phys.* 19, 188—267 (1956).

Teil I. Anwendungen der Methoden der Fourier-Transformation und der Autokorrelation auf Beugungsprobleme. Das durch Beugung entstehende Wellenfeld kann entweder durch eine in Amplitude und Phase ortsvariable Wellenfunktion oder durch Überlagerung homogener Wellen verschiedenster Richtung, d. h. durch ein Winkelspektrum, beschrieben werden. Beide Verteilungen sind durch eine Fourier-Transformation verknüpft. Eine Reihe von Beispielen für amplituden- oder/und phasenmodulierte Schirme wird gegeben. Auch der Fresnelsche Beugungsfall wird behandelt. Die Autokorrelationsfunktion  $\varrho(\xi)$  (einer oszillierenden Funktion) ist definiert als normiertes Integral über das Produkt  $f(x) \cdot f^*(x + \xi)$ . Sie beschreibt den statistischen Zusammenhang zwischen mehr oder weniger weit entfernten Funktionswerten und kann mit Hilfe einer Fourier-Analyse berechnet werden (Wiener Khintchine-Theorem). Eine Reihe von Fällen wird diskutiert, auch drei-dimensionale Unregelmäßigkeiten, ungleichmäßige Beleuchtung und Interferenz-Anordnungen mit inkohärenten Lichtquellen. Im Fall zeitlich variabler Beugungsfelder wird einerseits die Veränderung und andererseits die mittlere Gesamtbewegung mit diesen Methoden erhalten. Teil II. Als Anwendungen auf Ionosphären-Experimente werden behandelt: Scintillation der Radio-Sterne, Fading der von der Ionosphäre reflektierten Radiowellen, Beugung an Meteorbahnen. Empirisch erhaltene Zahlenwerte der Winkelstreuung und der Skalenlängen bei Ionosphären-Reflexion sind tabellarisch (S. 253) zusammengefaßt. Ausführliche (angelsächsische) Literaturangaben.

*K. Rawer.*

**Cap, F.:** Le principe de Fermat dans les milieux absorbants non-homogènes. *Ann. Inst. Henri Poincaré* 15, 123—131 (1956).

Verf. bestimmt das Äquivalent zu dem Fermatschen Prinzip für absorbierende inhomogene Medien, indem er die Phasenfunktion komplex macht. Zweidimensionale Anwendungsbeispiele werden diskutiert.

*H. Kummel.*

● **Ross, E. (edited by):** Proceedings of the third international conference on electron microscopy, London, 1954. London: Royal Microscopical Society 1956. XVI, 705 p., 187 plates. 90 s.

Das — auch druck- und abbildungstechnisch — sehr gut ausgeführte Buch enthält eine Fülle (158) meist recht wertvoller Beiträge aus dem Gebiet der experimentellen und theoretischen Elektronenmikroskopie und ihrer Anwendungen in der Metallurgie, der Virusforschung, der Bakterienuntersuchung, der Zellstruktur, der Struktur von Fasern (Fibrillen), der Mikroanatomie von Geißeltierchen u. a. sowie über Neuentwicklungen von Elektronenmikroskopen bzw. verschiedener Einzelheiten des Zubehörs für das Arbeiten am und mit dem Elektronenmikroskop. — Für den Leserkreis dies. Zbl. sei auf die Arbeiten theoretischer Natur, die gleichfalls (wenn auch nur in geringer Zahl) in dem Buche enthalten sind, besonders hingewiesen: K. Kanaya, Y. Inone und A. Isikawa (Image Formation of Electron Microscopes from the View-Point of Wave-Optics, S. 46—60) behandeln die Bildstruktur im Elektronenmikroskop vom wellenoptischen Standpunkt, wobei sphärische und chromatische Aberration des abbildenden Systems sowie Kohärenz bzw. Inkohärenz der Streustrahlung berücksichtigt wird. — R. Uyeda (A Theory of Image Formation in the Electron Microscope, S. 61—66) behandelt das gleiche Thema. Die Streuung der Elektronen am Objekt wird als Elektronenbeugung diskutiert. Die Bildent-



stehung wird nach der Abbeschen Abbildungstheorie behandelt, wobei die Kontraste in elektronenmikroskopischen Bildern bei Hell- und Dunkelfeldbeleuchtung diskutiert werden. — M. Y. Bernard und P. Ehinger (Theory of the Three-Electrode Lens with Thick Electrodes, S. 67—71) behandeln die Drei-Elektroden-Linse mit dicker Mittelelektrode und geben eine Methode zur Berechnung der axialen Potentialverteilung einer solchen. — W. Lippert (Über einige Eigenschaften von elektrostatischen Einzellinsen, deren Achsenpotential fast das Kathodenpotential erreicht, S. 79—82) berichtet über Berechnungen an symmetrischen Einzellinsen, deren Achsenpotential fast das Kathodenpotential erreicht. — Fr. Lenz (Die Kaustikfläche bei dreizähliger Symmetrie, S. 86—87) berechnet die Kaustikfläche, wenn die Wellenfläche der abbildenden Elektronenstrahlen bildseitig eine dreizählige Unsymmetrie besitzt und diskutiert in einer anschließenden Arbeit, ob bzw. unter welchen Bedingungen die Aufnahme einer reinen Komafigur möglich ist. — H. Bremmer (Numerical Analysis of Magnetic Lens Parameters on a Theoretical Basis, S. 89—91) berichtet über die rechnerische Bestimmung von paraxialen Parametern sowie von Aberrationskoeffizienten aus numerischen Lösungen der paraxialen Abbildungsgleichungen. — G. D. Archard (Electron Optical Properties of Electrode systems of Four- and Eight-Fold Symmetry, 97—105) behandelt Elektrodensysteme vierfacher Symmetrie (gekreuzte Zylinderlinsen), berechnet deren Fokaleigenschaften sowie ein magnetisches Analogon. Auch auf Systeme achtfacher Symmetrie, ihre Elektrodenanordnung sowie ihre Wirkung bezüglich der Bildfehlerkorrektur geht Verf. näher ein. Er berichtet weiter über ein System zur Korrektur der sphärischen Aberration. — J. C. Burfoot (Third-Order Aberrations of Non-Rotationally Symmetric Imaging Systems, 105—109) gibt einen Überblick über Aberrationen dritter Ordnung bei nichtrotationssymmetrischen Abbildungssystemen.

J. Picht.

**Konrad, Maksimiljan:** Equations for the ion motion in a fixed frequency cyclotron. Periodicum math.-phys. astron., II. Ser. 11, 253—262, discussion 257—261 (1956).

Die horizontale Bewegung der Ionen im klassischen Zyklotron ist verantwortlich für die erreichbare Endenergie, deren Streuung und die horizontale Winkeldivergenz am Strahlaustritt. Als Parameter gehen der radiale Feldabfall, die azimutale Feldinhomogenität, die Form des elektrischen Feldes und die Position der Ionenquelle ein. In der Arbeit wird gezeigt, wie die interessierenden Größen, Bahnradius, Bahnmittelpunkt und Phase für den gesamten Beschleunigungsprozeß in Integralform dargestellt werden können. Die Integrale lassen sich bei geschickter Ausnutzung erlaubter Näherungen weiter auswerten.

W. Hardt.

### Relativitätstheorie:

**Durand, Émile:** Définition d'un élément de volume invariant pour un système en mouvement. C. r. Acad. Sci., Paris 243, 354—357 (1956).

Es wird eine Verallgemeinerung der aus der speziellen Relativitätstheorie bekannten Definition des invarianten Volumenelements (des Ruhvolumens) gegeben, für den Fall, daß die Gleichzeitigkeit nicht realisiert ist. Es ist, als Beispiel, ein Ausdruck für die Elektrizitätsmenge im Volumenelement eines sich bewegenden Körpers abgeleitet. Es werden auch die retardierten Potentiale der Elektrodynamik mit Hilfe des neuen Ausdrucks für das invariante Volumenelement interpretiert.

N. S. Kalitzin.

**Slowikowski, W.:** Note on the application of the Pauli ring to form the metric tensor in the general theory of relativity. Bull. Acad. Polon. Sci., Cl. III 4, 313—320 (1956).

Verf. entwickelt die geometrischen Grundbegriffe des 4-dimensionalen Raumes der allgemeinen Relativitätstheorie aus einem „metrischen  $P$ -Vektor“, dessen Komponenten Elemente des Pauli-Ringes (d. h. der 4-dimensionalen Cliffordschen Al-

gebra) sind. Dieser  $P$ -Vektor induziert zunächst einen symmetrischen Maßtensor vom hyperbolischen Typ und einen affinen Zusammenhang. Weiter erlaubt er, die kovariante Differentiation in gewissem Sinn durch eine invariante Ableitung zu ersetzen. Zum Schluß werden einige Differentialgleichungen der Physik in diesem Kalkül formuliert.

W. Barthel.

**Fokker, A. D.:** Accelerated spherical light wave clocks in chronogeometry. Nederl. Akad. Wet., Proc., Ser. B 59, 451—454 (1956).

Un miroir sphérique contenant une onde lumineuse centrée constituée, lorsqu'il est en mouvement inertiel, à la fois une horloge et un mètre isotrope naturels. L'A. montre très élégamment que cette double propriété s'étend au cas du mouvement „uniformément accéléré“, défini d'une manière convenable, et directement rapportée à celle qui est usuelle pour un point matériel. Il suit de là que la propriété s'étend au cas d'une horloge infiniment petite de ce type, soumise à une accélération quelconque.

O. Costa de Beauregard.

**Aymard, Alix:** Champs de tétrapodes. C. r. Acad. Sci., Paris 243, 885—888 (1956).

Es werden im Riemannschen Raum der allgemeinen Relativitätstheorie Vierbeine mit von Punkt zu Punkt veränderlicher Stellung betrachtet. Die Vierbeine sind orthonormal gedacht, d. h. es sollen 10 Beziehungen zwischen den 16 Feldkomponenten bestehen, so daß 6 unter diesen frei bleiben. Aus einem Variationsprinzip, wobei man, wie es üblich ist, zu der Lagrangeschen Funktion des Feldes die obigen 10 Beziehungen multipliziert mit den Lagrangeschen Faktoren hinzuhaddiert, erhält man die Feldgleichungen in Form von 6 Tensorgleichungen, welche dann durch 6 skalare oder durch 4 Vektorgleichungen (welche nicht linear unabhängig sind) ersetzt werden. Zum Schluß werden vier Identitäten abgeleitet, welche das Verschwinden der kovarianten Divergenz eines Tensors darstellen.

N. S. Kalitzin.

**Moffat, John:** Generalized Riemann spaces. Proc. Cambridge philos. Soc. 52, 623—625 (1956).

The generalization consists in introducing into an  $n$  dimensional space a complex symmetric fundamental tensor and a complex symmetric affine connection. The author announces that he has developed a generalization of Einstein's equations giving the correct equations of motion for charged particles in an electromagnetic field.

L. Infeld.

**Husain, S. I.:** On unified field theory of gravitation and electromagnetism. I. Tensor, n. Ser. 6, 132—135 (1956).

Es wird in dem metrischen Riemannschen Raum die nicht-symmetrische Übertragung  $\Gamma_{ij}^k = \left\{ \begin{smallmatrix} k \\ ij \end{smallmatrix} \right\} + \delta_i^k \varphi_j$  eingeführt, wo die Christoffelschen Symbole  $\left\{ \begin{smallmatrix} k \\ ij \end{smallmatrix} \right\}$  vom dem metrischen Grundtensor  $g_{ik}$  abgeleitet sind und die kovarianten Vektoren  $\varphi_j$  die Viererpotentiale des elektromagnetischen Feldes bedeuten. Die Feldgleichungen  $R_{kl} - \frac{1}{2} g_{kl} (g^{ij} R_{ij}) = 0$ ;  $(\sqrt{-g} F^{ks})_{,s} = 0$ ;  $F_{kl} = \varphi_{k,l} - \varphi_{l,k}$  werden von dem Variationsprinzip  $\int \sqrt{-g} (g^{kl} + F^{kl}) R_{kl} dr = 0$  abgeleitet.

J. I. Horváth.

**Lichnerowicz, A.:** Etude des équations du champ de la théorie unitaire d'Einstein. Rend. Sem. mat. fis. Milano 25, 121—133 (1956).

Für nicht notwendig symmetrische  $g_{\alpha\beta}$  und den linearen Zusammenhang  $\Gamma_{\alpha\beta}^{\rho} = L_{\alpha\beta}^{\rho} - \frac{2}{3} \delta_{\alpha}^{\rho} S_{\beta} (L_{\alpha\beta}^{\rho} \text{ symmetrisch})$  zeigt der Verf. zunächst, daß sich die Feldgleichungen der Einsteinschen einheitlichen Feldtheorie schreiben lassen:  $\partial_{\rho} g^{[\rho\beta]} = 0$ ,  $P_{\alpha\beta} = 2 (\partial_{\alpha} S_{\beta} - \partial_{\beta} S_{\alpha})/3$ . (Dabei ist  $g^{\alpha\beta} = g^{\alpha\beta} \sqrt{|g|}$  und  $P_{\alpha\beta}$  ist der Ricci-Tensor von  $L_{\alpha\beta}^{\rho}$ .) Auf einer Hyperfläche  $S$  seien als Anfangsdaten gegeben:  $S_{\alpha}$ ,  $g^{\alpha\beta}$ , deren Normalableitungen und damit die  $L_{\alpha\beta}^{\rho}$ , die sich nach früheren Ergeb-

nissen aus  $\partial_0 g_{\lambda\mu} = L_{\lambda 0}^\sigma g_{\sigma\mu} + L_{0\mu}^\sigma g_{\lambda\sigma}$  eindeutig bestimmen lassen (von gewissen Ausnahmefällen abgesehen, die hier außer Betracht bleiben). Das Cauchysche Problem führt im hier betrachteten reell-analytischen Fall auf die eindeutige Bestimmtheit einer Lösung bis auf Koordinatentransformationen. Dabei darf  $S$  keinen Kegel  $l_{\alpha\beta} dx^\alpha dx^\beta = 0$  berühren ( $l_{\alpha\beta}$  inverser Tensor zu  $l_{\alpha\beta} = g_{(\alpha\beta)}$ ). Die Ausnahmeflächen  $S$ , die in jedem Punkte diesen Kegel berühren, erscheinen als Wellenflächen der einheitlichen Feldtheorie; dies führt den Verf. dazu, den Tensor  $l_{\alpha\beta}$  als den Gravitationsanteil des einheitlichen Feldes anzusprechen, der dem Tensor  $g_{\alpha\beta}$  der allgemeinen Relativitätstheorie entspricht. — Verf. bemerkt, daß mittels der Methode von Frau Fourès eine Erweiterung auf den nichtanalytischen Fall möglich erscheint.

*D. Laugwitz.*

**Takeno, Hyôitirô:** On some spherical wave solutions of non-symmetric unified field theories. Tensor, n. Ser. 6, 90—103 (1956).

Die Feldgleichungen der Einsteinschen Feldtheorie (dies. Zbl. 50, 212) werden folgendermaßen gruppiert: Die Gleichungen  $(E_1): g_{ij;k} = 0; \Gamma_i \equiv \Gamma_{is}^s = 0; R_{ij} = 0, R_{[ij,k]} = 0$  werden als schwache, bzw. die Gleichungen  $(E_2): g_{ij;k} = 0; \Gamma_i = 0; R_{ij} = 0$  als starke Feldgleichungen bezeichnet. Ähnlicherweise werden — im Falle der Schrödingerschen Theorie (dies. Zbl. 56, 440) — die bekannten Feldgleichungen  $(S_1): g_{ij;k} = 0; \Gamma_i = 0; R_{ij} + \lambda g_{ij} = 0, R_{[ij,k]} + \lambda g_{[ij,k]} = 0$  als schwache Feldgleichungen bezeichnet. Die Feldgleichung  $(S_2): R_{ij} + \lambda g_{ij} = 0$ , welche von Schrödinger selbst behandelt wurde, wird von dem Verf. noch beigelegt und die der Einsteinschen  $(E_2)$  entsprechende starke Feldgleichung genannt. Es wird darauf hingewiesen — obwohl die Feldgleichungen der beiden Theorien vom physikalischen Standpunkte aus auf ganz anderen Wegen abgeleitet wurden —, daß sich die Einsteinschen Feldgleichungen  $(E_1)$  und  $(E_2)$  von den Schrödingerschen  $(S_1)$  und  $(S_2)$  mathematisch durch den Grenzübergang  $\lambda \rightarrow 0$  herstellen lassen. Weiterhin gibt der Verf. mit Hilfe der Lösung der verallgemeinerten Maxwellschen Gleichungen in dem kugelsymmetrischen Riemannschen Raum eine Kugelwellenlösung vom TEM (transversal-elektromagnetischen) Charakter für den fundamentalen Tensor  $g_{ij}$  an, und es läßt sich beweisen, daß  $g_{ij;k} = 0$  mit Hilfe des so angegebenen

fundamentalen Tensors  $g_{ij}$  für die Affinitäten  $\Gamma_{jk}^i$  derart aufgelöst werden kann, daß gleichzeitig auch die Gleichung  $\Gamma_i = 0$  erfüllt wird. Dann werden die Komponenten von  $R_{ij}$  berechnet, und es wird untersucht, wie weit die angegebene Lösung den dritten Gleichungen von  $(E_1)$ ,  $(E_2)$ ,  $(S_1)$  bzw.  $(S_2)$  Genüge leistet: (i) die angegebene Lösung erfüllt die Gleichung  $(S_1)$ , wenn der den  $g_{ij}$  entsprechende Riemannsche Raum einen de Sitterschen Charakter mit der skalaren Krümmung  $4\lambda$  besitzt; die strengen Gleichungen lassen sich aber nur im Falle  $\lambda = 0$  erfüllen. (ii) Die Einsteinschen Gleichungen  $(E_2)$  werden nur im Falle des Minkowskischen Raumes erfüllt, welche Lösung auch den Gleichungen  $(E_2)$  genügt. — Da die Lösungen der affinen Feldtheorien nur wenig untersucht sind, kann die vorliegende Untersuchung als sehr bemerkenswert bezeichnet werden.

*J. I. Horváth.*

**Hlavatý, Václav:** The elementary basic principles of the unified theory of relativity,  $C_4$  general case. J. rat. Mech. Analysis 5, 419—472 (1956).

In einer Reihe von Arbeiten (vgl. dies. Zbl. 57, 429—431; 66, 219) behandelt Verf. die Einsteinsche einheitliche Relativitätstheorie. Diese basiert auf einem unsymmetrischen Grundtensor  $g_{\lambda\mu}$ , wobei  $g_{(\lambda\mu)}$  die Signatur — — — + besitzt, und einem Zusammenhang  $\Gamma_{\lambda\mu}^\nu$ . Beide genügen den folgenden Gleichungen: (\*)  $\partial_\omega g_{\lambda\mu} = \Gamma_{\lambda\omega}^\alpha g_{\alpha\mu} + \Gamma_{\omega\mu}^\alpha g_{\lambda\alpha}$ ,  $\Gamma_{[\lambda\alpha]}^\alpha = 0$ ,  $R_{\mu\lambda} = \partial_{[\mu} X_{\lambda]}$ . Während Verf. in früheren Veröffentlichungen die Spezialfälle (I)  $\Gamma_{(\lambda\mu)}^\nu = \{\lambda_\mu^\nu\}$  und (II)  $\Gamma_{(\lambda\mu)}^\nu = \{\lambda_\mu^\nu\} + 2(p^\nu g_{(\lambda\mu)} - \delta_{(\lambda}^\nu p_{\mu)})$  untersucht hat (vgl. dies. Zbl. 55, 209 und 57, 430), sollen jetzt keine Beschränkungen



bestehen. Es wird sogar die dritte Gleichung (\*) durch die allgemeinere Bedingung  $(*) R_{\mu\lambda} = \partial_{[\mu} X_{\lambda]} - \varphi g_{(\lambda\mu)}$  mit einem willkürlichen Skalar  $\varphi$  ersetzt. — Der Einteilung aller Grundtensoren in drei Klassen entsprechend (vgl. dies. Zbl. 47, 210) wird im 2. Kapitel die Theorie für die dritte Klasse entwickelt. Dazu werden gegebene geometrische Größen mit dem Gravitationsfeld und dem elektromagnetischen Feld identifiziert sowie die entsprechenden Feldgleichungen aus (\*) hergeleitet. Dabei zeigt sich, daß beide Felder voneinander abhängen. Es gibt jedoch elektromagnetische Felder, die keine Gravitation erzeugen, z. B. das Feld einer ebenen Lichtwelle. Bei der Diskussion des Trägheitsgesetzes wird allerdings wieder der schiefsymmetrische Teil der Grundgleichung (\*) abgeändert (vgl. auch dies. Zbl. 55, 209 und 57, 430). — Das 3. Kapitel behandelt die entsprechenden Untersuchungen für die beiden ersten Klassen des Grundtensors. — In einem kurzen Anhang wird schließlich die Schwierigkeit, die die Wiederholung des Michelson-Morley-Versuches durch D. C. Miller brachte, vom Standpunkt der einheitlichen Relativitätstheorie diskutiert.

W. Barthel.

Mishra, R. S.: The field equations of Einstein's and Schrödinger's unified theory. Tensor, n. Ser. 6, 83—89 (1956).

Die Feldgleichungen der Einsteinschen (dies. Zbl. 50, 212), sowie der Schrödingerschen (dies. Zbl. 56, 440) affinen Feldtheorie werden mit Hilfe der Transformationen  ${}^+I'_{jk} = I'_{jk} + 2 \delta^i_j \lambda_k$ , bzw.  ${}^\circ I'_{jk} = I'_{jk} + \delta^i_j \lambda_k + \delta^i_k \lambda_j$  auf eine neue Form transformiert und eingehend untersucht. Es sei an dieser Stelle auch auf eine andere Untersuchung des Verf. (dies. Zbl. 71, 222) hingewiesen.

J. I. Horváth.

### Quantentheorie:

Cap, F.: Une interprétation causale de la théorie quantique est-elle possible? Ann. Inst. Henri Poincaré 15, 113—122 (1956).

Die Eigenwerte eines physikalischen Systems kann man durch Einführung einer nichtlinearen „quantenmechanischen Kraft“ im Rahmen einer klassischen Theorie erhalten. Daher kann man (vielleicht) die Quantentheorie durch eine klassische Theorie nichtlinearer Felder ersetzen, ohne mit dem Neumannschen Beweis der Nichtexistenz verborgener Parameter in Konflikt zu kommen.

H. Kümmel.

Bopp, Fritz: La mécanique quantique est-elle une mécanique statistique classique particulière? Ann. Inst. Henri Poincaré 15, 81—112 (1956).

Der statistische Operator  $w(x, x', t)$  läßt sich auf eine Funktion  $f(p, q, t)$  eindeutig abbilden (die mit der Wignerverteilung eng verwandt ist):

$$(f(p, q, t) = (2/\sqrt{8\pi^3 \hbar l}) \int \exp [-(i p/\hbar)(x' - x'') - [(q - x')/l]^2 - [(q - x'')/l]^2] w(x', x'', t) dx' dx'')$$

(mit einer endlichen Länge  $l$ ). Die Lösungen der Bewegungsgleichung für  $f(p, q, t)$  zerfallen in zwei Klassen: 1. Solche, die der Quantenmechanik entsprechen, also z. B. die Unschärferelation enthalten. 2. Lösungen ohne diese Eigenschaft (diese Lösungstypen gehen nie ineinander über). Die Klasse 2 ist physikalisch nicht realisierbar. Man kann dann  $f(p, q, t)$  als Beschreibung einer Gesamtheit von Korpuskeln auffassen, also den Dualismus Welle-Korpuskel vermeiden und trotzdem die Superposition der Wahrscheinlichkeitsamplituden (statt der Wahrscheinlichkeiten) bei Beugungsversuchen erhalten.

H. Kümmel.

Feyerabend, P. K.: Eine Bemerkung zum Neumannschen Beweis. Z. Phys. 145, 421—423 (1956).

J. v. Neumann hat bekanntlich die Frage untersucht, ob die Quantentheorie durch zusätzliche Größen (verborgene Parameter) zu einer deterministischen Theorie ergänzt werden kann. Er beweist, daß dies unmöglich ist. (J. v. Neumann: Mathematische Grundlagen der Quantenmechanik, dies. Zbl. 5, 91, S. 170—171). An diesem Beweis kritisiert der Verf. den folgenden Punkt: v. Neumann setzt voraus,

daß in einer deterministischen Theorie stets streuungsfreie Gesamtheiten existieren. Wie der Verf. meint, ist diese Annahme falsch, „denn“ — so argumentiert er — „der Determinismus behauptet, daß zeitlich auseinander hervorgehende Ereignisse eindeutig verknüpft sind, er sagt aber nichts aus über die Verteilung solcher Ereignisse zu einem bestimmten Zeitpunkt.“

*G. Blankenfeld.*

**Romain, Jacques:** *Théorie de l'oscillateur linéaire harmonique à l'aide de variables canoniques non hermitiennes.* Acad. roy. Belgique, Bull. Cl. Sci., V. Sér. 42, 362—367 (1956).

Es wird der harmonische Oszillator als quantenmechanisches System diskutiert, wenn  $q$  und  $p$  nicht mehr hermitesche Operatoren sind, sondern nur noch die Energie  $H$ . Das Energiespektrum besteht dann weiterhin aus äquidistanten Termen, deren Folge aber nicht bei negativen Werten abbricht und nur bis auf eine additive Konstante  $\alpha$  festgelegt ist. Erzeugungs- und Vernichtungs-Operator  $a^*$ ,  $a$  eines Schwingungsquants brauchen nicht hermitisch adjungiert zueinander zu sein. Speziell führt die Festlegung, daß  $a^*$  und  $a$  in einer Diagonaldarstellung der Energie zueinander transponiert sind, mit der Wahl  $\alpha = 1/2$  dazu, daß  $q$ ,  $p$  für positive Energiewerte hermitisch, für negative jedoch antihermitisch werden. Dieser Formalismus entspricht der Diracschen Methode der zwei Oszillatoren in der Quantentheorie der Wellenfelder (Vgl. Pauli, dies. Zbl. 60, 455). Dieser Zusammenhang wird gezeigt.

*F. Schlögl.*

**Schwebel, S. L.:** *Born approximation in a three-body scattering problem.* Phys. Review, II. Ser. 103, 814—821 (1956).

Es falle ein Teilchen der Masse  $m$  von links auf einen Kern unendlich großer Masse, in dem ein gleiches Teilchen wie das einfallende gebunden ist. Die Wechselwirkung zwischen den Teilchen und dem Kern werde durch eine Diracsche  $\delta$ -Funktion beschrieben:  $-2B\delta(x)$  ( $B =$  reelle positive Konstante), die Wechselwirkung der beiden Teilchen durch ein Potential  $V(x_1, x_2)$ . Ist die Gesamtenergie des als eindimensional aufgefaßten Systems gleich  $E$ , so lautet die zu lösende Schrödingergleichung für diese eindimensionale Dreikörperstreuung:

$\{-(\hbar^2/8\pi^2 m)[(\partial^2/\partial x_1^2) + (\partial^2/\partial x_2^2)] - 2B\delta(x_1) - 2B\delta(x_2) + V(x_1, x_2) - E\}\psi(x_0, x_2) = 0$ . Diese Gleichung wird unter geeigneten Annahmen für  $V$  exakt gelöst. Die Streuamplituden der exakten Lösung werden mit den entsprechenden verglichen, die nach der Bornschen Näherungsmethode gewonnen wurden, wobei entweder ein symmetrisches oder ein antisymmetrisches Störungsglied in Rechnung gesetzt wurde. Der Vergleich ergibt, daß die Benützung symmetrischer Störungsglieder zu bevorzugen ist, da nur dann eine Austauschstreuung auftritt, obgleich die diesbezüglichen Rechnungen komplizierter sind als für den Fall antisymmetrischer Störungsglieder.

*Th. Seixl.*

**Watanabe, Yoiti:** *Constraint in a quantum system.* Progress theor. Phys. 16, 534—536 (1956).

Die vorliegende Arbeit behandelt das Problem der Abseparation der Schwerpunktsbewegung in einem quantenmechanischen Vielkörperproblem, wie es insbesondere im Atomkern vorliegt. Es wird gezeigt, daß zur Erfüllung der Abseparation des Schwerpunkts, in der Schrödingergleichung die Operatoren  $\partial/\partial x_i$  durch die Operatoren  $\partial/\partial x_i - A^{-1} \sum_j \partial/\partial x_j$  zu ersetzen sind. Besonders bei leichten Kernen treten Abweichungen der Wellenfunktionen auf, gegenüber den unter der bisher einfachen Annahme eines festgehaltenen Schwerpunkts errechneten Wellenfunktionen.

*F. Winterberg.*

**Shibata, Takashi and Toshiei Kimura:** *Forms of relativistic dynamics referred to the new fundamental group of transformations.* J. Sci. Hiroshima Univ., Ser. A 20, 85—92 (1956).

Suite aux précédents articles des AA. Comparaison de la dynamique obtenue avec certaines dynamiques de Dirac.

*Costa de Beauregard.*

**Shimazu, Haruo:** A relativistic wave equation for a particle with two mass states of spin 1 and 0. *Progress theor. Phys.* **16**, 287—298 (1956).

L'A. construit une équation d'ondes linéaire de la forme

$$[\alpha_\mu p^\mu - \kappa] \psi(x) = 0$$

dans laquelle le système des matrices  $\alpha_\mu$  est irréductible et telle que le corpuscule représenté possède deux états de masse propre correspondant l'un au spin 1, l'autre au spin 0. La densité d'énergie est définie positive. La seconde quantification se fait par extension du formalisme utilisé ordinairement pour les particules suivant la statistique de Bose.

*G. Petiau.*

**Mac-Dowell, S. W. and J. Tiomno:** Polarization of spin one particles by nuclear scattering. *Anais Acad. Brasil. Ci.* **28**, 157—163 (1956).

Les AA. étudient la diffusion des particules de spin 1 par des noyaux de spin 0. La matrice de diffusion est obtenue par une extension de la méthode de J. V. Lepore (ce Zbl. **41**, 333) pour les particules de spin 1/2. Les sections efficaces de diffusion simple et de double diffusion sont calculées et permettent d'évaluer la polarisation par double diffusion.

*G. Petiau.*

**Aržanych (Arzhanykh), I. S.:** Representation of the meson field by retarding potentials. *Doklady Akad. Nauk SSSR* **110**, 953—956 (1956) [Russisch].

Es werden Formeln abgeleitet, die das klassische Procafeld (Spin 1-Mesonenfeld) durch seine retardierten Randwerte auf einer gegebenen Fläche ausdrücken. Es werden auch Integro-Differentialgleichungen aufgebaut, die es erlauben, die Randwertaufgaben der Klein-Gordonschen Gleichung zu lösen.

*G. Wanders.*

**Wanders, G.:** Kausale Formulierung der S-Matrixtheorie. *Fortschr. Phys.* **4**, 611—629 (1956).

Dies ist ein zusammenfassender Bericht über mehrere Arbeiten von Stueckelberg und Mitarbeitern über die S-Matrix. Er zeichnet sich durch leichte Lesbarkeit aus; einige Einzelheiten, z. B. hinsichtlich der Durchführung der Renormierung, sind weggelassen. Den breitesten Raum nehmen die Betrachtungen über Kausalität ein [siehe E. C. G. Stueckelberg und G. Wanders, *Helvet. Phys. Acta* **27**, 667 (1954), dies. Zbl. **57**, 438]. Das Ergebnis der Originalarbeit war, daß Kausalität in dem Sinne, daß einer Energieemission eine Energieabsorption vorausgegangen sein muß, nur in einer lokalen Feldtheorie für jede störungstheoretische Näherung einzeln gelten kann. Es wird hier die Vermutung zu begründen versucht, daß Lokalität der Wechselwirkung sogar eine allgemeine Voraussetzung für Kausalität (im angegebenen Sinn) ist.

*K. Symanzik.*

**Ouchi, Tadashi, Kei Senba and Minoru Yonezawa:** Theory of mass reversal in the quantized field theory. *Progress theor. Phys.* **15**, 431—444 (1956).

The invariance properties of physical systems in respect to the operation of mass reversal may provide some means of restricting the allowed types of coupling between fields. This operation is defined as follows: If (1)  $\psi(t_2, \kappa) = U(t_2, t_1, \kappa) \psi(t_1, \kappa)$ , (2)  $dU(t_2, t_1, \kappa)/dt_2 = -i H(t_2, \kappa) U(t_2, t_1, \kappa)$ ,  $dU(t_2, t_1, \kappa)/dt_1 = i U(t_2, t_1, \kappa) H(t_1, \kappa)$  are the equations of motion of a system in the interaction representation, where  $H(t, \kappa)$  is the hamiltonian and  $\psi(t, \kappa)$  indicates a solution of them and  $x$  the mass value; and if the expectation value of any physical quantity  $Q(\kappa, x)$  for the states  $\psi(t, \kappa)$  and the mass reversed state defined as  $\psi_M(t, -\kappa)$  are related by:

$$(\psi_M(t, -\kappa) Q(x, -\kappa) \psi_M(t, -\kappa)) = \pm (\psi(t, \kappa) Q(x, \kappa) \psi(t, \kappa))$$

then we have mass reversibility if also  $\psi_M(t, -\kappa)$  is a solution of equations (1) (2). The transition from the  $\psi(t, \kappa)$  state to the  $\psi_M(t, -\kappa)$  state may be obtained through a mass reversal operator  $M$  and it is shown that such an operator exists and is time independent. Its expression for a fermion field indicates that the operation does not imply a real inversion of the sign of the mass of the particle, but the change of the direction of the spin relative to the momentum of the fermion. Possible types



of transformations are looked for on the condition that the theory should remain invariant under mass reversal and the results are applied to test restrictions on the possible pion nucleon and Fermi type interaction couplings. It is found that for strong interactions the mixing of couplings with and without derivatives is forbidden.

*N. Dallaporta.*

**Bocchieri, P. e A. Loinger:** La condizione supplementare del campo di Stückelberg. *Nuovo Cimento*, X. Ser. **3**, 626—632 (1956).

**Bogoljubov (Bogoliubov), N. N. and D. V. Širkov (Shirkov):** The multiplicative renormalization group in the quantum theory of fields. *Soviet Phys., JETP* **3**, 57—64 (1956), Übersetz. von *Žurn. èksper. teor. Fiz.* **30**, 77—87 (1956).

Diese Arbeit erschien ursprünglich 1956 auf Russisch. In der Zwischenzeit ist von denselben Verff. eine andere Arbeit auf Englisch in *Nuovo Cimento* mit im wesentlichen demselben Inhalt erschienen (dies. Zbl. **70**, 444). *G. Källén.*

**Terleckij (Terletsii), Ja. P. (Ja. P.):** Relativistic repulsion effects in a scalar field and attraction effects in a vector field. *Soviet Phys., JETP* **3**, 303—305 (1956), Übersetz. von *Žurn. èksper. teor. Fiz.* **30**, 419—420 (1956).

The known effect of the existence of repulsion in a scalar field and attraction in a static vector field is discussed for a spinless particle (*Comp. J. Werle*, this Zbl. **53**, 163). *L. Infeld.*

**Ritus, V. I.: Renormalization in the equations of the new Tamm-Dancoff method.** *Soviet Phys., JETP* **3**, 805—807 (1956), Übersetz. von *Žurn. èksper. teor. Fiz.* **30**, 965—967 (1956).

This article is concerned with Dalitz-Dyson's renormalization calculation in the equations of the new Tamm-Dancoff method for scattering of a meson by a nucleon. Dalitz and Dyson have shown that we need to introduce two renormalized coupling constants into the theory in addition to the bare coupling constant in order to remove all the divergences of the scattering matrix obtained in the approximation, where only three virtual particles are taken into account and all the two-particle amplitudes containing antiparticles are omitted. Their calculations, however, contained some mistakes which have been corrected in the article under review. It was shown there that the removal of divergences is connected with only renormalized coupling constant and does not lead to any new renormalized constant.

*H. Umezawa.*

**Kiržnic, D. A.: An mass renormalization in the Tamm-Dancoff method.** *Soviet Phys., JETP* **3**, 809—812 (1956), Übersetz. von *Žurn. èksper. teor. Fiz.* **30**, 971—973 (1956).

The masses and coupling constants of interacting particles are in general different from those of bare particles. These mass and coupling shifts are due to the so called field reactions and lead us to the masses and coupling constants, e. g.  $M(m_1, g_1)$  and  $g(m_1, g_1)$ . Here  $m_1$  and  $g_1$  are the mass and coupling constant of the bare particle. It seems that the function  $M(m_1, g_1)$  can be calculated only when we introduce the cut-off energy. Knowing  $M(m_1, g_1)$  and  $g(m_1, g_1)$ ,  $m_1$  and  $g_1$  can be obtained to be functions of  $M$  and  $g$ , viz.  $m_1(M, g)$  and  $g_1(M, g)$ . In this way, we can write any transition matrix being function of  $m_1$  and  $g_1$  in terms of  $M$  and  $g$ . This is called the renormalization method. Applying this to any approximation method, the calculation method should be formulated such that the transition matrix, the mass  $M(m_1, g_1)$  and the coupling constant  $g(m_1, g_1)$  can be calculated in a same order of the approximation of the method. This is so in the perturbation calculation and not so in the Tamm-Dancoff method. Thus, the latter method has been slightly modified by Levy and Klein. The article under review gives us a prescription to remove the divergencies appearing in the original form of the Tamm-Dancoff method. This prescription is to define the mass shift  $\delta M$  so as to remove the divergencies in the Tamm-Dancoff method, and may be useful in some of practical calculations.

It is, however, not yet clear that the prescription is a consistent method, because  $\delta M$  is not a quantity which can be defined at our will;  $\delta M$  should be equal to  $(M(m_1, g_1) - m_1)$ .  
H. Umezawa.

Landau, L. D., and I. M. Chalatnikov (Khalatnikov): The gauge transformation of the Green's function for charged particles. Soviet Phys., JETP 2, 69—72 (1956), Übersetz. von Žurn. eksper. teor. Fiz. 29, 89—93 (1955).

Die Verff. studieren die Transformationseigenschaften der Greenschen Funktion  $G(x x') = \langle (\psi(x) \psi(x'))_+ \rangle$  (das Pluszeichen bedeutet hier, daß das Produkt zeitlich geordnet ist) bei einer Eichtransformation  $A_\mu \rightarrow A_\mu + \partial\varphi/\partial x_\mu$ ;  $\psi \rightarrow \psi e^{ie\varphi}$ , wo  $\varphi(x)$  eine beliebige Operatorfunktion („an arbitrary operator function“) sein soll. Ohne nähere Begründung schreiben die Verff. die Gleichung

$$G(x x') \rightarrow G_0(x x') \langle (e^{ie\varphi(x)} \cdot e^{-ie\varphi(x')})_+ \rangle$$

nieder, wobei  $G_0(x x')$  die Greensche Funktion vor der Transformation sein soll. Nach der Meinung des Ref. ist diese Manipulation nur richtig, wenn der Operator  $\varphi(x)$  mit dem Operator  $\psi$  sowohl im Punkt  $x$  als auch im Punkt  $x'$  (d. h. auch für verschiedene Zeiten in den Operatoren  $\varphi$  und  $\psi$ ) vertauschbar ist. In einer Theorie mit Wechselwirkung ist dies eine sehr starke Bedingung, und das Feld  $\varphi(x)$  ist kaum beliebig. Wenn wir aber nur diese speziellen Felder betrachten und weiter gehen, so finden wir, daß die Verff. das Feld  $\varphi$  in ebene Wellen entwickeln und Erzeugungs- und Vernichtungsoperatoren mit Hilfe von

$$\varphi = \sum_k \varphi_k = \sum_k \lambda(k^2) (a_k e^{ikx} + a_k^+ e^{-ikx})$$

eingeführen. Wir zitieren wörtlich: „We include in  $\lambda(k^2)$  a normalization factor. In view of the smallness of this factor (it contains the reciprocal volume) we shall, in what follows, leave out terms of higher power than  $\lambda^2$ “. Mit dieser Begründung entwickeln die Verff. die Exponentialfunktion und schreiben

$$\begin{aligned} \langle (e^{ie\varphi(x)} e^{-ie\varphi(x')}) \rangle &= \left\langle \left( \prod_k \left( 1 + i e \varphi_k - \frac{e^2}{2} \varphi_k^2 \right) \prod_l \left( 1 - i e \varphi_l' - \frac{e^2}{2} \varphi_l'^2 \right) \right)_+ \right\rangle \\ &= \prod_k \left( 1 - \frac{e^2}{2} \langle \varphi_k^2 \rangle - \frac{e^2}{2} \langle \varphi_k'^2 \rangle + e^2 \langle \varphi_k \varphi_k' \rangle_+ \right) \\ &= \exp \left[ -\frac{e^2}{2} \sum_k (\langle \varphi_k^2 \rangle + \langle \varphi_k'^2 \rangle - 2 \langle \varphi_k \varphi_k' \rangle_+) \right], \end{aligned}$$

wobei die letzte Umformung vermutlich eine Aufsummierung der vorigen Zeile unter Benützung derselben Näherung sein soll. Hierzu will der Ref. bemerken, daß die höheren Glieder in der Entwicklung der Exponentialfunktion zwar mehrere Faktoren des Periodizitätsvolumens im Nenner haben, aber daß auch die Zahl der Glieder mit einer Potenz des Volumens anwächst, und es ist nicht unmittelbar evident, daß die höheren Glieder vernachlässigt werden können. Wenn das Argument der Verff. richtig wäre, sollte man erwarten, daß der studierte Erwartungswert wie  $1 + O(V^{-1})$  aussehen sollte. Dies ist aber nicht der Fall, sondern die Verff. finden nach einigen Umformungen, daß das Argument der Exponentialfunktion  $i e^2 (\Delta_F(0) - \Delta_F(x x'))$  ist. Wenigstens scheint also die letzte Aufsummierung oben nicht richtig zu sein. Da der Ref. schon auf der ersten Seite der Arbeit diese zwei Sachen nicht verstehen kann, so ist es ihm leider unmöglich, den Rest der Arbeit zu besprechen.

G. Källén.

Blank, V. Z. and D. V. Shirkov: Improvement of quantum electrodynamics perturbation theory with help of the renormalization group. Nuclear Phys. 2 (1956/57), 356—370 (1956).

Dieselbe Methode, die früher von Bogoljubov und Mitarbeitern für ein Studium der sogenannten Greenschen Funktionen der Quantenelektrodynamik benützt worden ist, wird in der vorliegenden Arbeit für ein Studium der Vertexfunktion ange-

wendet. Die Methode besteht im wesentlichen in einer gemischten Anwendung der „Renormierungsgruppe“ und der Störungstheorie. Die prinzipiellen Bemerkungen, die der Ref. früher zu den Arbeiten von Bogoljubov gemacht hat (vgl. z. B. dies. Zbl. 70, 444), sind auch für die vorliegende Arbeit gültig. *G. Källén.*

**Higgs, P. W.:** Vacuum expectation values as sums over histories. *Nuovo Cimento*, X. Ser. 4, 1262—1272 (1956).

The way in which vacuum expectation values may be calculated as sum over histories is discussed. The work of Matthews and Salam [*Nuovo Cimento*, X. Ser. 2, 120 (1955)] is criticized for its vagueness about boundary conditions; quite a similar criticism was also made by Kanki, Murata, and Sunakawa [*Progress theor. Phys.* 17, 7 (1957)]. For the most part the harmonic oscillator is discussed because it is simple enough and contains the essential features of the problem. A trick which amount to the use of a complex time parameter is suggested for a Lagrangian more general than the quadratic type. The trick is simply connected with the fact that  $\lim_{t \rightarrow \infty} e^{-iHt}$  is the projection operator on the true vacuum in the Hamiltonian formalism, where  $H$  is the total Hamiltonian of the system, and  $\tau = t e^{-i\alpha}$ , ( $0 < \alpha < \pi$ ).

*K. Yamazaki.*

**Taylor, J. G.:** Quantum electrodynamics and Hilbert space theory. *Proc. Cambridge philos. Soc.* 52, 719—733 (1956).

Nach dem Vorbild einer Arbeit von Cook wird versucht, die Theorie des quantisierten Elektronwellenfeldes als eine strenge Hilbertraumtheorie zu formulieren. Die Löchertheorie wird durch die Verwendung von  $|H|$  statt dem üblichen Hamiltonoperator  $H$  eines Diracelektrons umgangen. Die Einelektronenzustände  $\varphi$  sind die Elemente des Produktraumes aus einem vierdimensionalen Raum und dem Raum der quadratisch integrierbaren Funktionen im dreidimensionalen euklidischen Raum. Die Feldoperatoren  $\Phi(\varphi)$  der Theorie gehen nur dann formal in die  $\Phi(x)$  der üblichen Quantenfeldtheorie über, wenn man im Argument auch Distributionen zuläßt. Daraus schließt der Verf., daß seine und Cooks Formulierung keine strenge Fassung der Quantentheorie der Felder sei. Nach Ansicht des Ref. hat jedoch die Wohldefiniertheit des Feldoperators in einem Punkt keine Bedeutung. Nur raumzeitliche Mittelwerte des Feldoperators brauchen definiert zu sein. *K. Baumann.*

**Nigam, B. P. and L. L. Foldy:** Representation of charge conjugation for Dirac fields. *Phys. Review*, II. Ser. 102, 1410—1412 (1956).

Darstellungen für die unitäre Transformation, welche ein Spinor-Operatorfeld in das ladungskonjugierte überführt, werden in einer Form angegeben, die keine Entwicklung des Feldes nach einem Orthogonalsystem verwendet. Die Äquivalenz verschiedener Darstellungen wird nur für den Fall bewiesen, daß die Darstellung der Wigner-Jordanschen Vertauschungsrelationen durch die Spinoren irreduzibel ist. Ein Paradoxon, die Vertauschbarkeit von Ladungskonjugation und Raumspiegelung betreffend, wird aufgeklärt. *K. Baumann.*

**Euwema, Robert N. and John A. Wheeler:** First-order vacuum polarizability from the principle of causality. *Phys. Review*, II. Ser. 103, 803—806 (1956).

This article is concerned with the application of the dispersion formula to the problem of vacuum polarization effect. The vacuum polarization coefficient  $h$  is a complex quantity; its real part  $h^{(1)}$  is related to the imaginary part  $h^{(2)}$  through the dispersion relation. Thus, knowing  $h^{(2)}$ ,  $h^{(1)}$  can be obtained from the dispersion relation. The charge renormalization can be automatically done by adjusting a constant appearing in the dispersion relation so that the polarization vanishes at low frequencies. *H. Umezawa.*

**Murota, Toshiyuki, Akira Ueda and Hajime Tanaka:** The creation of an electron pair by a fast charged particle. *Progress theor. Phys.* 16, 482—496 (1956).



Mittels der Feynman-Dyson'schen Methoden wird der Wirkungsquerschnitt für die Erzeugung eines Elektronenpaares durch ein extrem relativistisches geladenes Teilchen in einem Coulombfeld, mit und ohne Abschirmung, berechnet. Sowohl der Fall eines schweren Primärteilchens als der eines Elektrons wird betrachtet.

*K. Baumann.*

**Kiržnic (Kirzhnits), D. A.:** On the mass of the photon in quantum electrodynamics. Soviet Phys., JETP 3, 768—770 (1956), Übersetz. von Žurn. eksper. teor. Fiz. 30, 796—797 (1956).

Une difficulté liée à l'emploi d'interactions non locales est l'apparition d'une masse propre du photon. Discussion de ce problème. *O. Costa de Beauregard.*

**Joseph, James:** Multiple photon production by electron pair annihilation in flight. Phys. Review, II. Ser. 103, 481—488 (1956).

Der Wirkungsquerschnitt für die Erzeugung von  $n$  Photonen bei der Paarvernichtung wird für hohe Energie  $E$  ermittelt. Man erhält eine Reihe nach fallenden Potenzen von  $\ln(E/\varepsilon)$  und  $\ln(E/mc^2)$  für den Zerfall in Photonen mit einer Minimalenergie  $\varepsilon$ ;  $m$  ist die Elektronenmasse. Die Entwicklung wird in  $\ln(E/\varepsilon)$  bis zum ersten, in  $\ln(E/mc^2)$  bis zum zweiten Glied erhalten, für den Fall  $n = 3$  in beiden Parametern bis zum zweiten Glied. Eine ältere Rechnung von Gupta wird hierdurch vereinfacht, verallgemeinert und korrigiert.

*K. Baumann.*

**Drisko, R. M.:** Spin and polarization effects in the annihilation of triplet positronium. Phys. Review, II. Ser. 102, 1542—1544 (1956).

Die Zerfallswahrscheinlichkeit eines Positroniumatoms vorgegebener Spinrichtung in drei Lichtquanten gegebener Richtung und Polarisierung wird mitgeteilt.

*K. Baumann.*

● CERN Symposium on high energy accelerators and pion physics. Geneva, 11—23 June 1956. Proceedings. Vol. 2: Pion physics. Genève: CERN European Organization for Nuclear Research 1956. 443 p.

Die Arbeiten werden einzeln angezeigt, soweit sie für dieses Zbl. von Interesse sind.

**Borgardt, A. A.:** Meson field theory. III. Conservation of physical quantities. Soviet Phys., JETP 3, 312—314 (1956), Übersetz. von Žurn. eksper. teor. Fiz. 30, 330—333 (1956).

[Part I et II, Žurn. eksper. teor. Fiz. 24, 24 et 284 (1953).] L'A. étudie les densités de valeurs moyennes et les relations de conservation correspondantes dans le cas de la théorie matricielle du corpuscule de spin 1. L'A. utilise la représentation de rang 16 de la méthode de fusion de M. L. de Broglie et en retrouve les résultats.

*G. Petiau.*

**Solov'ev (Soloviev), V. G.:** A new model in field theory. Soviet Phys., Doklady 1, 392—395 (1957), Übersetz. von Doklady Akad. Nauk SSSR 108, 1041—1044 (1956) [Russisch].

Das in dieser Arbeit studierte Modell enthält ein pseudoskalares, neutrales Mesonenfeld in Wechselwirkung mit Nukleonen. Weiter werden zwei Grenzpulse  $\lambda_\varphi$  für das Mesonenfeld und  $\lambda_p$  für die Nukleonen als Abschneidegrößen in der Theorie benutzt. Um ein Modell zu bekommen, das mathematisch behandelt werden kann, setzt der Verf.  $\lambda_\varphi = 0$  und macht danach  $\lambda_p$  unendlich groß. Dies bedeutet, daß nur konstante Mesonenfelder eine Wechselwirkung mit den Nukleonen haben können. Die Greensche Funktion der Nukleonen in einem konstanten, äußeren Feld kann mit Hilfe eines einfachen Integrals dargestellt werden und wird dann für die Erzeugung der Greenschen Funktion des quantisierten Problems durch ein Funktionalintegral benutzt. Da in der Wechselwirkung nur konstante Felder vorkommen, ist die Funktionalintegration über alle äußeren Felder in diesem Modell eine gewöhnliche Integration über die Stärke des äußeren Feldes. Das in dieser Weise erhaltene Ergebnis für die Greensche Funktion der Nukleonen erfüllt alle Bedingungen, die aus allge-

meinen Gründen (speziell aus der positiv definiten Metrik im Hilbertraum) zu stellen sind.

*G. Källén.*

**Pekar, S. I.: Nucleomesodynamics in strong coupling. I. Approximate method. Spin-charge motion.** Soviet Phys., JETP 3, 205—215 (1956), Übersetz. von Žurn. éksp. teor. Fiz. 30, 304 (1956).

L'A. développe une méthode d'approximation et un appareil mathématique approprié rendant possible la détermination explicite des fonctions d'ondes et des valeurs propres de l'énergie pour le système constitué par un nucléon infiniment lourd en interaction forte avec le champ mésique. Les mésons sont pseudoscalaires et le couplage pseudovectoriel, le nucléon constituant une source étendue. L'hamiltonien est simplifié et en utilisant la méthode de calcul introduite la partie de la fonction d'onde correspondant au mouvement spin-charge est séparée et calculée explicitement.

*G. Petiau.*

**Fubini, S.: The structure of the nucleon.** Nuovo Cimento, X. Ser. 3, 1425—1432 (1956).

Die für die Berechnung der Elektron-Nukleon-Streuung wichtigen Strom- und Ladungsdichten in der Pionwolke des Nukleons werden im Rahmen der Chew-Low-Theorie durch die Pion-Nukleon-Streuamplituden ausgedrückt. Verf. zeigt, daß die Abschneideenergie (in Pionmassen) kleiner als 5,5 sein muß. Mit dem Wert 5,0 folgt der richtige Wert des magnetischen Moments.

*G. Höhler.*

**Hiida, Kichiro, Junjii Iwadare and Shigeru Machida: On the one pion exchange potential.** Progress theor. Phys. 15, 189—192 (1956).

Wegen ihrer größeren Reichweite werden die durch Austausch eines Pions entstehenden Nukleon-Nukleon-Kräfte für die Phänomene kleiner Energie die entscheidende Rolle spielen. Daher wurden die Strahlungskorrekturen für den Ein-Mesonen-Austausch aufgeschrieben, wozu die übliche Renormierungstechnik für die Punkt-Teile (Kroll u. Ruderman, dies. Zbl. 58, 437) und die allgemeine Formel für die renormierte Pion-Ausbreitungsfunktion nach Lehmann (dies. Zbl. 55, 214) benutzt wurden. Eine Diskussion der Ergebnisse zeigt, daß für Entfernungen größer als die halbe Pion-Compton-Wellen-Länge die Strahlungskorrekturen nur das Ersetzen der unrenormierten durch die renormierten Kopplungs-Konstanten bewirken.

*H. Rollnik.*

**Kanazawa, Akira and Masao Sugawara: Nucleon magnetic moments in ps-ps intermediate coupling meson theory.** Progress theor. Phys. 16, 95—111 (1956).

Die magnetischen Momente der Nukleonen werden nach Tomonagas Näherungsverfahren der mittleren Kopplung ausgerechnet. Ausgangspunkt ist die Hamiltonfunktion des Meson-Nukleon-Systems mit pseudoskalarer Kopplung; diese wird nach Foldy transformiert und approximiert. Im Gegensatz zu früheren Arbeiten werden die Mesonenpaartermine nicht vollständig vernachlässigt und der Nukleonenrückstoß wird nichtrelativistisch berücksichtigt. Die Eigenzustände der modifizierten Hamiltonfunktion werden nach Tomonaga näherungsweise aufgebaut, indem man annimmt, daß diese Zustände höchstens drei gebundene *S*- oder *P*-Mesonen enthalten. Die magnetischen Momente der Nukleonen werden dann ausgerechnet, mit Berücksichtigung gewisser Zwischenzustände, bestehend aus einem angeregten Nukleon und einem nicht gebundenen Meson. Das Resultat ist von der Wahl der Kopplungskonstante und des Abscheideradius praktisch unabhängig und gibt zu schwache Werte:  $\mu_p \sim 1,18$  (statt 2,79) für das Proton,  $\mu_n \sim -0,53$  (statt  $-1,91$ ) für das Neutron.

*G. Wanders.*

**Djatlov (Diatlov), I. T. and K. A. Ter-Martirosjan (Ter-Martirosian): Asymptotic meson-meson scattering theory.** Soviet Phys., JETP 3, 454—456 (1956), Übersetz. von Žurn. éksp. teor. Fiz. 30, 416—419 (1956).

Im Anschluß an eine Arbeit von Abrikosov, Galanin und Chalatnikov [Dokl. Akad. Nauk SSSR, n. Ser. 97, 793—796 (1954)] wird mittels der dort ent-

wickelten Techniken und unter einer Reihe von (für nicht zu hohe Energien wahrscheinlich zutreffenden) Annahmen die asymptotische Form der Zwei-Meson-Fortpflanzungsfunktion bei großen Impulsen bestimmt. *K. Symanzik.*

**Martin, A.:** Meson nucleon  $S$  scattering and crossing theorem. *Nuovo Cimento*, X. Ser. 4, 369—389 (1956).

Zur Berechnung der Streuphasen der  $S$ -Wellen bei der Meson-Nukleon-Streuung modifiziert der Verf. ein Verfahren von Levy (dies. Zbl. 57, 217, 66, 228) in solcher Weise, daß dem „crossing theorem“ (s. z. B. Gell-Mann und Goldberger, Proc. Fourth Rochester Conf.) Rechnung getragen wird. Die Resultate sind ziemlich verschieden von denen Levys, d. h. der Einfluß der „gekreuzten“ Terme ist erheblich. Eine Übereinstimmung mit dem Experiment wird nicht erreicht. *R. Haag.*

**Dalitz, R. H., M. K. Sundaesen and H. A. Bethe:** A singular integral equation in the theory of meson-nucleon scattering. *Proc. Cambridge philos. Soc.* 52, 251—272 (1956).

In this article are discussed the various features of the solutions of a set of singular integral equations in the Tamm-Dancoff theory of meson-nucleon scattering. The renormalization is successfully done to give us finite vertex-functions. The asymptotic behaviour of the solutions is obtained for all scattering states. It is shown that for attractive states there appears a critical coupling constant beyond which no normalizable solutions exist. *H. Umezawa.*

**Landau, L. D. and Ju. Ia. Pomeranchuk:** Radiation of gamma quanta during the collision of fast pions and nuclei. *CERN Sympos.*, Genève 11—23 juin 1956, 2, 159—166 (1956).

Die mit Strahlung verbundenen Übergänge eines energiereichen spinlosen Teilchens bei Anwesenheit einer vollständig absorbierenden Kugel werden berechnet. Betrachtet werden sowohl Übergänge nach Zuständen, in welchen das Meson von der Kugel gebeugt, als auch nach solchen, in denen es absorbiert ist. Zur Berücksichtigung der Ausdehnung des Mesons wird ein Meson-Formfaktor in die Strahlungsformel eingeführt. *K. Baumann.*

**Blokhintsev, D. I.:** On the generation of mesons in collisions of high energy nucleons. *CERN Sympos.*, Genève 11—33 juin 1956, 2, 155—158 (1956).

Based on high energy ( $700 \sim 1000$  Mev) proton collision data, the nucleon can be regarded as consisting of a „core“ ( $k$ ) with a radius  $a \simeq 2\hbar/(Mc)$  and a pion shell ( $\pi$ ) with a radius  $b \simeq \hbar/(\mu c)$ . Thus in high energy nucleon-nucleon collisions three kinds of collisions. ( $\pi - \pi$ ), ( $\pi - k$ ) and ( $k - k$ ) should be distinguished, out of which ( $\pi - \pi$ ) is probably negligible. Both ( $k - \pi$ ) and ( $k - k$ ) collisions have to be treated quantum-mechanically. (Hydrodynamical description cannot be applied because of large quantum fluctuations.) On the central  $k - k$  collision we can only say that its cross section will be  $\sim 4\pi a^2$ . The peripheral  $\pi - k$  collision can be estimated by the Williams-Weizsäcker method. (Experimental pion-nucleon cross section is used, constant value above 4.5 Bev being assumed.) The result is cut-off-dependent and fits the experimental data with the above given core radius. The cross section and rate of energy loss ( $30 \sim 40\%$ ) are naturally constant at high energies. Remarks are added that some cosmic ray experiments indicate relatively small energy loss and existence of two different kinds of bursts, in agreement with the present model. — In the Discussion Heisenberg's comment was concerned with the three simplifications which Fermi's and partly Landau's theory introduce in contrast to his own original treatment: i) completely inelastic collision, ii) instantaneous establishment of thermal equilibrium, iii) Maxwellian energy distribution. He agrees with the author that partially inelastic collisions should be accounted for; he thinks that a description by a classical wave equation (instead of hydrodynamical description) is applicable and that the shock wave treatment shows the energy spectrum  $dk/k^2$ , (instead of Maxwellian). *Z. Koba.*



**Muchtarov, A. I. und V. A. Černogorova:** Die Photoerzeugung von neutralen Mesonen unter Berücksichtigung der Spinzustände der Nukleonen. Akad. Nauk Azerbajdž. SSSR, Doklady 12, 77—80 u. azerbajdž. Zusammenfassg. 80 (1956) [Russisch].

Die Photoerzeugung von  $\pi^0$ -Mesonen wird auf Grund der skalaren und pseudo-skalaren Spielart der Mesonentheorie unter Berücksichtigung der Spinzustände des Nukleons im nichtrelativistischen Geschwindigkeitsbereich der Nukleonen nach einer von A. A. Sokolov und D. D. Ivanenko, Quantentheorie der Felder, Moskau-Leningrad, (1952) ausgearbeiteten Methode berechnet. Der Vergleich der theoretischen Winkelverteilungskurven mit den experimentellen spricht für ein skalares neutrales  $\pi$ -Meson; die Kopplungskonstante ergibt sich dabei zu  $g^2/\hbar c \sim 10$ . Die numerischen Werte der Wirkungsquerschnitte hingegen stimmen besser mit der Annahme eines pseudoskalaren neutralen  $\pi$ -Mesons. Th. Sexl.

**Nakano, Tadao:** A relativistic field theory of an extended particle. I. Progress theor. Phys. 15, 333—368 (1956).

Die Mechanik einer starren Kugel, gekennzeichnet durch ihren Impuls und die Komponenten  $\mu_{\rho\sigma}$  ihres Drehimpulses ( $\rho, \sigma = 1, 2, 3$ ) wird relativistisch verallgemeinert unter dem Gesichtspunkte, daß im Ruhssystem die  $\mu_{04}$ -Komponenten verschwinden sollen. Man erhält die allgemeine lineare Gleichung von Bhabha für Elementarteilchen mit beliebigem Spin. Für den Fall der Abwesenheit von Wechselwirkungen werden die Lösungen der Feldgleichungen aufgestellt und die Quantisierung des Feldes durchgeführt. W. Wessel.

**Ohmura (formerly Kikuta), Takashi:** A new formulation on the electromagnetic field. Progress theor. Phys. 16, 684—685 (1956).

Neben den Feldgrößen  $\mathfrak{E}$  und  $\mathfrak{H}$  und dem Viererstrom  $i, \rho$  der Maxwell'schen Theorie werden neue skalare bzw. pseudoskalare Felder  $e$  und  $h$  und ein entsprechender Viererstrom  $j, \sigma$  eingeführt, derart daß  $\text{rot } \mathfrak{H} - \partial \mathfrak{E} / \partial x_0 = i - \text{grad } e$ ,  $\text{rot } \mathfrak{E} + \partial \mathfrak{H} / \partial x_0 = j + \text{grad } h$ ,  $\text{div } \mathfrak{E} = \rho + \partial e / \partial x_0$ ,  $\text{div } \mathfrak{H} = -\sigma + \partial h / \partial x_0$ . Diese Gleichungen lassen sich mit drei vierzeiligen, quadratischen Matrizen  $\delta_i$ ,  $i = 1, 2, 3$ ,

zu  $i \left( \frac{\partial}{\partial x_0} - \sum_{i=1}^3 \delta_i \cdot \frac{\partial}{\partial x_i} \right) \Psi = \Phi$  zusammenfassen. Ein komplexes Vektorpotential

$\Phi$  läßt sich dann so zuordnen, daß  $\square \Phi = \varphi$  ist. W. Wessel.

**Ohmura, Takashi:** Stability of the electron. Progress theor. Phys. 16, 685—686 (1956).

Aus den Zusatzgrößen der vorangehenden Arbeit wird ein kohäsives Feld konstruiert, das die Elektronenladung zusammenhalten soll. W. Wessel.

## Kernphysik:

**Cap, F.:** Über einige Methoden zur Berechnung des Wirkungsquerschnittes der elastischen Nukleon-Nukleon-Streuung. II. Teil: Tensorkräfte. Fortschr. Phys. 4, 149—215 (1956).

This is a long review article on the elastic nucleon-nucleon scattering when nuclear forces are non-central (tensor force). Y. Yamaguchi.

**Saperstein, A. M. and Loyal Durand:** Boundary value treatment of nucleon-nucleon phase shifts. Phys. Review, II. Ser. 104, 1102—1113 (1956).

H. Feshbach und E. Lomon versuchten 1956 eine Darstellung der Nukleon-Nukleon-Streuung mit Hilfe der Methode der Phasenverschiebungen der einfallenden Welle in einem Energiebereich  $0 \leq E \leq 274$  MeV. Verff. zeigen zunächst, daß diese Darstellung sowohl für die  $p-p$ - als auch für die  $n-p$ -Streuung ungenügend ist und daß es ferner nicht möglich ist, auch bei Berücksichtigung aller von Feshbach und Lomon vernachlässigten Phasenverschiebungen für  $L \leq 3$  eine Übereinstimmung zwischen Experiment und Theorie zu erzielen. Es wird daher zu der Darstel-

lung der  $p-p$ -Daten auf die vom G. Breit und W. G. Bouricius entwickelte Methode zurückgegriffen, welche statt mit einer potentiellen Energie direkt mit den Übergangsbedingungen der Guth-Sexl'schen Streutheorie an der Kernoberfläche (Gleichheit der logarithmischen Ableitungen der Wellenfunktionen im Innen- und Außenraum) operiert. Es wird eine Parameterserie für  $L \leq 4$  ohne Anspruch auf Eindeutigkeit angegeben, welche die  $p-p$ -Daten in einem Energiebereich  $0 \leq E \leq 310$  MeV in befriedigender Übereinstimmung mit dem Experiment darzustellen gestattet. Die Autoren schlagen vor, diese Parameter auch für eine ladungsunabhängige Darstellung der Nukleon-Nukleon-Streuungsdaten versuchsweise zu verwenden.

*Th. Sexl.*

**Ohmura (formerly Kikuta), Takashi:** Extensions of variational methods. III. Determination of potential from phase shift function. *Progress theor. Phys.* 16, 231—243 (1956).

Die in den vorhergehenden Arbeiten (dies. Zbl. 65, 431; 71, 431) eingeführten Variationsprinzipien werden hier zur Berechnung des Potentials (in den Fällen, in welchen dieses eindeutig bestimmt ist) verwendet. Die Resultate bleiben auch für genügend rasch abfallende Potentiale mit gebundenen Zuständen gültig. Die Methode wird an Hand einiger Beispiele (Neutron-Proton-Streuung mit Zentral- und Tensorkraft) illustriert.

*M. E. Mayer.*

**Mouchasseb, Adnan:** Oscillations collectives d'une structure „en couche“ de particules. *C. r. Acad. Sci., Paris* 242, 2111—2114 (1956).

Die Methode der adiabatischen Approximation wird angewandt auf die Bewegung eines Nukleons im gemittelten langsam veränderlichen Feld der übrigen Kernteilchen. Es ergeben sich kollektive Schwingungen, deren Frequenzen mit denen des Bohrschen Tropfenmodells verglichen werden.

*K. Wildermuth.*

**Emendörfer, D.:** Zur Nukleonenbindung bei statischen Zweikörperkräften. *Ann. der Physik*, VI. F. 17, 298—316 (1956).

In der vorliegenden Arbeit wird die Bindungsenergie des Heliums unter Berücksichtigung der Zweikörperkräfte berechnet. Die Zweikörperkräfte werden dabei als Gaußpotential mit Daten aus dem Deuteronproblem angesetzt, und als Wellenfunktionen werden Linearkombinationen von Slaterdeterminanten aus Oszillator-Einteilchenfunktionen verwendet. Unter Berücksichtigung der Erhaltungssätze für den Gesamtdrehimpuls, Isobarenspin usw. erfolgt die Rechnung a) störungstheoretisch, b) nach dem Variationsprinzip. Der Einfluß der Tensorkräfte wird diskutiert.

*K. Wildermuth.*

**Hsieh, Yü-Chang and Ingram Bloch:** Single-body wave functions and two-body forces. *Phys. Review*, II. Ser. 101, 205—209 (1956).

Bereits in einer früheren Arbeit haben die Verff. einen Hamiltonoperator  $H_0$  für den Atomkern diskutiert, der sich zusammensetzt aus der kinetischen Energie und Oszillatorpotentialen als Zweikörperkräfte. In der vorliegenden Arbeit werden die zugehörigen Wellenfunktionen untersucht. Diese werden verglichen mit den Eigenfunktionen des Einteilchenmodells mit Oszillatorpotential (Hamiltonoperator  $H_s$ ). Es zeigt sich u. a., daß die Eigenfunktionen für den Grundzustand von  $H_0$  und  $H_s$  identisch sind; für die angeregten Zustände bestehen jedoch keine einfachen Relationen.

*K. Wildermuth.*

**Kerimov, B. K. and A. V. Džavadov (Dzhavadov):** Statistical theory of the atomic nucleus. III. *Soviet Phys., JETP* 3, 713—724 (1956), Übersetz. von Žurn. éksp. teor. Fis. 30, 900—914 (1956).

Es werden Berechnungen am statistischen Modell des Atomkerns durchgeführt, und zwar für den Fall gleichförmiger und nichtgleichförmiger Dichteverteilungen. Es wird dabei gezeigt, daß ein Zweikörperzentralpotential, welches neben der Spinaustauschkraft eine abstoßende gewöhnliche Kraft (Wignerkraft) enthält, zu einer Absättigung der Bindungsenergie und der Dichte führt.

*F. Winterberg.*

**Gottfried, Kurt:** Groundstate properties of nonspherical nuclei. Phys. Review, II. Ser. **103**, 1017—1031 (1956).

Es werden die Wellenfunktionen und das Termschema eines Nukleons in einem nichtsphärischen Atomkern berechnet. Durch Variation der Gesamtenergie ergibt sich, daß 1. Deformationen mit einer Symmetrieachse immer bevorzugt sind und daß 2. dieses Modell nicht in der Lage ist, die Bevorzugung positiver Quadrupolmomente zu erklären. Im Gegensatz zu früheren Rechnungen wird nicht ein ellipsoidisches Oszillatorpotential sondern ein ellipsoidisches Kastenpotential mit einer starken Spinbahnkopplung verwendet. Es werden dabei bessere Resultate über Spins und magnetische Momente erhalten als mit dem bisherigen Schalenmodell.

*F. Winterberg.*

**Marty, C.:** Les conditions d'existence des spectres de rotation nucléaires. Nuclear Phys. **1**, 85—100 (1956).

Im Rahmen des von Bohr und Mottelson entwickelten Kernmodells (unified model) wird eine störungstheoretische Methode angegeben, die es gestattet, die Rotationspektren von Atomkernen zu untersuchen, gleichgültig, ob ein rotations-symmetrischer oder ein nicht rotations-symmetrischer Kernrumpf vorliegt. Dabei stellt sich heraus, daß die Hypothesen, die Bohr und Mottelson ihrer Diskussion zugrunde legten, weder widerspruchsfrei noch sämtlich notwendig sind. Die Schwierigkeiten lassen sich vermeiden, wenn man für die an den Kernrumpf gekoppelten Außennukleonen keine durch einen bestimmten Drehimpuls und dessen Z-Komponente definierten Teilchenbahnen postuliert. Im Falle rotations-symmetrischen Kernrumpfes hängen die Rotationspektren von einer, im anderen Falle von zwei Quantenzahlen ab.

*K. Wildermuth.*

**Lüders, Gerhart:** Zu den Rotationszuständen der Atomkerne. I. Berechnung des Trägheitsmoments. Z. Naturforsch. **11a**, 617—626 (1956).

In der Theorie der Rotationsniveaus des Atomkerns liegt eine Schwierigkeit in der Berechnung der Trägheitsmomente. Die empirischen Werte sind wesentlich kleiner als die einer starren Rotation und wesentlich größer als die der wirbelfreien Strömung. In der vorliegenden Arbeit wird untersucht, ob man im Rahmen der ursprünglichen Bohr-Mottelsonschen Theorie größere Trägheitsmomente erhält, wenn man die Möglichkeit der Besetzung verschiedener energetisch benachbarter Niveaus durch die individuell behandelten Nukleonen geeignet berücksichtigt. Es ergeben sich für die Trägheitsmomente innerhalb der Gültigkeitsgrenzen der Störungsrechnung ähnliche Resultate wie nach dem Verfahren von Inglis, jedoch erhält man eine wesentlich andere Wellenfunktion für den Kern.

*K. Wildermuth.*

**Kassecker, T. und P. Urban:** Über die Berechnung von Kernmomenten nach dem Schalenmodell. Acta phys. Austr. **10**, 95—126 (1956).

Unter Berücksichtigung der Erhaltungssätze für den Gesamtdrehimpuls, Parität und Isobarenspin werden nach dem Schalenmodell die Wellenfunktionen der Kerne  $D^{15}$ ,  $N^{16}$ ,  $O^{17}$ ,  $F^{17}$  berechnet. Die mit diesen Funktionen berechneten Werte für die magnetischen Momente zeigen gute Übereinstimmung mit den experimentellen Daten, soweit diese bisher vorliegen.

*K. Wildermuth.*

**Breit, G. and M. E. Ebel:** Nucleon tunneling in  $N^{14} + N^{14}$  reactions. Phys. Review, II. Ser. **103**, 679—701 (1956).

Es wird untersucht, inwieweit der Tunneleffekt die Experimente von Reynolds und Zucker über die Reaktionen  $N^{14}(N^{14}, N^{13})N^{15}$  und  $N^{14}(N^{14}, C^{13})O^{15}$  zu erklären vermag. Es wird eine Formulierung der Theorie gegeben, in der die Bewegung der stoßenden Kerne und der Reaktionsprodukte klassisch beschrieben wird. Der Nukleonenaustausch wird durch einen Satz von Wellenfunktionen beschrieben, der sich mit der Bewegung der Kerne adiabatisch ändert. Die Tatsache, daß verschiedene  $p$ -Eigenfunktionen verschiedene Übergangsamplituden ergeben, wird berücksichtigt, fällt aber heraus, wenn man extreme  $j-j$ -Kopplung für das ausgetauschte Nukleon



annimmt. Entsprechendes gilt für Spin und Statistik der beiden stoßenden Kerne. Auch das Pauliprinzip wird für nicht vollständig gefüllte Schalen berücksichtigt. Ein Vergleich mit der klassischen Theorie der Strippingreaktionen zeigt, daß die halb-klassische Beschreibung adäquat ist. Differentieller und totaler Wirkungsquerschnitt zeigen aber eine andere Abhängigkeit von Streuwinkel und Energie als die experimentell gewonnenen Kurven. Deshalb wird vermutet, daß speziell bei niedrigen Energien ein anderer Mechanismus für die Reaktion verantwortlich ist als der hier untersuchte.

*H. A. Weidenmüller.*

**Breit, G. and M. E. Ebel:** Nucleon transfer and virtual coulomb excitation. *Phys. Review, II. Ser.* **104**, 1030—1046 (1956).

Experimente von Reynolds und Zucker über die Reaktion  $N^{11}$  ( $N^{14}$ ,  $N^{13}$ )  $N^{15}$  und  $N^{14}$  ( $N^{14}$ ,  $C^{13}$ )  $O^{15}$  werden so interpretiert, daß der Nukleonenaustausch über eine virtuelle Coulombanregung erfolgt. Dem angeregten Niveau entspricht eine Wellenfunktion des angeregten Nukleons, die eine größere Aufenthaltswahrscheinlichkeit am Orte des anregenden Kerns ergibt als die Wellenfunktion des Grundzustandes. Auf Grund dieser Vorstellung ist es wegen der großen Reichweite der Coulombkräfte möglich, den totalen Wirkungsquerschnitt der Reaktion bei kleinen Energien und den differentiellen Wirkungsquerschnitt bei kleinen Winkeln (großen Stoßparametern) größer zu machen, als es bei einer Theorie möglich ist, die den Nukleonenaustausch durch Tunneleffekt und damit durch die Kernkräfte erklärt, die von kurzer Reichweite sind. — Nach einer quantitativen Formulierung der Theorie und zahlreichen Näherungen, deren Güte diskutiert wird, zeigt ein Vergleich mit den Experimenten, daß der Prozeß für die  $N^{11} + N^{14}$ -Reaktion wahrscheinlich für alle Energien unterhalb derjenigen von Bedeutung ist, bei der die Kernoberflächen sich berühren, und daß er wahrscheinlich der einzig wesentliche Prozeß bei Energien unter 15 MeV ist.

*H. A. Weidenmüller.*

**Ui, Haruo:** General theory of deuteron induced reaction. I. ( $d, p$ ) and ( $d, n$ ) reactions. *Progress theor. Phys.* **16**, 299—319 (1956).

Durch Deuteronen eingeleitete Kernreaktionen werden formal mittels des  $T$ -Matrix-Formalismus von Kapur und Peierls beschrieben. Für eine ( $d, p$ )-Reaktion setzt sich dann das  $T$ -Matrixelement aus vier Summanden zusammen: zwei für Zwischenkernbildung in der Reihenfolge Proton-Neutron und umgekehrt, einen für Oberflächen-Stripping (das eigentliche Stripping) und einen für Volumen-Stripping (wobei sich die Proton-Endkern-Wechselwirkung nicht auf den äußeren Bereich bezieht). Handelt es sich bei der letztgenannten Wechselwirkung um unelastische Streuung, so spricht der Autor von indirektem Stripping. Der durch dieses  $T$ -Matrixelement bestimmte differentielle Wirkungsquerschnitt zeigt für niedere Energien die entsprechenden Interferenzterme, die den Stripping-Wirkungsquerschnitt wesentlich abändern. Bei hohen Energien der Zwischenkernbildung verschwinden diese Terme infolge von Niveauüberdeckung und der Stripping-Wirkungsquerschnitt überlagert sich einfach einer isotropen Winkelverteilung.

*O. Hittmair.*

**Okai, Sueji and Mitsuo Sano:** Deuteron stripping reactions and nuclear shell structure. *Progress theor. Phys.* **16**, 203—221 (1956).

Bekanntlich ist bei den Wirkungsquerschnitten von Stripping-Reaktionen die Summe über verschiedene in Frage kommende Bahndrehimpulse der absorbierten Partikel inkohärent und verschiedenen Drehimpulsen entsprechen verschiedene Maxima in der Winkelverteilung. Vom Schalenmodell aus gesehen liegt bei mehr als einem gemessenen Maximum Konfigurationsmischung vor, deren Parameter die relative Höhe der Maxima bestimmt. Dieser Parameter wird in Störungsrechnung mit Nullbereichpotential und Oszillatorwellenfunktionen bestimmt. Zusammen mit den Koeffizienten fraktionellen Ursprungs des Schalenmodells ergibt dies gute Überein-

stimmung mit dem Experiment in den Fällen  $F^{19}(d, p)F^{20}$ ,  $Mg^{25}(d, p)Mg^{26*}$  und  $Cl^{35}(d, p)Cl^{36}$ .  
O. Hittmair.

**Nagasaki, Masayuki:** Deuteron stripping and the compound nucleus. Progress theor. Phys. 16, 429—446 (1956).

Die formale Theorie der Kernreaktionen wird auf die Wechselwirkung des Kerns mit Deuteronen angewandt. Deuteron-Stripping ergibt sich als Korrektur der formalen Zwischenkernbildung, zu der nur jenes Gebiet des Konfigurationsraums beiträgt, in dem sich die Deuteronwechselwirkung mit dem Anfangskern mit jener der Reaktionsendprodukte überdeckt. Die Wellenfunktionen der genannten Paare überdecken sich aber auch mit ihren „Außer-Wechselwirkungs-Teilen“. Dies gibt Anlaß zur eigentlichen Stripping-Reaktion. Von dieser Reaktion aus gesehen ist natürlich Bildung und Zerfall des Zwischenkerns als Korrektur anzusehen. Die allgemeine Formulierung ist auch für die dem Stripping verwandten Reaktionen gültig.

O. Hittmair.

**Kraus jr., Alfred A. and J. P. Schiffer:** Angular correlation for the  $(a, b_\gamma)$ -type nuclear reaction. Phys. Review, II. Ser. 104, 1667—1669 (1956).

Die Autoren schreiben den differentiellen Wirkungsquerschnitt für eine Kernreaktion der genannten Art in allgemeiner Form an, d. h. mit möglicher Interferenz von Bahndrehimpulsen, Multipolmomenten und Zwischenzuständen. In diesem Fall geht die einzige inkohärente Summe über die möglichen Spins des Eingangskanals. Beim Spezialfall der nichtbeobachteten  $\gamma$ -Strahlung ergibt sich begreiflicherweise die geläufige Form der  $(a, b)$ -Winkelverteilung mit inkohärenter Summe über die Spins der Ausgangskanäle. Bei Nichtbeobachtung der Partikel  $b$  summieren sich die ihr entsprechenden Bahndrehimpulse inkohärent. Ist der Endzustand des  $(a, b)$ -Teils scharf bestimmt, so tritt ganz allgemein keine Paritätsmischung auf, und der Wirkungsquerschnitt kann in zwei Teile, einen für Zwischenzustände gerader und einen für Zwischenzustände ungerader Parität zerlegt werden.

O. Hittmair.

**Valk, H. S. and B. J. Malenka:** Dispersion contribution to high-energy electron-deuteron scattering. Phys. Review, II. Ser. 104, 800—804 (1956).

Verff. schätzen den Beitrag zur elastischen Streuung hochenergetischer Elektronen an Deuteronen ab, der von den virtuellen angeregten Zuständen des Deuterons herrührt. Die angeregten Zustände werden durch modifizierte ebene Wellen beschrieben. Die Korrekturen zum Wirkungsquerschnitt in der Ordnung  $(e^2/\hbar c)^3$  werden angegeben und diskutiert.

G. Höhler.

**Goldemberg, J.:** Die Änderung von  $\Gamma'_\nu(EI)/\Gamma_n$  mit der Energie. Anais Acad. Brasil. Ci. 28, 413—418, engl. Zusammenfassg. 417 (1956) [Portugiesisch].

A method is suggested for the comparison with experience of the measured transition probabilities for gamma radiation in highly excited states; one compares the theoretical ratio of gamma and neutron emission with the experimental one. In this manner unknown factors like level densities which are mainly responsible for strong disagreement with theory drop out. The significance of the method for the independent particle model of nuclei is pointed out.

Zusammenfassg. des Autors.

**Pearce, R. M.:** A numerical method for solving the two-dimensional neutron diffusion equation. J. Nuclear Energy 2, 277—285 (1956).

Konventionelle numerische Verfahren zur Lösung zweidimensionaler Differentialgleichungen werden der Eingruppen-Reaktorgleichung angepaßt. Die Methode ergibt die Neutronendichte und die radiale Flußwölbung in einer von der Anordnung der Regelstäbe oder anderen Irregularitäten unabhängigen Weise. Der Rechnungsgang ist für Tischmaschinen und elektronische Anlagen in mancher Hinsicht unterschiedlich; die Unterschiede werden diskutiert. Als Beispiel wird die Neutronendichte für einen Reaktor mit sieben asymmetrisch angeordneten Regelstäben berechnet.

W. Oldekop.

**Fong, Peter:** Statistical theory of nuclear fission. Asymmetric fission. Phys. Review, II. Ser. 102, 434—448 (1956).

Es wird eine Formel angegeben für die Wahrscheinlichkeit, daß sich die Nukleonen eines Kerns bei der Spaltung auf 2 Bruchstücke mit je  $A_1$  und  $A_2$  Nukleonen verteilen. Vorausgesetzt werden dabei eine Formel für die Dichte der Energieniveaus der Bruchstücke sowie die halb-empirische Bethe-Weizsäcker-Formel für die Kernmassen, die jedoch bezüglich der Schaleneffekte korrigiert wird; ferner gehen in die Rechnung ein die Phasenraumfaktoren für die Dichte der Translationszustände der Bruchstücke. Es zeigt sich, daß die beobachtete Verteilung der Spaltprodukte auf die einzelnen Massenzahlen sehr gut wiedergegeben wird und daß für diese gute Übereinstimmung die Berücksichtigung der Schalenstruktur wesentlich ist.

*K. Wildermuth.*

**Liebmann, G.:** Solution of some nuclear reactor problems by the resistance-network analogue method. I. One-velocity-group problems. J. Nuclear Energy 2, 213—225 (1956).

Es werden Lösungsverfahren angegeben, nach denen man das Randwertproblem der Diffusionstheorie in der Eingruppen-Näherung auf Differenzgleichungen zurückführen und diese dann nach einem Analogieverfahren mit Hilfe elektrischer Netzwerke behandeln kann. Die Schaltbilder dieser Widerstandsnetzwerke werden angegeben. Auf diese Weise werden die Kurven gleichen Neutronenflusses bestimmt, erstens für den Fall, daß die geometrische Form des Reaktorkerns und des Reflektors sowie die Flußwerte an den Grenzen vorgegeben sind, zweitens bei vorgegebenen Randbedingungen für den Neutronenstrom.

*G. Wallis.*

## Astronomie. Astrophysik. Geophysik.

● **Danjon, André, Pierre Pruvost et Jules Blache** (Directeurs): **Le ciel et la terre.** (Encyclopédie Française. Tome 3.) Paris: Librairie Larousse 1956. 452 p., 32 planches. 7450 francs.

**Warzée, J.:** Contribution au problème de Milne dans le cas gris. Acad. roy. Belgique, Bull. Cl. Sci., V. Sér. 42, 703—720 (1956).

Es handelt sich um die Milnesche Integralgleichung  $B(\tau) = \frac{1}{2} \int_0^\infty B(t) \cdot E_1(|t - \tau|) dt$ , die im Fall grauer Strahlung eine Beziehung gibt zwischen der Temperaturfunktion  $B$  und der optischen Tiefe  $\tau$ . Es wird eine Lösungsmethode entwickelt, die wesentlich genauer und doch sehr viel einfacher ist als die Methoden von Le Caine, Menzel-Sen und Kourganoff-Michard.

*H. Vogt.*

**Talwar, S. P. and J. N. Tandon:** On the radial pulsation of magnetic stars. Indian J. Phys. 30 (39), 561—564 (1956).

Chandrasekhar und Limber [Astrophys. J. 119, 10 (1954)] haben die Pulsationsfrequenz von Sternen mit permanentem Magnetfeld berechnet unter der Voraussetzung, daß das Magnetfeld an der Sternoberfläche verschwindet. — Die Theorie wird hiermit auf den Fall erweitert, daß das Feld die Oberfläche kontinuierlich durchsetzt. Auch die Frage der Stabilität magnetischer Sterne wird erwähnt.

*S. v. Hoerner.*

**Counson, J., P. Ledoux et R. Simon:** Viscosité et oscillations d'étoiles gazeuses. Bull. Soc. roy. Sci. Liège 25, 144—162 (1956).

It is shown that despite an increase of the molecular viscosity by a factor of the order of 200 with respect to previous values, when the preponderance of hydrogen is taken into account, its effects on the first few modes of radial and non-radial oscillations remain negligible, the damping times being still larger than the cosmic time-scale. Aus der Zusammenfassg. der Verff.

**Doodson, A. T.:** Tides and storm surges in a long uniform gulf. Proc. roy. Soc. London, Ser. A 237, 325—343 (1956).



Für einen halboffenen, langen Kanal mit konstantem Querschnitt wird die Gezeitenbewegung bei vorgeschriebener Gezeitschwankung am offenen Ende berechnet. Dieser Bewegung wird eine Brandung am geschlossenen Kanalende von der Form  $Se^{-(1/16)t^2}$  ( $t$  in Stunden) überlagert, die nach 10 Stunden am geschlossenen, nach 12 Stunden am offenen Ende abgeklungen ist. Um bessere Übereinstimmung mit den beobachteten Brandungsfrequenzen und Gezeitenphasen zu erzielen, müßte nach Ansicht des Verfassers selbst ein realistischeres Modell für die Gezeitenmündung, nämlich ein von der See her an Breite und Tiefe abnehmender Kanal gewählt werden.

*J. Pretsch.*

**Bhattacharyya, Bimal Krishna:** Field on the earth's surface due to a transient electromagnetic disturbance. *J. Technol.* **1**, 151—162 (1956).

Das elektrische und magnetische Feld der Induktionsströme über einer homogenen, leitfähigen Erde wird berechnet. Als Erreger dient eine Ringschleife, durch die ein zeitlich variabler Strom führt. Für die Zeitabhängigkeit dieses Stromes wird eine Sprungfunktion oder eine „Rampen-Funktion“ angenommen. Bei letzterer ist der momentane Sprung auf eine andere Strömstärke durch einen linearen Anstieg ersetzt. Mit Hilfe der Laplace-Transformation gelingt es, explizite Formeln für die Lösungen anzugeben.

*W. Kertz.*

**Mieghem, J. van:** The energy available in the atmosphere for conversion into kinetic energy. *Beitr. Phys. Atmos.* **29**, 129—142 (1956).

Dem Verf. gelingt es, quantitative Angaben über die sogenannte „verfügbare kinetische Energie“ der Atmosphäre zu machen. Die Aussagen beziehen sich alle auf ein Luftquantum, das sowohl mechanisch als auch thermodynamisch abgeschlossen ist. (D. h.: das Oberflächenintegral über Wärmestrom und Druckarbeit ist zu jeder Zeit  $= 0$ .) Weiterhin wird die Existenz eines hydrostatischen oder hydrodynamischen Gleichgewichts als Bezugzustand vorausgesetzt. Ein solches Gleichgewicht ist durch gewisse Minimaleigenschaften ausgezeichnet. Die Aussagen selbst sind für großräumige Strömungen auf der rotierenden Erde sehr wichtig.

*J. Zieryep.*

**Mieghem, Jacques van:** Réflexions sur le transport et la production du moment et de l'énergie cinétiques dans l'atmosphère et sur l'existence de circulations méridiennes moyennes. *Beitr. Phys. Atmos.* **29**, 55—82 (1956).

In der groß angelegten Arbeit des Verf. werden außer einer kritischen Sichtung neuer Veröffentlichungen (40 Literaturangaben) viele interessante eigene Resultate gegeben. Besondere Berücksichtigung finden die mittleren Meridionalzirkulationen und viele Fragen, die mit der Bilanz und dem Transport des Rotationsmomentes in diesen Strömungen zusammenhängen. Weiter folgen wichtige energetische Betrachtungen. (Z. B.: Barotrope und barokline Prozesse, Umwandlung potentieller in kinetische Energie, Produktion kinetischer Energie, Übergang von kinetischer Energie der Störströmung auf die mittlere Strömung.) Auch die geostrophische Approximation sowie die Annahme der Inkompressibilität werden untersucht.

*J. Zieryep.*

**Blinova, E. N.:** A method of solution of non-linear problem of planetary-scale atmospheric motions. *Doklady Akad. Nauk SSSR* **110**, 975—977 (1956) [Russisch].

In einer früheren Arbeit vom Verf. wurde ein Verfahren angegeben, um die hydrodynamischen Gleichungen zu langfristigen Prognosen des Druck- und Temperaturfeldes in einem mittleren Atmosphärenniveau zu verwenden. Dieses Verfahren beruhte auf der Linearisierung der Bewegungsgleichungen relativ zum West-Ost-Transport und der Linearisierung der Gleichungen für die Wärmezufuhr relativ zu einer rein zonalen Temperaturverteilung. In der vorliegenden Arbeit wird die Aufgabe langfristiger Prognosen mit Berücksichtigung der nicht linearen Glieder auf allen Troposphärenniveaus oberhalb der Bodengrenzschichten zu lösen versucht. Die Lösung wird mit Berücksichtigung der Randbedingungen in Kugelkoordinaten in

geschlossener Form gegeben. Eine numerische Prognose läßt sich dann durch schrittweise Integration gewinnen. *A. Defant.*

**Sperner, Emanuel:** Eine mathematische Analyse der Luftdruckverteilungen in großen Gebieten. Arbeitsgemeinschaft Forsch. Nordrhein-Westfalen 27, 59—77, Diskussion 79—87 (1956).

Verf. beschäftigt sich mit der Frage, wie man mit Hilfe geeigneter mathematischer Methoden aus den vorliegenden meteorologischen Meßergebnissen auf Gesetzmäßigkeiten der atmosphärischen Vorgänge schließen kann. Besonders charakteristisch ist die „Druckschar“  $p(q, \lambda, t)$ , mit  $t$  = Scharparameter. Es interessiert eine Entwicklung von  $p(q, \lambda, t)$  nach Orthogonalfunktionen  $p_i(q, \lambda)$ . Dieses Orthogonalsystem wird nun keineswegs beliebig gewählt, sondern so bestimmt, daß die Konvergenz der entstehenden Entwicklung in gewissem Sinne optimal ist. Mit andern Worten: man sucht ein solches System, das besonders gut zu der vorgelegten Druckschar „paßt“. Die mathematische Behandlung führt über ein Variationsproblem mit Nebenbedingung auf eine homogene, lineare Integralgleichung 2. Art mit symmetrischem Kern. Die Eigenfunktionen sind die oben angeführten Orthogonalfunktionen. An einem Beispiel wird die Rechnung erläutert. Man arbeitet der Einfachheit halber mit  $p(\lambda, t)$ , nach Mittelwertbildung über  $q$ . Die ersten acht (zeitunabhängigen) Eigenfunktionen werden angegeben. Sie enthalten notwendige Bedingungen für die Prognose von Luftdruckwerten. Nur die ersten fünf (zeitabhängigen) Entwicklungskoeffizienten liefern wesentliche Beiträge. Die Bearbeitung des allgemeinen Falles  $p(q, \lambda, t)$  soll in Angriff genommen werden und man sieht der ausführlichen Veröffentlichung mit großem Interesse entgegen. *J. Zierep.*

**Fujita, Shigeichi:** Ascension of a small mass of air and the changes in its state. I. Dry air. Kumamoto J. Sci., Ser. A 2, 336—350 (1956).

In einer ruhenden Atmosphäre mit konstantem (geometrischem) Temperaturgradienten studiert Verf. die Bewegungen und Zustandsänderungen von eingebetteten Luftmassen, wenn die Temperatur derselben von der der umgebenden Luft verschieden ist. Verf. berücksichtigt in einigen der behandelten Fälle den Wärmetransport von der bewegten Luft zur ruhenden Umgebung, sowie den Widerstand (proportional der Geschwindigkeit) der bewegten Luftmasse. Dadurch ergeben sich Aussagen, die über die üblichen in der Meteorologie bekannten einfachen Stabilitätskriterien der quasistatischen Vorgänge hinausgehen. *J. Zierep.*

**Banerji, S. K.:** On the motion of iso-surfaces in a fluid medium. Bull. Calcutta math. Soc. 48, 1—8 (1956).

Verf. stellt Formeln auf, die es gestatten, aus drei zeitlich aufeinander folgenden Isoflächen (z. B. Isobarenflächen), die Normalgeschwindigkeit und die Normalbeschleunigung solcher Flächen zu bestimmen. Damit kann die Weiterentwicklung einer solchen Fläche z. B. bis zur nächsten Beobachtung vorausberechnet werden. Anwendungen und Erweiterungen dieser Betrachtungen: Bewegung einer Diskontinuitätsfläche (interne Grenzfläche), Entwicklung eines Tiefs, horizontale Bewegung eines in einer kugelförmigen Seifenblase eingeschlossenen Luftquantums gegebener Anfangsgeschwindigkeit in ruhender Luft. *J. Zierep.*

**Zierep, J.:** Das Verhalten der Leewellen in der Stratosphäre. Beitr. Phys. Atmos. 29, 10—20 (1956).

Das Problem der Leewellen in der Tropo- und Stratosphäre in einer stationären Strömung über ein Bodenhindernis gegebener Form unter Berücksichtigung der Randbedingungen am Boden und an der inneren Grenzfläche zwischen beiden Schichten wird hier gelöst. In der Stratosphäre ergeben sich die Leewellen als Überlagerung zweier verschiedener Wellentypen. Der erste Typus klingt exponentiell mit  $z$  ab, der zweite zeigt ein mit  $z$  periodisches Verhalten. Dieser Typus wird eingehend diskutiert. *A. Defant.*

## Autorenregister

Besteht eine Arbeit aus mehreren Mitteilungen, so wird hinter dem Stichwort die Mitteilungsnummer mit römischen Ziffern angegeben.

- Abbassi, M. M.** (Bow girders of any shape) 411.  
**Abbi, S. S. s. S. P. Talwar** 214.  
**Abbott, M. R.** (Bores in channels) 208.  
**Abhyankar, Shreeram** (Compositum of subfields) 264.  
**Achieser, N. I.** (Approximation) 284.  
**Achiezer, A. N. s. N. I. Achiezer** 437.  
 — (Akhiezer), N. I. and A. N. Achiezer (Diffraction of electromagnetic waves) 437.  
**Ackermann, Wilhelm** (Strenge Implikation) 1.  
**Acrivos, A.** (Transient response of stagewise processes. I.) 209.  
**Aczél, J.** (Geometrische Objekte. II.) 393.  
**Ahlfors, L. s. A. Beurling** 296.  
**Aigner, A.** (Anordnungen mit der Rangkorrelation Null) 369.  
**Ajzenštāt (Eisenstadt), N. D. s. M. A. Krejnes (Kreines)** 152.  
**Akaike, Hirotugu** (Monte Carlo method) 144; (Von Neumann's Monte Carlo model) 144; (Zero-one process) 346; (Product of two  $\Gamma$ -distributed variables) 358.  
 — — s. Kameo Matusita 359.  
**Akušskij, I. Ja.** (Matrizen, die Operationen von Rechenmaschinen wiedergeben) 338; (Operationsmatrizen eines Differenzschemas) 339; (Homogene numerische Aufgabe) 339; (Auflösbarkeit der inversen Matrix) 339.  
 — — s. L. A. Ljusternik 340.  
**Akutowicz, E. J.** (Blaschke products) 291.  
**Albada, P. J. van** (Nonassociative algebras) 22.  
**Albertoni, S.** (Problema di Neumann per l'equazione  $\Delta_2 u + ku = f$ ) 313.  
**Alekseev, N. I.** (Stationäre Strömung einer inkompressiblen zähen Flüssigkeit) 419.  
**Alenicyñ, Ju. E.** (Schlichtfunctions and Bieberbach-Eilenberg functions) 73.  
**Alexander, H. G.** (edited by) (Leibniz-Clarke correspondence) 245.  
**Alexandroff, P., A. Samarskij und A. Svešnikov (A. N. Tichonov)** 246.  
**Aljančić, S.** (Summierbarkeit von Orthogonalentwicklungen) 59.  
**Allen, H. S.** (Transformations of sequence spaces) 54; (Intersection of Köthe-Toeplitz maximal matrix rings) 329.  
**Almeida Costa, A.** (Fastgruppentheorie) 254.  
**Alper, S. Ja.** (Lagrangesche Polynome im Komplexen) 66.  
**Altshiller-Court, N.** (Harmonic and polar transformations) 384.  
**Ambarcumjan, G. A.** (Momente der Verteilung eines Markovschen Prozesses) 351.  
**Amerio, L.** (Problemi di Dirichlet e di Neumann) 107.  
**Amitsur, S. A.** (Radicals of polynomial rings) 24.  
**Anderson, A. R.** (Formal analysis of normative systems) 249.  
**Andreian Cazacu, C.** (Ausschöpfbare Riemannsche Flächen) 77.  
**Andreoli, G.** (Logica del finito) 1; (Algebra dei livelli qualitensioni delle algebre di Boole) 261.  
**Andrew, E. R.** (Nuclear magnetic resonance) 225.  
**Andriankin, E. I.** (Problems concerned with a strong explosion) 425.  
**Andronov, S. A. und E. A. Leontovič** (Grenzzyklen aus nicht-großem Wirbel oder Strudel) 91.  
**Anisimov, V. V.** (Biharmonische Schwingungen in einem Generator) 145.  
**Ankeny, N. C.** (Quadratic reciprocity) 33.  
**Antosiewicz, H. A.** (Stable systems of differential equations) 96.  
**Aoki, K., E. Honma and T. Kaneko** (Natural systems of some spaces) 405.  
**ApSimon, H. G.** (Almost regular polyhedra) 386.  
**Arai, Tadashi s. Eiichi Ishiguro** 228.  
**Araki, Shōrō s. Tatsuji Kudo** 179.  
**Arčašnikov, V. P.** (Grenzgleichgewicht) 199.  
**Archbold, J. W. and N. L. Johnson** (Constructing partially balanced incomplete block designs) 366.  
**Armellini, G.** (Orbita descritta da un astro) 240.  
**Aroeste, H.** (Melting and yield strength) 415.  
**Arscott, F. M.** (Lamé polynomials) 288; (Perturbation solutions of the ellipsoidal wave equation) 306.  
**Arsove, M. G.** (Criteria for normality of families of continuous functions) 109.  
**Artobolevskij, I. I.** (Cissoid plotter for hyperbolas) 338.  
**Aržanyč (Arzhanykh), I. S.** (Representation of meson field by retarding potentials) 444.  
**Atiyah, M.** (Krull-Schmidt theorem) 181.  
**Atkinson, C. P.** (Non-linear vibratory systems) 341.  
**Atti del quinto congresso dell'Unione Matematica Italiana.** 241.  
**Aumann, G.** (Raumschlitten) 187; (Zerlegungsausrichtungen in der Integrations-theorie) 278.  
**Auslander, L.** (Locally affine spaces) 397.  
**Austin, D. G.** (Lipschitzian characterization of differentiable functions) 279.  
**Avališvili, L. E.** (Oseensche Randwertaufgabe) 201.  
**Aymard, A.** (Champs de tétrapodes) 440.



- Aymerich, G. (Campo elettromagnetico sostenuto da un guscio elicoidale) 211.
- Azbelev, N. V. and L. V. Tonkov (Error in an approximate solution of a differential equation) 145.
- Azpeitia, A. G. (I. Barrow) 246.
- Babakova, O. I. (Torsion für zweifach zusammenhängenden polygonalen Bereich) 294.
- Babenko, K. I. (Problem der Quasianalitzität) 51.
- Babič, V. M. s. L. N. Slobodckij 50.
- Backes, F. (Géométrie anallagmatique) 168.
- Backus, G. E. and S. Chandrasekhar (Cowling's theorem) 229.
- Bader, W. (Wärmespannungen) 413.
- Baer, R. (Bewegungsgruppe der Euklidischen Ebene) 155; (Noethersche Gruppen) 258.
- Bagemihl, F. and L. Gillman (Cofinality theorems) 43.
- Bagley, R. W. (Topologies on  $2^{\mathbb{N}}$ ) 277.
- Bagnald, R. A. (Cohesionless grains in fluids) 202.
- Bailey, N. T. J. (Chance of infection in chain-binomial theory) 362; (Latent and infectious periods of measles. II.) 370.
- Bajšanski, B. M. (Procédés de sommations du type d'Euler-Borel) 56.
- Bakel'man, I. Ja. und A. L. Verner (Ableitungen stetiger Funktionen) 50.
- Balescu, R. (Théorème de Poincaré) 408.
- Balliccioni, M. A. (Calcul symbolique) 318.
- Banaschewski, B. (Local connectedness of extension spaces) 177.
- Bandyopadhyay, Sh. P. (Lattice of subgroups of finite groups) 14.
- Banerji, S. K. (Iso-surfaces in a fluid medium) 458.
- Barenblatt, G. I. s. V. F. Kagan 387.
- Bari, N. K. und S. B. Stečkin (Beste Annäherungen) 57.
- Barlotti, A. ( $\{k; n\}$ -archi di un piano lineare finito) 381; ( $k$ -calotte degli spazi lineari finiti) 381.
- Barnes, E. S. (Covering of space by spheres) 36.
- Barocio, S. (Singularities of analytical differential systems) 91; (Critical points of a differential system) 92.
- Baron, R. (Hugonis de Sancto Victore, Practica geometriae) 245.
- Barratt, M. G. and J. H. C. Whitehead (Non-vanishing group of an  $(n+1)$ -ad) 180.
- Barrett, L. C. and C. R. Wylie jr. (Matrix approach to linear differential equations) 88.
- Bartholomay, A. F. (Serre group  $E_2^{p,q}$ ) 179.
- Bartholomew, D. J. (Sequential test for randomness of intervals) 361.
- Basov, V. P. (Lineare Differentialgleichungen in Umgebung eines singulären Punktes) 302.
- Bass, L. (Energy loss of fast electrons in matter) 227.
- Basu, D. (Multivariate extension of theorems related to univariate normal distribution) 343.
- Bauer, F. L. (Verfahren der abgekürzten Iteration) 141.
- Beauregard, O. Costa de s. Costa de Beauregard, O. 216.
- Beckert, H. (Dirichletsches Problem des Systems Jacobischer Gleichungen) 113.
- Bedel'baev, A. K. (Konstruktion der Ljapunovschen Funktion) 96.
- Behari, Ram s. M. K. Singal 394.
- Behnke, H. (Strukturwandel der Mathematik) 241.
- Behrbohm, H. (Eulergleichungen des Steigfluges) 187.
- Beklemiševa, L. A. (Non-linear systems of differential equations) 305.
- Belen'kij, S. Z. and G. A. Milechin (Multiple production of particles) 222.
- Belevitch, V. et F. Storrer (Calcul numérique des fonctions élémentaires) 152.
- Belinskij, P. P. (Variation der quasikonformen Abbildung) 298.
- Beljaev, S. T. and G. I. Budker (Relativistic kinetic equation) 229.
- Bellman, R. (Trinomial equations) 53.
- and G. Milton Wing (Hydrodynamical stability and Poincaré-Lyapunov theory. I.) 420.
- Benedicty, M. (Piani grafici) 154.
- Benfratello, G. (Transitori stabili in sistemi idraulici) 421.
- Benton, G. S. (Effect of earth's rotation on laminar flow in pipes) 421.
- Berezanskij, Ju. M. (Bochner's theorem on eigenfunctions expansions) 312.
- Berezin, F. A. und I. M. Gel'fand (Kugelfunktionen auf Riemannschen Mannigfaltigkeiten) 17.
- Bergman, St. (Boundary-value problems of linear partial differential equations) 106.
- Berkson, J. (Estimation by least squares) 361.
- Berman, A. (Rotor blade analysis) 410.
- Bernard, M.-Y. et J. Hue (Aberrations géométriques dans les lentilles) 212.
- Bernhard, H. A. (Primitive  $k$ -nondeficients) 266.
- Bernstein, B. (Ideal gas flows) 203.
- Berra, A. E. Sagastume s. Sagastume Berra, A. E. 11.
- Berriman, A. E. (Babylonian quadratic equation) 243.
- Bers, L. (Pseudoanalytic functions) 77; (Formal powers and power series) 298.
- Berstein, I. (Théorème de F. J. Dyson) 185.
- Bertolini, F. (Problema di Poisson) 314.
- Beth, E. W. and A. Tarski (Equilaterality) 155.
- Bethe, H. A. s. R. H. Dalitz 450.
- Betz, A. (Zirkulationsverteilung um eng stehende Schaufeln von Strömungsgittern) 422.
- Beurling, A. and L. Ahlfors (Boundary correspondence under quasiconformal mappings) 296.
- Bharucha-Reid, A. T. (Random elements in Orlicz spaces) 349.
- Bhattacharyya, B. K. (Field on the earth's surface) 457.
- R. N. (Waves produced by a pressure system) 427.
- Bhonsle, B. R. (Theorems of operational calculus) 318.
- — and C. B. L. Varma (Integrals involving Legendre function) 288.
- Biggiogero, Giuseppina Masotti s. Masotti Biggiogero, Giuseppina 177.

- Bing, K. (Truth-functional formulas) 1.
- Bishop, R. E. D. and D. C. Johnson (Vibration analysis tables) 188.
- s. D. C. Johnson 409.
- Blache, Jules s. André Danjon 456.
- Blanc-Lapierre, A. and A. Torrat (Statistical mechanics and probability theory) 430.
- Bland, D. R. (Elastoplastic thick-walled tubes) 193.
- Blank, V. Z. and D. V. Shirkov (Quantum electrodynamics perturbation theory) 446.
- Blanuša, D. (Identités algébriques) 6.
- Blaschke, W. (Affinegeometrie der Eilininien) 166.
- Blatt, J. M. s. M. R. Schafroth 231.
- Blenk, H. (herausgegeben von) (Jahrbuch 1955 der WGL) 420.
- Blij, F. van der (Positive matrices) 253.
- Blinova, E. N. (Planetary-scale atmospheric motions) 457.
- Blitzer, L., M. Weisfeld and A. D. Wheelon (Satellite's orbit) 239.
- Blumenfeld, V. N. (Limit distribution for stochastic differential equations) 350.
- Bloch, Ingram s. Yü-Chang Hsieh 452.
- Block, M. M. (Phase-space integrals for multiparticle systems) 222.
- Blokhintsev, D. I. (Generation of mesons in collisions of high energy nucleons) 450.
- Blum, J. R. (Normal distribution) 343.
- Boas jr., R. P. (Interference phenomena for entire functions) 74.
- Bocchieri, P. e A. Loinger (Condizione supplementare del campo di Stückelberg) 445.
- Boccioni, D. (Q-pseudogruppi complementarizzabili) 12.
- Bochner, S. (Gamma factors in functional equations) 68; (Curvature and Betti numbers in vector bundles) 173.
- Bogolubov, N. N. and D. V. Shirkov (Multiplicative renormalization group) 445.
- Boigelot, A. M. et H. G. Garnir (Équation de la diffusion) 104.
- Bojanić, R. (Uniform convergence of Fourier series) 61; (Formation des équations aux dérivées partielles) 308.
- Boley, B. A. (Thin-ring analysis) 189.
- and I. S. Tolins (Stresses and deflections of rectangular beams) 411.
- Boll, M. (Tables numériques) 341.
- Bolton, H. C. and H. I. Scoins (Eigenvalues of differential equations) 146.
- Bonnor, W. B. (Formation of nebulae) 216.
- Bonsall, F. F. and G. E. H. Reuter (Fixed-point theorem for transition operators) 328.
- Bopp, F. (Mécanique quantique) 442.
- Bordewijk, J. L. (Interreciprocity applied to electrical networks) 432.
- Borgardt, A. A. (Meson field theory. III.) 448.
- Borůvka, O. (Transformation des intégrales des équations différentielles linéaires ordinaires) 89.
- Borwein, D. (Riesz summability) 282.
- Bottema, O. (Shylock game) 342; (Inequalities in the geometries of spheres and of lines) 387.
- Bouligand, G. (Équations aux dérivées partielles) 100; (Problème variationnel) 316.
- Bowie, O. L. (Infinite plate containing radial cracks) 189.
- Brachman, Malcolm K. s. J. Ross Macdonald 319.
- Braconnier, J. (Analyse harmonique dans les groupes abéliens. II.) 327.
- Bradt, R. N. and S. Karlin (Dichotomous experiments) 361.
- Brahana, T. R. (Products of quasi-complexes) 405.
- Brauer, W. und W. Klose (Oberflächeneffekt der Sekundäremission) 233.
- Brauner, H. (Projektion mittels Sehnen einer Raumkurve) 158; (Durch die Sehnen einer Raumkurve vermittelte Abbildung) 159.
- Brebner, Lilia W. s. Sheila Macintyre 241.
- Breit, G. and M. E. Ebel (Nucleon tunneling in  $N^{14} + N^{14}$  reactions) 453; (Nucleon transfer and virtual Coulomb excitation) 454.
- Brelot, M. (Convergence des potentiels) 109; (Problème de Dirichlet) 314.
- Britan, B. U. (Differentialgeometrie der Geradenkongruenzen) 394.
- Brodskij, M. S. (Matrixfunktionen linearer Operatoren) 134.
- Bromberg, E. (Non-linear bending of a circular plate) 414.
- Brousse, P. (Problème singulier à un paramètre) 107.
- Brout, R. (Statistical mechanics of irreversible processes. VII.) 211.
- Browder, F. E. (Eigenfunction expansions for differential operators. II.) 333.
- Brunk, H. D., G. M. Ewing and W. R. Utz (Helly theorems) 52.
- Bruyn, J. J. van Oosterwijk s. Oosterwijk Bruyn, J. J. van 372.
- Budak, B. M. (Straight line method for boundary problems) 148; (Methode der Geraden für Randwertaufgaben) 149.
- Budini, P. and L. Taffara (Relativistic particle in a polarizable medium. I.) 227.
- Budker, G. I. s. S. T. Beljaev 229.
- Buquet, A. (Théorème de Morrell-Weil) 269.
- Burdina, V. I. (Zyklen komplexer Mannigfaltigkeiten) 184.
- Burger, E. (Stability of economic systems) 374.
- Burgess, C. E. (Separation properties and  $n$ -indecomposable continua) 404.
- Burniat, P. (Surfaces irrégulières à système canonique dégénéré) 162.
- Burštejn, É. L. and L. S. Solov'ev (Diffraction of a finite beam of electromagnetic waves) 437.
- Burton, L. P. (Critical solutions of an ordinary differential system) 87.
- Butzer, P. L. (Théorie des demi-groupes) 132.
- Bykov, Ja. V. (Characteristic vectors of non-linear operators) 331.
- Cafiero, F. (Misure relative) 279.
- Calderón, A. P. and A. Zygmund (Singular integrals)

- 115; (Algebras of certain singular operators) 116.
- Callaway, J. (Electronic energy bands in potassium) 232.
- Campbell, R. (Moyennes de Césaro d'ordre entier) 60.
- Candlin, D. J. (Sums over trajectories) 218.
- Cap, F. (Principe de Fermat) 438; (Interprétation causale de la théorie quantique) 442; (Wirkungsquerschnitte der elastischen Nukleon-Nukleon-Streuung. II.) 451.
- Caprioli, L. (Onde e. m. di tipo trasversale) 211.
- Carini, G. (Equazioni della magneto-idrodinamica) 213.
- Carlitz, L. (Class number formulas) 28; (Certain equations in a finite field) 33; (Elliptic functions) 33; (Gauss' sum) 266; (Gauss' „Serierum singularium“) 266; (Theorem of Stickelberger) 266; (Weighted quadratic partitions over  $GF[q, x]$ ) 267.
- and J. H. Hodges (Distribution of matrices in a finite field) 9.
- Carrier, G. F. and R. C. di Prima (Torsional oscillation of a solid sphere) 420.
- Cartier, P. (Formule de Hausdorff) 16.
- Casesnoves, Dario Maravall s. Maravall Casesnoves, Dario 387.
- Cassina, U. (Postulato quinto di Euclide) 245.
- Castoldi, L. (Distribuzione dei tempi di estinzione nelle discendenze biologiche) 370.
- Cazacu, Cabiria Andreian s. Andreian Cazacu, Cabiria 77.
- Cecconi, J. (Convergenza in variazione e in area) 49; (Disuguaglianza di Cavalieri) 49.
- Čečík (Chechik), V. A. (Singular differential equations) 146.
- Cellitti, C. (Sistemi di rappresentanti di classi di forme quadratiche binarie) 272.
- Čelomej (Chelomey), V. N. (Stability of elastic systems) 198.
- Čencov, N. N. (Convergence faible des processus stochastiques) 348.
- Centro Internazionale Matematico Estivo (Geometria proiettivo-differenziale) 166; (Teorie non linearizzate in elasticità) 418.
- CERN Symposium on high energy accelerators and pion physics (Proceedings. Vol. 2) 448.
- Černogorova, V. A. s. A. I. Muchtarov 451.
- Čerskij, Ju. I. s. F. D. Gachov 114.
- Čhačatryan, I. O. s. M. M. Džrbašjan 291.
- Chakravarti, I. M. (Fractional replication in factorial designs) 368.
- Chalatnikov, I. M. s. L. D. Landau 446.
- Chaililov, Z. I. (Filtrationsaufgabe für verdampftes Naphthal) 428.
- Chalk, J. H. H. (Pell equation) 37; (Rational approximations. II.) 39.
- Chan Chen Gon (Khan Khen Gon) (Topological spaces) 177.
- Chandra Das, S. (Elastic distortion of cylindrical composite bars) 413.
- Chandrasekhar, S. (Equations of hydromagnetics) 229.
- s. G. E. Backus 229.
- Chang, Chen-Chung s. Alfred Tarski 2.
- K. K. N. (Periodic-field beam focusing) 212.
- Chao, Chi-Chang (Closed-form summation of Fourier series) 62.
- Chapman, D. G. (Parameters of a truncated gamma distribution) 362.
- Charlamov, R. V. (Motion of a heavy solid body in a fluid) 200.
- Chassan, J. B. (Application of estimation theory to determinantal inequalities) 7.
- Châtelet, Albert s. Faculté des Sciences de Paris 251, 255.
- Chatterjee, P. N. (Footings having variable moments of inertia) 188.
- Chen, Yung-Hoo s. Min-Teh Cheng 48.
- Cheney, H. B. and K. S. Kretschmer (Resource allocation for economic development) 374.
- Cheng, Min-Teh and Yung-Hoo Chen (Fractional integrals of functions) 48.
- Chernoff, H. (Large-sample theory) 357.
- and H. Rubin (Location of a discontinuity in density) 363.
- Cherubino, S. (Equazione della teorie della vibrazioni) 252; (Disuguaglianza in matrici) 252.
- Chew, G. F. and F. E. Low ( $p$ -wave pion-nucleon interaction) 221; (Photomeson production) 221.
- Chilver, A. H. (Discontinuities in structural stability problems) 409; (Buckling of a simple portal frame) 410.
- Chisnall, G. A. (Chebyshev-Everett interpolation formula) 152.
- Chow, Tse-Sun (Initial value problem for flow of a viscous fluid) 201.
- Chung, K. L. and C. Derman (Non-recurrent random walks) 353.
- Cicala, P. (Problemi di volo ottimo) 187.
- Ciliberto, C. (Equazioni quasi-lineari) 104; (Problemi al contorno per le equazioni paraboliche) 104; (Equazione di tipo iperbolico in due variabili) 308.
- Cissell, Helen s. Robert Cissell 371.
- Robert and Helen Cissell (Mathematics of finance) 371.
- Clagett, M. („Liber de motu“ of Gerard of Brussels) 245.
- Clough, R. W. s. M. J. Turner 410.
- Clunie, J. (Integral functions) 292.
- Cohen, E. (Finite Goldbach problem) 34.
- I. B. (Galileo's rejection of velocity changing) 245.
- Cohen, L. W. (Non-archimedian measure) 122.
- Collingwood, E. F. (Theorem on prime ends) 76.
- Conn, G. K. T. and E. E. Crane (Method of dimensions) 186.
- Consiglio, A. (Equazioni differenziali di tipo normale) 87.
- Conti, R. (Prolungabilità delle soluzioni di equazioni differenziali ordinarie) 304.
- Cooke, J. C. (Bessel and Legendre functions) 65.
- Corinaldesi, E. and S. Zienau (Momentum derivative) 216.
- Corput, J. G. van der (Théorème des nombres premiers) 271.
- Corson, H. H. (Systems of equations) 32.
- Costa, A. Almeida s. Almeida Costa, A. 254.
- Newton Corneiro Affonso da (Philosophie der Mathematik)



- 247; (Sätze über Teilbarkeit) 268.
- Costa de Beauregard, O. (Covariance relativiste. II.) 216.
- Cotlar, M. (Algebraische Maßtheorie) 127.
- Cotte, M. (Transport de chaleur) 431.
- Cotter, B. A. s. J. A. Seiler 417.
- Couffignal, L. (Systèmes d'équations linéaires) 138.
- Counson, J., P. Ledoux et R. Simon (Viscosité et oscillations d'étoiles gazeuses) 456.
- Courant, R. and P. D. Lax (Discontinuities in wave motion) 308.
- Court, N. A. (Anticomplementary tetrahedron) 385; (Cercles cosphériques) 386.
- Cox, D. R. (Quick tests) 360; (Weighted randomization) 366.
- Craig, H. V. (Extensors partial differential equations) 306.
- Crane, E. E. s. G. K. T. Conn 186.
- Crum, M. M. (Schlicht functions) 73.
- Császár, Á. (Répartition normale de probabilités) 343.
- Csibi, S. (De la Vallée Poussin's approximation theorem) 284.
- Cuesta, N. (Deduktive Wissenschaft) 1; (Denjoy'sche Ordinatrizen) 42.
- Čunichin (Chunikhin), S. A. ( $\pi$ -factorization of finite groups) 14.
- Cunningham, W. J. s. P. J. Wangersky 370.
- Curtis, C. W. (Rings of endomorphisms) 24.
- Dahler, John S. s. Joseph O. Hirschfelder 187.
- Dalitz, R. H., M. K. Sundaresen and H. A. Bethe (Integral equation in meson-nucleon scattering) 450.
- Daltry, C. T. (Self-education by children in mathematics) 242.
- Daniljuk, I. I. (Quasiharmonische Funktionen auf Flächen) 298.
- Danjon, A., P. Pruvost et J. Blache (Directeurs) (Le ciel et la terre) 456.
- Dantzig, G. B., L. R. Ford jr. and D. R. Fulkerson (Primal-dual algorithm for linear programs) 377.
- and D. R. Fulkerson (Max-flow min-cut theorem of networks) 378.
- Dantzig, G. B. and A. J. Hoffman (Dilworth's theorem) 378.
- Darmois, G. (E. Borel) 246.
- Das, S. C. (Numerical evaluation of integrals. II.) 151.
- Sisir Chandra s. Chandra Das, Sisir 413.
- Daubert, André s. Julien Kravtchenko 208.
- Davenport, H. (Indefinite quadratic forms) 272; (Recouvrement de l'espace par des sphères) 273.
- David, F. N. (Wilcoxon's and allied tests) 359.
- H. A. (Revised upper percentage points) 362.
- Davidenko, D. F. (Difference method in solving Laplace's equation) 148.
- Davies, R. O. (Subsets of analytic sets) 279.
- Davin, M. (Vibration forcée d'un sol stratifié) 198; 199.
- Davis, P. and P. Rabinowitz (Monte Carlo experiments) 144.
- Davydov, N. A. (Umkehrung des Abelschen Theorems) 282.
- Dean, R. A. (Completely free lattices) 21.
- Deaux, R. (Ellipses tritangentes à l'hypocycloïde de Steiner) 384; (Trièdres) 384; (Premier point de Lemoine) 385.
- Debreu, G. (Market equilibrium) 374.
- Decuyper, M. (Couples de surfaces) 392.
- Dedò, M. (Gruppi continui di trasformazioni di de Jonquières) 161.
- Dekanosidze, E. N. (Zylinderfunktionen) 154.
- Delange, H. (Théorème d'Erdős et Kac) 35; (Distribution des entiers) 275; (Distribution des valeurs des fonctions arithmétiques) 275; (Théorème de Cauchy) 290.
- Demidovič, B. P. (Beschränkte Lösungen eines nicht-linearen Systems von gewöhnlichen Differentialgleichungen) 93.
- Derman, C. s. K. L. Chung 353.
- Cyrus (Nonrecurrent random walks) 353; (Stochastic approximation) 364.
- Derwidué, L. (Question de stabilité) 8.
- Descombes, R. (Répartition des sommets d'une ligne polygonale) 38.
- Devidé, V. (Arithmetisches und geometrisches Mittel) 6.
- Dickinson, D. J., H. O. Pollak and G. H. Wannier (Polynomials orthogonal over a denumerable set) 66.
- Dieudonné, J. (Groupes de Lie. V.) 262.
- Dimmick, E. L. (Symbolic logic) 1.
- Djatlov, I. T. and K. A. Ter-Martirosjan (Asymptotic meson-meson scattering theory) 449.
- Djerasimović, B. (Kettenbruchentwicklung quadratischer Irrationalzahlen) 39.
- Dnestrovskij, Ju. N. (Characteristic numbers of electromagnetic cavities) 436.
- Dolbeault, P. (Formes différentielles sur une variété analytique complexe. I.) 406.
- Domb, C. and M. E. Fisher (Iterative processes and functional equations) 334.
- Dombrovskij, G. A. (Subsonic flow past a lattice) 423.
- Dominguez, A. González s. González Domínguez, A. 319.
- Dommm, U. (Winkelstraßen von geringster Instabilität) 420; (Turbulenz-Entstehung) 206.
- Doob, J. L. (Brownian motion and potential theory) 431.
- Doodson, A. T. (Tides and storm surges) 456.
- Doornbos, R. and H. J. Prins (Slippage tests for a set of gamma-variables) 361.
- Douglas, A. S. (Sturm-Liouville equation) 335.
- jr., J. (Linear parabolic and hyperbolic differential equations) 147.
- Dressel, F. G. and J. J. Gergen (Riemann mapping theorem) 297.
- Drisko, R. M. (Annihilation of triplet positronium) 448.
- Drucker, D. C. (Uniqueness in plasticity) 192.
- Dubnov, Ja. S. und A. M. Lopšic (V. F. Kagan) 246.
- Dubois, P. (Régimes de retraite par répartition. III. Errata ad I. et II.) 373.
- Dubreil, Paul s. Faculté des Sciences de Paris 251, 255.
- Duff, G. F. D. (Boundary value problems for quasi-linear elliptic equation) 108; (Quasi-linear elliptic equation) 312.
- Duffin, R. J. (Analytic conti-

- nuation in elasticity) 189; (Infinite programs) 376.  
 Dufresne, P. (Problèmes de dépouillements) 342.  
 Dugué, D. (Convergence pres- que) 348.  
 Duncan, R. A. (Lunar varia- tions in the ionosphere) 434.  
 Durand, D. (Matrix inver- sion) 358.  
 — Émile (Équations fonda- mentales d'un électromagné- tisme) 431; (Équations de l'électromagnétisme) 432; (Élément de volume in- variant pour un système en mouvement) 439.  
 — Loyal s. A. M. Saperstein 451.  
 Dvoretzky, A. (Stochastic ap- proximation) 347.  
 Dwinger, Ph. (Direct products in modular lattices) 22.  
 — — and J. de Groot (Axioms of Baer and Kurosh) 22.  
 Dyck, M. (Goethe's views on pure mathematics) 246.  
 Dye, H. A. and R. S. Phillips (Groups of positive opera- tors) 326.  
 Džavadvov, A. V. s. B. K. Keri- mov 452.  
 Džjadyk, V. K. (Funktionen, die einer Bedingung Lip  $\alpha$  genügen) 58; (Fortsetzung von Funktionen) 58.  
 Džrbašan, M. M. (Asympto- tic approximation by inte- gral functions) 291.  
 — — — and I. O. Chačatryan (Completeness of a system of  $\{z_n^2\}$  functions) 291.  
**E**asterfield, T. E. (Characteris- tic roots of a matrix) 251.  
 Ebel, M. E. s. G. Breit 453, 454.  
 Edge, W. L. (Conics and ortho- gonal projectivities in a finite plane) 381.  
 Ehrenpreis, L. (Theory of distributions) 130; (Problems of division. III.) 328.  
 Ehrenreich, H. and A. W. Overhauser (Scattering of holes by phonons in germa- nium) 235; (Lattice-scatter- ing mobility of holes in ger- manium) 235.  
 Ehresmann, Ch. (Travaux de M. A. Liehnérowicz) 246.  
 Ehrlich, G. (Continuous geo- metry) 154.  
 Einstein, A. (Lettres à M. Solovine) 246.  
 Eirich, F. R. (edited by) (Rheo- logy. I.) 194.  
 Éjdel'man, S. D. (Eigenschaf- ten parabolischer Systeme) 309.  
 El Makarem, H. H. A. s. Makarem, H. H. A. El 54.  
 Eleonskij, V. M. s. P. S. Zyr- janov 234.  
 Elfving, G. (Selection of non- repeatable observations) 363.  
 Elliott, R. J. (Neutron scatter- ing by conduction electrons in a metal) 237.  
 Ellis, D. (Boolean functions. II.) 262.  
 — J. W. (Duality in products of groups) 260.  
 Ellison, M. A. (Sun and its influence) 240.  
 Elwert, G. (Beobachtung ra- dialsymmetrischer Radio- quellen. II.) 211.  
 Emendörfer, D. (Nukleonen- bindung bei Zweikörperkräf- ten) 452.  
 — — —, K.-H. Höcker und M. Ritzi (Kritische Größe eines homogenen Reaktors) 226.  
 Enatsu, H. (Relativistic quan- tum mechanics) 223.  
 Engelking, R. (Limite topologi- que inférieure) 277.  
 Epstein, B. (Coefficients of capacitance of regions) 110.  
 — L. F. and N. E. French (Improving the convergence of series) 338.  
 Erdélyi, A. (Asymptotic re- presentations of Fourier inte- grals) 117; (Asymptotic ex- pansions of Fourier inte- grals) 117.  
 Erdős, P. (Perfect and multiply perfect numbers) 275.  
 — — — and G. Fodor (Set theory. V.) 41.  
 — — — and T. Kövári (Maximum modulus of entire functions) 74.  
 Ergin, E. I. (Transient response of a nonlinear system) 337.  
 Ericksen, J. L. (Speed in recti- linear motion of non-New- tonian fluids) 418.  
 Errera, A. (Théorème fonda- mental des nombres pre- miers) 271.  
 Erugin, N. P. (Implizite Funk- tionen) 51; (Methode von Lappo-Danilevskij) 92.  
 Éskin, G. I. (Minimum problem in space  $L$ ) 330.  
 Eskinazi, S. and Hsuan Yeh (Turbulent flows in a curved channel) 426.  
 Eubanks, R. A. and E. Stern- berg (Boussinesq-Papkovich stress functions) 190.  
 Euwema, R. N. and J. A. Wheeler (Vacuum polariza- bility) 447.  
 Evan-Iwanowski, R. M. (Stress solutions for an infinite plate) 412.  
 Evans, A. (Transformations of series) 283.  
 — C. and F. Evans (Shock compression of a perfect gas) 207.  
 — F. s. C. Evans 207.  
 — T. (Remarks on a paper by R. H. Bruck) 20.  
 — II, G. W., F. D. Faulkner, B. J. Lockhart and C. L. Perry (Shock produced by a spherical piston) 208.  
 Evgrafov, M. A. (Methode der nahe beieinander liegenden Systeme im Raum der analy- tischen Funktionen) 290.  
 Ewald, G. (Axiomatischer Auf- bau der Kreisgeometrie) 157; (Orthogonalität in der Kreis- geometrie) 158.  
 Ewing, G. M. s. H. D. Brunk 52.  
**F**abian, W. (Hypergeometric function) 289.  
 Fabri, J. et L. Jarlan (Représ- entation non linéarisée du champ aérodynamique) 423.  
 Faculté des Sciences de Paris, Séminaire A. Châtelet et P. Dubreil (Algèbre et théo- rie des nombres) 251; (Demi- groupes) 255.  
 — — — — Séminaire Schwartz (Problèmes mixtes pour l'équation des ondes) 102.  
 Fadde, J. (Eigenwertprobleme von Affinoren) 303.  
 Fan, Ky (Linear inequalities) 376.  
 Fátima Fontes de Sousa, M. de (Invariante Unterräume einer Matrix) 8.  
 Faulkner, F. D. s. G. W. Evans II 208.  
 Fejes Tóth, L. (Sum of distan- ces) 386.  
 Fejnberg, E. L. (Interaction of fast deuterons with nuclei) 225.  
 Feldmann, L. (Orthogonal poly- nomials) 287.  
 Feller, W. (Sturm-Liouville operators) 135.  
 — — — and H. P. McKean jr. (Diffusion equivalent to a

- countable Markov chain) 353.
- Féret, J. Kampé de s. Kampé de Féret, J. 350.
- Fernández, G. (Affine Differentialgeometrie der Hyperflächen) 166.
- Ferrer Figueras, L. (Stationäre Bewegung eines Fadens) 409.
- Few, L. (Covering space by spheres) 273.
- Feyerabend, P. K. (Zum Neumannschen Beweis) 442.
- Fiedler, M. und V. Pták (Seidelsches Verfahren) 139.
- Figueras, L. Ferrer s. Ferrer Figueras, L. 409.
- Fil'čakov, P. F. (Sukzessive konforme Abbildungen. III.) 295.
- Finetti, B. de (Verso l'era elettronica nell'assicurazione?) 371.
- Finikov, S. P. (Kongruenzenpaare) 168.
- Fischbach, J. W. (Gradient methods) 142.
- Fisher, M. E. s. C. Domb 334.
- R. A. and M. J. R. Healy (Tables of Behrens' test) 360.
- Fjellstedt, L. (Least quadratic residue and non-residue) 268.
- Fletcher, T. J. ( $n$  prisoners) 7.
- Flett, T. M. (Theorems of Littlewood and Paley) 72; (Theorem of Lindelöf) 294.
- Foa, J. V., A. Gail and T. R. Goodman (Tips of rotor blades) 410.
- Fodor, G. (Theorie der regressiven Funktionen) 43.
- s. P. Erdős 41.
- Fognolo Massaglia, B. (Vibrazioni trasversali di uno strato elastico) 196.
- Fokker, A. D. (Spherical light wave clocks in chronogeometry) 440.
- Foldy, L. L. s. B. P. Nigam 447.
- Fong, P. (Statistical theory of nuclear fission) 456.
- Ford, G. C. s. L. I. Mishoe 59.
- jr., L. R. s. G. B. Dantzig 377.
- Fort jr., M. K. (Problem of Sherman Stein) 174.
- Fortet, R. M. (Random distributions) 356.
- Francia, Giuliano Toraldo di s. Toraldo di Francia, Giuliano 212, 408.
- Frank, D. (Statistik der Spinwellen) 235.
- Fréchet, M. (Extremum local d'une fonctionnelle) 130.
- Freeman, J. D. (Spin-wave interactions) 236; (Ideal ferromagnet) 236.
- J. G. (Finsler-Riemann systems) 396.
- Freiberger, W. (Elastic-plastic torsion of ring sectors) 192.
- — and W. Prager (Plastic twisting of ring sectors) 193.
- Freire, R. (Matrizenmethode zur Lösung linearer Gleichungen) 252.
- French, Nancy E. s. Leo F. Epstein 338.
- Freudenthal, H. (Spindarstellung der Drehgruppe) 15; (H. Weyl) 246.
- Freund, J. E. (Introduction to mathematics) 242.
- — s. Irwin Miller 350.
- Fridman, M. A. (Semi-commutative multiplications) 257.
- Friedman, B. (Applied mathematics) 128.
- — and L. I. Mishoe (Eigenfunction expansions) 59.
- Friedmann, N. E. (Analog of the heat equation) 147.
- Frisch, H. L. (Poincaré recurrences) 429.
- Frölicher, A. and A. Nijenhuis (Cohomology invariants for complex manifolds. I. II.) 406.
- Fubini, S. (Structure of the nucleon) 449.
- Fuchs, A. et J.-P. Vigier (Équilibre stable de phénomènes soumis à une évolution markovienne) 354.
- Fujisawa, Isaku s. Také Soné 387.
- Fujita, Sh. (Ascension of a small mass of air. I.) 458.
- Fujiwara, K. (Demigroupes topologiques des fonctions continues. I.) 324.
- Fulkerson, D. R. s. G. B. Dantzig 377, 378.
- Funayama, Nenosuke (Imbedding partly ordered sets) 21.
- Gachov, F. D. und Ju. I. Čerskij (Integralgleichungen vom Faltungstypus) 114.
- Gail, A. s. J. V. Foa 410.
- Galafassi, V. E. (Superficie algebriche reali) 163.
- Gale, D. (Neighboring vertices on a convex polyhedron) 378; (Closed linear model of production) 379.
- Gallarati, D. (Rigate algebriche) 162.
- Garabedian, P. R. (Axially symmetric cavities and jets) 203.
- Gardner, M. (Mathematics, magic and mystery) 6.
- Garnir, H. G. s. A. M. Boigelot 104.
- Garrett, J. R. (Reduction of equations to normal form) 10.
- Gáspár, J. (Kubische Determinanten) 8.
- Gasparjan, M. M. (Temperaturproblem für konvexe Vielecksplatte) 191.
- Gates jr., L. D. (Linear differential equations in distributions) 131.
- Gatteschi, L. (Rappresentazione asintotica dei polinomi di Legendre) 65.
- Gaylor, D. W. (Estimates of product variance) 362.
- Gazarchi, L. A. (Ebene Bewegung von drei Massenpunkten) 408.
- Geffroy, J. (Écart maximum entre les fonctions de répartition) 348.
- Gehring, F. W. (Dirichlet problem) 314.
- Geis, Th. (Grenzschichtströmung an einer Klasse rotierender Körper) 204; („Ähnliche“ Grenzschichten) 204.
- Gejlikman, B. T. (Strong coupling for meson fields. I—III.) 220.
- Gelfand, I. M. s. F. A. Berezin 17.
- Gennes, P.-G. de (Premières excitations dans les substances magnétiques) 236.
- Gergen, J. J. s. F. G. Dressel 297.
- Germain, P. (Green's function for Tricomi problem) 105.
- Germer, H. (Transformationen im projektiven  $R_n$ ) 159.
- Gheorghiu, O. Em. (Spezielle geometrische Objekte) 164.
- Ghizzetti, A. (Coefficienti di Fourier-Stieltjes) 63; (Coefficienti di Legendre-Stieltjes) 63.
- Gigl, H. (Multiplizität eines Schnittpunktes) 388.
- Gilbert, N. E. G. (Likelihood function for capture-recapture samples) 362.
- W. M. (Monotonic functions on cones) 321.
- Gillman, L. (Theorem of Mahlo) 42.
- s. F. Bagemihl 43.
- Ginatempo, N. (Risoluzione in



- numeri interi della  $x^4 - 8y^4 - 8y^2z = z^2$ ) 269.
- Ginsburg, S. (Sets which are not homeomorphic by  $m$ -decomposition) 178.
- Th. (Dreidimensionale Potentialströmung durch axiale Schaufelgitter) 423.
- Ginzburg, V. L. (Macroscopic theory of superconductivity) 231.
- — — and V. P. Silin (Effect of interelectronic collisions on electrical conductivity) 233.
- Glansdorff, P. (Calcul par récurrence de la variation seconde d'une intégrale multiple) 317.
- Gleason, A. M. (Finite Fano planes) 380.
- Gluskov, V. M. (Nilpotente, lokal bikompakte Gruppen) 16; (Lokal bikompakte Gruppen mit Minimalbedingung) 260.
- Godeaux, L. (Surfaces algébriques dont le diviseur de Severi est quelconque) 161; (Surface du cinquième ordre. I. II.) 162.
- Godunov, S. K. (Gleichungen der Hydrodynamik) 199.
- Goertzel, G. (Minimum critical mass) 226.
- Golab, S. (Tensorrechnung) 163; (Distributives Gesetz der reellen Zahlen) 334.
- — et S. Łojasiewicz (Formule des accroissements finis) 51.
- Goldbeck jr., B. T. s. A. A. Grau 290.
- Gol'dberg, A. A. (Differentialgleichungen erster Ordnung) 92.
- Goldberg, R. R. and R. S. Varga (Moebius inversion of Fourier transforms) 117.
- Goldenberg, J. (Änderung von  $\Gamma'_2(B)/\Gamma'_2$ ) 455.
- Gol'dina, N. P. (Free nilpotent groups) 256.
- Goldman, A. J. (Separation theorems for polyhedral) 375.
- — — and A. W. Tucker (Polyhedral convex cones) 375; (Linear programming) 376.
- Golomb, S. W. (Consecutive integers) 268.
- Gomez, R. and D. Walecka (Cross section for scattering of photons by protons) 219.
- Gon, Chan Chen s. Chan Chen Gon 177.
- Gonshor, H. (Spectral theory for non-normal operators) 332.
- González Domínguez, A. und R. Scarfiello ( $v \cdot p \cdot 1/x \cdot \delta = -\frac{1}{2} \delta'$ ) 319.
- Goodman, A. W. (Functions typically-real and meromorphic) 293.
- T. R. s. J. V. Foa 410.
- Goormaghtigh, R. (Ellipses associées aux droites de Simson) 384.
- Gorjainov, A. S. (Diffraction of a plane electromagnetic wave) 437.
- Górski, J. (Points extrémaux) 111.
- Gosar, P. (Multiple small angle scattering of waves) 212.
- Gottfried, K. (Groundstate properties of nonspherical nuclei) 453.
- Gottschalk, W. H. (Almost periodic transformation groups) 128.
- Gould, H. W. (Vandermonde's convolution) 7.
- Gourdin, M. (Diffusion nucléon-nucléon. I.) 224.
- Grabaf, M. I. (Substitution for time in dynamical systems) 128; (Isomorphism of dynamical systems) 128; (Spectrum of harmonized dynamical systems) 128.
- Grabiel, F. (Gerichtete Mengen) 42.
- Graeb, W. und R. Nevanlinna (Affine Differentialgeometrie) 172.
- Grammel, R. (herausgegeben von) (Verformung und Fließen des Festkörpers) 415.
- — und H. Ziegler (Kreisel mit Lagerreibung) 188.
- Grau, A. A. and B. T. Goldbeck jr. (Algebraic properties of classes of functions) 290.
- Greco, D. (Formole integrali di maggioranza) 310; (Problema di Dirichlet relativo ad un'equazione lineare ellittica) 311; (Teorema di calcolo delle variazioni) 316.
- Green, A. E. and R. S. Rivlin (Steady flow of non-Newtonian fluids through tubes) 418.
- H. S. (Renormalization with pseudo-vector coupling) 220.
- Greenspan, H. P. (Generation of edge waves) 427.
- Grenander, U. and M. Rosenblatt (Estimating the spectrum of a time series) 364.
- Gribov, V. N. s. L. É. Gurevič 238.
- Grigorjan, S. S. (Wing of finite span) 207.
- Grinberg, G. A., N. N. Lebedev, I. P. Skal'skaja und Ja. S. Ufljand (Electromagnetic field of a linear emitter) 435.
- Grohne, D. (Laminare Strömung in einer kreiszylindrischen Dose) 204, 205.
- Groot, J. de (Non-archimedean metrics in topology) 402.
- — — s. Ph. Dwinger 22.
- S. R. de s. P. Mazur 430.
- Gross, E. P. and J. L. Lebowitz (Quantum theory of dielectric relaxation) 238.
- Grothendieck, A. (Erratum) 120.
- Grzegorzczak, A. (Undecidability of arithmetic) 5.
- Gubař, N. A. (Charakteristik von singulären Punkten eines Systems von zwei Differentialgleichungen) 91.
- Gueben, G. (Phénomènes radioactifs) 226.
- Guest, P. G. (Fitting of polynomials to unequally spaced observations) 370.
- Guha, U. („Second theorem of consistency“) 281; (Convergence factors for Riesz summability) 282.
- Gurevič, L. É. and V. N. Gribov (Dielectric losses) 238.
- Hadwiger, H. (Satz Hellyscher Art) 176; (Minkowskis Ungleichungen) 399.
- Haken, H. (Kopplung nicht-relativistischer Teilchen mit einem quantisierten Feld. I.) 235.
- Halberg jr., Ch. J. A. and A. E. Taylor (Spectra of linked operators) 133.
- Halbwachs, F. (Vecteur spin dans le fluide de Weyssenhoff) 215; (Fluide à spin relativiste) 215.
- Hall, H. E. and W. F. Vinen (Rotation of liquid helium II. II.) 230.
- P. (Finite-by-nilpotent groups) 258.
- Handest, F. (Constructions in hyperbolic geometry) 382.
- Hansen, W. (Ptolemäische Ungleichung) 384.

- Harary, F. (Pólya and Otter formulas) 185.
- Harish-Chandra (Semisimple Lie groups. VI.) 17; (Characters of semisimple Lie groups) 18; (Differential operators on semisimple Lie algebra) 19, 20; (Formula for semisimple Lie groups) 20.
- Harris, T. E. (Stationary measures for certain Markov processes) 352.
- Harrold jr., O. G. (Theorem on disks) 174.
- Hart, W. L. and Th. S. Motzkin (Newton-Raphson gradient method) 142.
- Hastings jr., C., J. Hayward and J. P. Wong jr. (Approximations in numerical analysis) 152.
- Hatcher, J. R. (Singular integral equation) 114.
- Haupt, Otto (Ordres géométriques) 173.
- Hayashi, K. (Sub-biharmonic functions) 315.
- Hayes, W. D. and J. W. Miles (Free oscillations of a buckled panel) 196.
- Hayman, W. K. (Stirling's formula) 69.
- Hayward, Jeanne s. Cecil Hastings jr. 152.
- Head, J. W. (Approximation to transients) 318.
- Healy, M. J. R. s. R. A. Fisher 360.
- Heaslet, Max A. s. Harvard Lomax 207.
- Heins, M. (Asymptotic spots of entire functions) 293.
- Heinz, E. (Elliptische Systeme von Differentialgleichungen zweiter Ordnung) 311.
- Heitler, W. (Principe du bilan détaillé) 430.
- Helgason, S. (Multipliers of Banach algebras) 323.
- Heller, I. and C. B. Tompkins (Theorem of Dantzig) 378.
- Henderson, A. (Lehmus-Steiner-Terquem problem) 383.
- Henkin, L. (Nominalism) 249; (Nominalistic interpretation of mathematical language) 250; (Algebraic structure of mathematical theories) 250.
- Henry, J. (Énergie libre d'excès des mélanges isotopiques) 210.
- Henstock, R. (Linear and bilinear functions) 120.
- Heppes, A. (Probability distributions of more dimensions) 344.
- Hermes, H. (Mathematische Logik und Grundlagenforschung) 247.
- Heselden, G. P. M. (Incomplete beta functions) 289.
- Hestenes, M. R. (Conjugate-gradient method) 141.
- Hewitt, E. and H. S. Zuckerman ( $l_1$ -algebra of a commutative semigroup) 127.
- Higgs, P. W. (Vacuum expectation values) 447.
- Higman, G. (Conjecture of Nagata) 25.
- Higuti, I. (Sums of the independent variates) 358.
- Hiida, K., J. Iwadare and Sh. Machida (Pion exchange potential) 449.
- Hill, R. (Rigid-plastic solid. I. II.) 416.
- T. L. (Statistical mechanics) 209.
- Hille, E. (Differentialoperatoren) 304.
- Hilton, P. J. (On divisors of continuous maps) 180; (Borsuk dependence and duality) 405.
- Hiong, King-Lai (Théorème de M. Milloux. I. II.) 75; (Limitation de  $T(r, f)$ ) 75.
- Hirschfelder, J. O. and J. S. Dahler (Kinetic energy of relative motion) 187.
- Hlavatý, V. (Basic principles of the unified theory of relativity) 441.
- Hlawka, E. (Folgen auf kompakten Räumen) 57.
- Höcker, K.-H. s. D. Emen-dörfer 226.
- Hodge jr., P. G. and F. Romano (Deformations of an elastic-plastic shell) 416.
- Hodges, J. H. (Exponential sums for symmetric matrices in a finite field) 9; (Weighted partitions for matrices over a finite field) 267.
- s. L. Carlitz 9.
- jr., J. L. and E. L. Lehmann (Robbins-Monro process) 365.
- Hoehnke, H.-J. (Kongruenzen für Polynome) 32.
- Hoeland, G. (Stützmomenteneinflussfelder durchlaufender elastischer Platten) 189.
- Hoffman, A. J. and J. G. Kruskal (Integral boundary points of convex polyhedra) 378.
- Hoffman, A. J. and H. W. Kuhn (Distinct representatives) 377.
- s. G. B. Dantzig 378.
- Holøien, E. (Atomic component orbitals) 228.
- Homma, T. (Theory of queues) 355.
- Honda, Namio s. Takeo Matsubara 230.
- Hong, I. (Infinite singularities of  $\Delta u + k^2 u = 0$ ) 107.
- Hönl, H. und A.-W. Maue (Gravitationsfeld rotierender Massen) 214.
- Homma, Eiitirō s. Kiyoshi Aoki 405.
- Howarth, J. C. (Real rotation group) 253.
- Hsieh, Yü-Chang and I. Bloch (Single-body wave functions) 452.
- Huber, A. (Axially symmetric potentials) 314.
- Hudimoto, H. (Distribution-free classification) 359.
- Hue, Jean s. Michel-Yves Bernard 212.
- Hughes, D. R. (Partial difference sets) 381.
- Hulthén, L. (Operational analysis) 374.
- Hurley, A. C. (Method of atoms in molecules. II.) 228.
- Husain, S. I. (Unified field theory. I.) 440.
- Huttly, N. A. (Fitting of regression curves) 370.
- Huzurbazar, V. S. (Sufficient statistics and orthogonal parameters) 358.
- Hyman, Charles J. s. N. I. Achieser 284.
- Ichimura, H. (Electron-phonon system) 234.
- Ingleton, A. W. (Rank of circulant matrices) 8.
- Iochevidov, I. S. und M. G. Krejn (Spektraltheorie der Operatoren. I.) 134.
- Ionescu Tulcea, C. (Fonctions de type positif) 126.
- Isaacs, G. L. (Comparison theorems for Laplace integrals) 317.
- Iséki, K. (Semi-groups) 11; (Regular semi-group) 256; (Property of Lebesgue in uniform spaces. VI.) 402; (Topological spaces. II.) 402; (V.) 403.
- and Y. Miyanaga (Theorem on paracompact spaces) 403; (Topological spaces. IV.) 403.

- Ishiguro, E., T. Arai and M. Sakamoto (Tables for molecular integrals. IX.) 228.
- Iswata, T. (Countably compact spaces) 403.
- Itô, N. and J. Szép (Nicht-auflösbare endliche Gruppen) 14.
- Ivankov, A. G. (Zulässige Synchronisationsfrequenzen) 146.
- Iwadare, Junji s. Kichiro Hiida 449.
- Iwata, G. (Orbits of an electron. I.) 212.
- Izumi, Shin-ichi (Trigonometrical series. XX.) 62; (XIX.) 287.
- and M. Satô (Fourier series I.) 286.
- Jadraque, V. M. (Kettenbruchformeln) 284.
- Jaffard, P. (Problème sur les ensembles) 42.
- James, R. D. (Summable trigonometric series) 285.
- Janenko, N. N. (Klasse eines Riemannschen Raumes) 393.
- Jarlan, Lucien s. Jean Fabri 423.
- Jarre, G. (Scambi di quantità di moto, di calore e di massa) 422.
- Jaworowski, J. W. (Antipodal sets on the sphere) 185.
- Jecklin, H. (Hyperbolische Interpolation von Reservekurven) 373; (Simplification de la méthode  $F'$ ) 373.
- Jeffery, R. L. (Trigonometric series) 285.
- Jenkins, J. A. (Quasiconformal mappings) 297.
- Johnson, D. C. and R. E. D. Bishop (Vibration of a system having equal frequencies) 409.
- — — s. R. E. D. Bishop 188.
- — — L. (Pseudo random numbers on the IBM type 701) 357.
- N. L. s. J. W. Archbold 366.
- Jonas, H. (Flächen mit Windelkurven als Asymptotenlinien) 167.
- Jones, B. W. and G. L. Watson (Indefinite ternary quadratic forms) 272.
- C. W. (Linear perturbation theory of supersonic flow) 207.
- E. E. (Magnetostatic characteristic of elliptic cylinders) 432.
- jr., J. (Theorem of Atkinson's) 303.
- Jónsson, Bjarni s. Alfred Tarski 2.
- Joseph, J. (Multiple photon production) 448.
- Jung, H. (Wärmeaustauscher) 431.
- J. (Linear estimates) 360.
- Jurkat, W. B. (Functions with monotonic derivatives) 118; (O-Taubersätze) 282.
- Kac, I. S. (Integraldarstellungen analytischer Funktionen) 70; (Spektralfunktionen gewisser Differentialsysteme) 97; (Spektralfunktionen von Differentialsystemen) 98.
- M. (Kinetic theory) 428; (Probability in classical statistical mechanics) 429.
- Kacman, A. D. (Halbgruppe, die in einer Gruppe invariant ist) 12.
- — — s. P. G. Kontorovič 11.
- Kadec, M. I. (Unbedingt konvergente Reihen) 120.
- Kaeppler, H. J. (Rückkehrgeräte) 424.
- Kagan, V. F. (Schneideinstrumente) 387.
- Kahane, J. P. (Séries de Fourier absolument convergentes) 60.
- Kaizuka, T. and Y. Michiaki (Bounded analytic transformations) 81.
- Kaloujnine, L. A. (Zentrale Erweiterungen von Abelschen Gruppen. I.) 13.
- Kampé de Fériet, J. (Random solutions of partial differential equations) 350.
- Kanazawa, A. and M. Sugawara (ps-ps intermediate coupling meson theory) 449.
- Kaneko, Tetuo s. Kiyoshi Aoki 405.
- Kano, Ch. (Conformal geometry) 395.
- Kanold, H.-J. (Satz von L. E. Dickson. I. II.) 37; (Menge der vollkommenen Zahlen) 37.
- Karl, H. s. I. R. Šafarevič 138.
- Karlin, Samuel s. Russell N. Bradt 361.
- Karpelevič, F. I. (Faserung homogener Räume) 182.
- Karpman, G. et V. V. Raman (Fluides à spin de Weyssenhoff) 215.
- Karzel, H. (Anordnungsbeziehung am Dreieck) 154.
- Kasahara, Sh. (Lebesgue property in uniform spaces. II.) 178; (Normabilité d'un espace localement convexe) 322.
- Kaschluhn, F. (Spezifische Wärme der Metallelektronen) 231.
- Kashiwagi, Sadao s. Shigeo Ozaki 81.
- Kassecker, T. und P. Urban (Berechnung von Kernmomenten) 453.
- Kasteleijn, P. W. (Coupling approximation for Ising spin systems) 237.
- — — and J. van Kranendonk (Heisenberg ferromagnetism) 237; (Antiferromagnetism) 237.
- Kastler, D. (Règles de commutation en théorie quantique des champs) 218; (Champs des photons) 218; (Algèbre multilinéaire et quantification du champ de Dirac) 218.
- Kasuya, T. (Zener's model) 237; (Electrical resistance of ferromagnetic metals) 237.
- Kaufmann, W. (Nachtrag zu: Zirkulationsverteilung bei Umströmung dünner Flügelprofile) 422.
- Kawaguchi, S.-i. and T. Nobuhara (Extremal curves) 396.
- Kazarinoff, D. K. (Wallis' formula) 284.
- Kegel, G. (Roots of polynomials) 9.
- Kemperman, J. H. B. (Complexes in a semigroup) 256.
- Kemphorne, O. (Efficiency factor of an incomplete block design) 367.
- Kennard, E. H. (Cylindrical shells) 412.
- Kennedy, E. S. (Parallax theory in islamic astronomy) 244.
- — — and W. R. Transue (Medieval iterative algorism) 244.
- Kenyon, H. (Convex functions) 53.
- Kerimov, B. K. and A. V. Džavadov (Statistical theory of atomic nucleus. III.) 452.
- — — s. A. A. Sokolov 219.
- Kervaire, M. (Courbure intégrale généralisée) 182.
- Kestelman, H. (Measurable almost periodic functions) 301.
- Kidder, R. E. (Immiscible fluids in porous media) 427.
- Kil'dišev, G. S. s. I. G. Veneckij 357.



- Kimura, Toshiei s. Takashi Shibata 443.
- King, R. W. P. (Linear antennas) 435.
- Kinukawa, M. (Convergence character of Fourier series. II.) 287.
- Kiržnic, D. A. (Mass renormalization in Tamm-Dancoff method) 445; (Mass of the photon) 448.
- Kislicyn, S. G. (Periodische Lösung der Gleichung  $y' = f(x, y)$ ) 336.
- Klee jr., V. L. (Problem of E. M. Wright) 53; (Fixed-point sets of periodic homeomorphisms of Hilbert space) 321.
- Klein, F. (Lectures on the icosahedron) 259.
- Klein-Barmen, F. (Strukturen und Algebren) 261.
- Klimontovič, Ju. L. (Correlation function for quantum systems) 210.
- Klimov, N. I. (Number-theoretical functions) 276.
- Kliot-Dašinskij, M. I. (Erste Randwertaufgabe für elliptische Differentialgleichungen) 105.
- Klose, W. s. W. Brauer 233.
- Kloss, B. M. (Limiting distributions of sums of independent random variables) 345.
- Knobloch, H.-W. (Seltenheit reduzierbarer Polynome) 10.
- Kohls, C. W. (Embedding of a regular ring) 263.
- Koizumi, S. (Correction and remark on integral inequalities) 287.
- Kokoris, L. A. (Almost alternative algebras) 23; (Simple power-associative algebras) 262.
- Kolomenskij, A. A. (Quantum fluctuations in electron emission) 213.
- Komar, A. (Singularities in field equations of general relativity) 214.
- Komatu, Y. (Coefficient problem for functions univalent in an annulus) 293; (Supplement to „transference of boundary value problems“) 294.
- Konrad, M. (Ion motion in a cyclotron) 439.
- Kontorovič, P. G. und A. D. Kacman (Elemente einer Halbgruppe) 11.
- Konuma, M. and H. Umezawa (High energy behaviour of renormalizable fields. II.) 219.
- Koosis, P. (Fonctions moyennepériodiques) 122.
- Koppe, E. (Minimalprinzipien der nichtlinearen Elastizitätstheorie) 191.
- Korobkov, V. K. (Symmetric functions in the class of  $\pi$ -circuits) 249.
- Korobov, N. M. (Vollkommene Gleichverteilung) 38.
- Košelev, A. I. (Derivatives of solutions of elliptical equations) 105.
- Kosiński, A. (Labil points) 404.
- Kostitzin, V. (Populations bactériennes) 370.
- Kostrikin, A. I. (Lie rings) 14.
- Kovács, R. and L. Solymár (Theory of aperture aerials) 435.
- Kovaňko, A. S. (Definition der fastperiodischen Funktionen von A. S. Besicovitch) 86.
- Kóvári, T. s. P. Erdős 74.
- Krabbe, G. L. (Abelian rings) 133.
- Kranendonk, J. van s. P. W. Kasteleijn 237.
- Krasnoščekova, T. I. (Nullstellen der Partialsummen einer Potenzreihe) 66.
- Krasnosel'skij, M. A. (Non-linear functional analysis) 97.
- Krasovskij, N. N. (Lapunov's second method) 96.
- Kratzer, A. (Bild in der Physik) 185.
- Kraus jr., A. A. and J. P. Schiffer (Angular correlation for the  $(a, b_\gamma)$ -type nuclear reaction) 455.
- Kravtchenko, J. et A. Daubert (Houle de Gerstner) 208.
- Kreis, H. (Renditenproblem) 374.
- Krejn, M. G. s. I. S. Iochvidov 134.
- Krejnes, M. A., I. A. Vajnštejn (Wainstein) and N. D. Ajzenštát (Eisenstat) (Approximate nomograms) 152; (Nomograms for functions on a net) 152.
- Kretschmer, Kenneth S. s. Hollis B. Chenery 374.
- Krickeberg, K. (Extreme Derivierte von Zellenfunktionen) 45.
- Krishna, Shri s. R. S. Mishra 394.
- Krishnaiah, P. V. and N. V. Subrahmanyam (Symmetric functions) 137.
- Krishnan, K. S. and S. K. Roy (Drude dispersion formula) 238.
- Królikowski, W. and J. Rzewuski (Relativistic two-body problem) 218.
- Krumhaar, H. (Separation von Spektren) 304.
- Kruskal, J. G. s. A. J. Hoffman 378.
- Krylov, V. I. (Approximate evaluation of integrals) 150.
- Krzywoblocki, M. Z. (Interaction between dissipative flows and external streams) 419.
- Kudo, T. and Sh. Araki ( $H_*(\Omega^p(S^n; Z_2))$ ) 179.
- Kuhn, H. W. (Theorem of Wald) 379.
- and A. W. Tucker (edited by) (Linear inequalities) 375.
- s. A. J. Hoffman 377.
- Kunle, H. ( $T$ -Figuren in quadratischem Komplex) 391.
- Kuramochi, Z. (Evans's theorem on abstract Riemann surfaces. I. II.) 295; (Mass distributions on the ideal boundaries of abstract Riemann surfaces. II.) 295.
- Kurepa, D. (Écart abstrait) 400.
- G. (Mathematics at present time) 241.
- S. (Convex functions) 53.
- Kuroš, A. G. (O. Ju. Šmidt) 246.
- Kuttner, B. (Cores of sequences) 55.
- Kutyev, K. M. ( $\pi C$ -Isomorphismen) 15.
- Labra, M. (Fußpunktdreiecke) 383.
- Ladyženskaja, O. A. (Instationäre Operatorgleichungen) 105.
- Lagarde, Alfredo Rojas s. Rojas Lagarde, Alfredo 89.
- Laha, R. G. s. J. Roy 367, 368.
- Lakin, A. s. L. J. Slater 289.
- Lance, G. N. (Motion of a viscous fluid in a tube) 421.
- Landau, L. D. and I. M. Khalatnikov (Khalatnikov) (Gauge transformation of the Green's function for charged particles) 446.
- and Iu. Ia. Pomeranchuk (Radiation of gamma quanta) 450.
- Landkofa, N. S. s. V. A. Steklov 60.
- Landsberg, M. (Spektrum symmetrisierbarer Endomorphismen) 133.

- Landsberg, P. T. (Foundations of thermodynamics) 208.
- Lane, N. D. (Differentiable points of arcs) 398.
- Laugwitz, D. (Vektorübertragungen in der Finslerschen Geometrie) 397.
- Lavina, Giovanni Scotto s. Scotto Lavina, Giovanni 197.
- Lavrent'ev, M. M. (Interior theorems of uniqueness) 70.
- Lax, P. D. (Stability theorem for solutions of abstract differential equations) 330.
- — — and R. D. Richtmyer (Stability of linear finite difference equations) 89.
- — — s. R. Courant 308.
- Leach, E. B. (Functions with preassigned derivatives) 280.
- Leader, S. (Convergence topologies for measures) 348.
- Leavitt, W. G. (Two word rings) 23.
- Lebedev, N. N. s. G. A. Grinberg 435.
- S. A. (Elektronische Rechenmaschinen und Informationsprozesse) 338.
- Lebesgue, H. (Coniques) 387.
- Lebowitz, J. L. s. E. P. Gross 238.
- Ledoux, P. s. J. Counson 456.
- Leech, J. (Representation of 1, 2, ...,  $n$  by differences) 34.
- Leepin, P. (Einfluß von Änderungen der Rechnungsgrundlagen auf Prämien) 372.
- Lees, Lester s. Hsun-Tiao Yang 421.
- Lehmann, E. L. s. J. L. Hodges jr. 365.
- M. G. s. M. Touchais 1.
- Lehmer, D. H. (Character matrices) 33; (Diophantine equation  $x^3 + y^3 + z^3 = 1$ ) 268.
- E. (Number theory on the SWAC) 276.
- Leichtweiss, K. (Problem von Cauchy. III.) 169.
- Leja, F. (Points extrémaux) 111.
- Lemaitre, G. (Calcul élémentaire) 341.
- Lenz, F. (Modellfeld für permanentmagnetische Einzelinse) 213; (Potentialfelder in Elektronenlinsen) 213.
- Leont'ev, A. F. (Folgen von linearen Aggregaten) 67; (Regularitätsgebiet der Grenzfunktion) 67.
- Leontovič, E. A. s. A. A. Andronov 91.
- Leray, J. (Théorie des points fixes) 329.
- Levin, J. J. (Singular perturbations of nonlinear differential equations) 306.
- Levinson, N. (Closure problems) 68.
- Lévy, P. ( $\sigma$ -fonctions) 349.
- Lichnerowicz, A. (Lineare Algebra und lineare Analysis) 7; (Équations du champ de la théorie unitaire d'Einstein) 440.
- Liebmann, G. (Nuclear reactor problems. I.) 456.
- Lifšic, I. M. (Temperature outbursts) 226; (Quantum theory of electrical conduction in a magnetic field) 233.
- — — und S. I. Pekar (Tammische gebundene Elektronenzustände) 232.
- Lin, Hua (Convergence of an iterative procedure) 146.
- Linden, C. A. M. van der (Thermal stresses in a plate) 191.
- C. N. (Minimum modulus of functions regular in the unit circle) 292.
- Ling, Chih-Bing (Stresses in a cylinder) 190.
- Linnik, Ju. V. (Application of matrices and Lobatschevskian geometry to Dirichlet's characters) 36.
- Lipiński, J. S. (Ensembles  $\{f(x) > a\}$ ) 279.
- Lipschutz, M. (Error in approach to stable distributions. I. II.) 345.
- Liverani, G. (Teorema di reciprocità) 187.
- Livesley, R. K. (Automatic design of structural frames) 188.
- Ljachovickij, V. N. (Zerlegbarkeit einer Gruppe) 13.
- Lju, Šao-sjué (Zerfallung lokal endlicher Algebren) 23.
- Ljubovin, V. D. (Spektralzerlegung selbstadjungierter Operatoren) 332.
- Ljusternik, L. A. und I. Ja. Akušskij (Numerische harmonische Analyse) 340.
- — — s. M. I. Višik 330.
- Lluis, E. (Bei Projektion algebraischer Mannigfaltigkeiten auftretende Singularitäten) 161.
- Löb, M. H. (Constructive mathematics) 1.
- Lockhart, B. J. s. G. W. Evans II 208.
- Logunov, A. A. (Generalization of renormalization group) 219.
- Lohwater, A. J. (Quasi-conformal mapping) 297.
- Loinger, A. s. P. Bocchieri 445.
- Łojasiewicz, S. (Valeur d'une distribution) 131.
- — s. S. Gołąb 51.
- Lomax, H. and M. A. Heaslet (Wing-body wave drag) 207.
- Long, R. R. (Sources and sinks) 200.
- Longman, I. M. (Infinite integrals of oscillatory functions) 338.
- Lopšic, A. M. s. Ja. S. Dubnov 246.
- Lotkin, M. (Least squares solutions) 338.
- Low, F. E. s. G. F. Chew 221.
- Lüders, G. (Rotationszustände der Atomkerne. I.) 453.
- Luke, Y. L. (Evaluation of an integral) 150.
- Lumer, G. (Polygone) 176.
- Lupanov, O. B. (Rectifier) 432.
- Luxemburg, W. A. J. and A. C. Zaanen (Conjugate spaces of Orlicz spaces) 123; (Banach function spaces) 323.
- Maass, H. (Spherical functions and quadratic forms) 84.
- Macdonald, J. R. and M. K. Brachman (Linear-system integral transform relations) 319.
- MacDowell, S. W. and J. Tiomno (Polarization of spin one particles) 444.
- Machida, Shigeru s. Kichiro Hida 449.
- Macintyre, S. and E. Witte (German-english mathematical vocabulary) 241.
- Mackie, A. G. (Application of Hankel transforms in potential flow) 313.
- MacLane, S. (Slide and torsion products) 27.
- MacRobert, T. M. (Recurrence formulae) 289.
- Maeda, Shūichirō s. Tōzirō Ogasawara 329.
- Magalinskij, V. B. and Ja. P. Terleckij (Statistics of charge-conserving systems) 222.
- Mahapatra, S. s. R. Mohanty 62.
- Makarem, H. H. A. El (Matrix spaces. I. II.) 54.
- Maki, Z. (Feynman amplitudes) 217.
- Malenka, B. J. s. H. S. Valk 455.

- Mamuzié, Z. (Problème concernant  $eT$ -espaces) 401.
- Mandel, J. (Corps viscoélastiques à comportement linéaire) 416.
- Mandelbrojt, S. (Transformée de Fourier) 118.
- Mandelbrot, B. (Exhaustivité de l'énergie totale d'un système en équilibre) 210.
- Manin, Ju. I. (Gleichungen dritten Grades) 32.
- Marathe, C. R. (Quasi-idempotent matrices) 251.
- Maravall Casesnoves, D. (Simultaninvarianten eines Kreises) 387.
- Marchaud, A. (Propriétés différentielles des courbes d'ordre borné) 173.
- Marcus, M. (Optimum gradient method) 141.
- S. (Fonctions de G. Hamel) 53.
- Markušević, A. I. (Komplexe Zahlen und konforme Abbildungen) 76.
- Marmion, A. („Module“ d'un tétraèdre) 385.
- Marris, A. W. (Turbulent flow in curved channels) 206.
- Marsicano, F. R. (Poinsett-Kegel) 164.
- Martin, A. (Meson nucleon  $S$  scattering) 450.
- I. ( $L^2$ -solutions of the wave equation) 312.
- H. C. s. M. J. Turner 410.
- Martinelli, E. (Topologia. I.) 177; (Varietà kähleriane) 395.
- Marty, C. (Spectres de rotation nucléaires) 453.
- Maschler, M. (Minimal domains and their Bergman kernel function) 299.
- Maslennikova, V. N. (Mixed problem for unsteady motion of a rotating viscous fluid) 309.
- Masotti Biggiogero, G. (Geometria integrale) 177.
- Massaglia, Bruna Fogagnolo s. Fogagnolo Massaglia, Bruna 196.
- Masur, E. F. and K. P. Milbradt (Carrying capacity of redundant structures) 410.
- Matsubara, T., A. Morita and N. Honda (Bose-Einstein condensation) 230.
- Matsuda, Hirotugu s. Tsunenobu Yamamoto 209.
- Matsushima, Y. ( $B$ -covers in lattices) 261.
- Matthes, K. (Satz von Gelfand und Kolmogoroff) 123.
- Matusita, K. and H. Akaike (Decision rules) 359.
- and M. Motoo (Decision rule) 360.
- Matveev, A. N. (Influence of radiation on betatron oscillations of electrons) 213.
- Maue, A.-W. s. H. Hönl 214.
- Mazur, P. and S. R. de Groot (Ponderomotive force in a dielectric. II.) 430.
- McAuley, L. F. (Separability, completeness, and normality) 178.
- McCarthy, J. P. (Quadratic polynomials and prime numbers) 35.
- John (Value of information) 375.
- McCoy, N. H. (Prime radical of a polynomial ring) 24.
- McKean jr., Henry s. William Feller 353.
- McLain, D. H. (Upper central series of a group) 257.
- Medina, F. M. und G. Süßmann (Optisches Kernmodell) 224.
- Medlin, G. W. (Limits of real characteristic roots) 8.
- Meier, K. E. (Randwerte meromorpher Funktionen) 75.
- Meinardus, G. (Additive Zahlentheorie. I.) 269.
- Melencov, A. A. (Einschnitte in zusammenhängenden topologischen Gruppen) 16.
- Meligy, A. S. (Wave functions in Coulomb fields) 288.
- Mel'nik, S. I. (Oscillierende Funktionen) 149.
- Mel'nikov, G. I. (Lapunov's direct method) 95.
- Mendelsohn, N. S. (Ill conditioned matrices) 143; (Non-Desarguesian projective plane geometries) 379.
- Mendelson, E. (Proofs of independence in axiomatic set theory) 4.
- Meschkowski, H. (Rekursive Funktionentheorie) 5; (Rekursive reelle Zahlen) 5.
- Meyer, K. (Spinwellentheorie des Ferromagnetismus) 235.
- Michajlov, G. D. (Acoustic waves in a viscous medium) 425.
- Michiwaki, Yoshimasa s. Tetsu Kaizuka 81.
- Mieghem, J. van (Energy available in the atmosphere for conversion into kinetic energy) 457; (Transport et la production du moment et de l'énergie cinétiques dans l'atmosphère) 457.
- Mihoc, G. (Lois limites des variable vectorielles enchaînées) 350.
- Mikami, M. (Sampling inspection plan) 365.
- Mikeladze, Š. E. (Quadraturformeln für reguläre Funktion) 149; (Näherungsformeln für mehrfaches Integral) 150.
- Miki, Y. (Close-to-convex functions) 294.
- Mikusiński, J. (Arbeiten polnischer Mathematiker) 131.
- Milankovitch, M. (Aristarchos und Apollonios) 243.
- Milbradt, K. P. s. E. F. Masur 410.
- Milechin, G. A. s. S. E. Belen'kij 222.
- Miles, J. W. s. W. D. Hayes 196.
- Miller, G. F. and M. J. P. Musgrave (Elastic waves in aeolotropic media. III.) 199.
- I. and J. E. Freund (Arc length of a Gaussian process) 350.
- Mills, H. D. (Marginal values of matrix games) 377.
- Milnor, J. (Manifolds homeomorphic to the 7-sphere) 184.
- Minagawa, T. (Infinitesimal rigidity of closed convex surfaces) 165.
- Minardi, E. (Teoria bilocale dell'elettrone) 218.
- Minasjan, R. S. (Dirichletsches Problem) 148.
- Minc, R. M. (Equilibrium state of three differential equations) 95.
- Mirkil, H. (Differentiable functions) 119.
- Mishoe, L. I. and G. C. Ford (Uniform convergence of eigenfunction series) 59.
- — — s. Bernard Friedman 59.
- Mishra, R. S. (Mainardi-Codazzi equations) 394; (Field equations of Einstein's unified theory) 442.
- — — and Shri Krishna (Congruences of curves in Riemannian space) 394.
- Mitrinovitch, D. S. (Dérivées des polynômes de Legendre) 65.
- Miyanaga, Y. (Banach algebras) 124.
- — s. Kiyoshi Iséki 403.



- Miyazawa, H. (Magnetic moment of nucleon) 221.
- Miyoshi, Y. (Buildup of current discharge) 229.
- Mizohata, S. (Problème de Cauchy pour les équations paraboliques) 331.
- Moffat, J. (Generalized Riemann spaces) 440.
- Mohanty, R. and S. Mahapatra (Logarithmic summability of a Fourier series) 62.
- Mohr, E. (Nachtrag zu „Maxwell'sche Erzeugung der Kugelfunktionen“) 288.
- Moldovan, E. (Théorèmes de moyenne) 51.
- Monk, D. (Jacobians of linear systems) 161.
- Monteiro, A. (Algèbres de Brouwer) 250.
- Montel, Paul s. Henri Lebesgue 387.
- Moór, A. (Räume von skalarer Krümmung) 395.
- Moore, P. G. (Mean of a censored normal distribution) 360.
- Moran, P. A. P. (Numerical evaluation of integrals) 151; (Test of significance for an unidentifiable relation) 360.
- Mordell, L. J. (Diophantine equation  $x^3 + y^3 + z^3 + kxyz = 0$ ) 268.
- Morelock, J. C. s. N. C. Perry 137.
- Morev, I. A. (Monogene hyperkomplexe Funktionen) 78.
- Morgan, A. J. A. (Stress distributions within solids) 413.
- Mori, A. (Quasi-conformal mappings) 76.
- Morikawa, H. (Cycles on algebraic varieties) 388.
- Morita, Akira s. Takeo Matsubara 230.
- Kiiti (Kernel functions for symmetric domains) 300; (Closed mappings) 404; (Decomposition spaces of locally compact spaces) 404; (Mapping spaces) 404.
- Morrice, George Gavin s. Felix Klein 259.
- Morse, Ph. M. (Waves in a lattice of spherical scatterers) 232.
- Moser, J. (Analytic invariants of an area preserving mapping) 408.
- Mostert, P. S. (Sections in principal fibre spaces) 181.
- Mostowski, A. (Mathematische Logik auf dem Kongreß in Amsterdam) 247.
- Motoo, M. (Sum of positive random variables) 345.
- s. Kameo Matusita 360.
- Motzkin, T. S. and J. L. Walsh (Least  $p$ th power polynomials) 252.
- — s. William L. Hart 142.
- Mouchasseb, A. (Structure „en couche“ de particules) 452.
- Mouette, L. (Formes quadratiques binaires) 272.
- Mourier, E. ( $L$ -random elements in Banach spaces) 349.
- Muchtarov, A. I. and V. A. Černogorova (Photoerzeugung von neutralen Mesonen) 451.
- Mühlschlegel, B. (Leitfähigkeitstheorie der Metalle bei tiefen Temperaturen) 233.
- Muller, D. E. (Solving algebraic equations) 340.
- Müller, Karl-Heinz s. Curt Schmieden 418.
- P. H. (Spekttralbetrachtung von Atkinson und Sz.-Nagy) 133.
- Muñoz, Lina N. s. Susana Z. de Sosa Pérez 119.
- Munschy, G. (Récurrence entre certains polynômes d'Appell et Kampé de Fériet) 65.
- Muracchini, L. s. M. Villa 390.
- Murota, T. and A. Ueda (Williams-Weizsäcker method) 218.
- — — and H. Tanaka (Creation of an electron pair) 447.
- Musgrave, M. J. P. s. G. F. Miller 199.
- Muster, D. F. and M. A. Sadowsky (Bending of a loaded plate) 189.
- Myers jr., Wm. M. (Functionals associated with a continuous transformation) 49.
- Myklestad, N. O. (Vibration analysis) 409.
- Myrberg, P. J. (Automorphe Thetafunktionen) 86.
- Nachbin, L. (Mathematik in Brasilien) 241.
- Nagahara, T. (Galois extensions of division rings) 264; (Generating elements of Galois extensions) 264.
- — and H. Tominaga (Galois theory of division rings) 264.
- Nagasaki, M. (Deuteron stripping) 455.
- Nagata, J.-i. (Theorem of dimension theory) 178; (Coverings and continuous functions) 403.
- Naïm, L. (Fonctions harmoniques positives) 109; (Frontière de R. S. Martin) 314.
- Nakamura, Gisaku s. Kanehisa Udagawa 355.
- Nakano, T. (Relativistic field theory of an extended particle. I.) 451.
- Nakaoka, M. (Cohomology theory of a complex) 405.
- Namiki, Mikio s. Nobuhiko Saito 431.
- Nash, St. W. (Theory of experiments) 366.
- Nasu, Y. (Angular measure in a metric space) 174.
- Neal, B. G. (Plastic method of structural analysis) 232.
- Nečepurenko, M. I. (Convergence of approximate methods) 140.
- Nehari, Z. (Numerical solution of the Dirichlet problem) 337.
- Neidhardt, G. L. and E. Sternberg (Transmission of a load into the interior of an elastic body) 413.
- Netrebko, V. P. (Torsion eines elastischen Parallelepipeds) 190.
- Nevanlinna, Rolf s. Werner Graeb 172.
- Newman, J. R. (World of mathematics) 243.
- Newns, W. F. (Rectifiable curves) 280.
- Neyman, J. and E. L. Scott (Statistics of images of galaxies) 240.
- Nigam, B. P. and L. L. Foldy (Charge conjugation for Dirac fields) 447.
- Nijenhuis, Albert s. Alfred Frölicher 406.
- Nikodým, O. M. (Extension of a given finitely additive field) 43.
- Nikol'skij, S. M. (Periodische Funktionen) 63.
- Nobuhara, Tetsuro s. Syun-ichi Kawaguchi 396.
- Nodelman, H. M. and F. W. Smith (Mathematics for electronics) 433.
- Nollet, L. (Genres pseudo-canoniques des surfaces algébriques régulières) 389.
- Norden, A. P. (Redaktion und Einführung von) (Grundlagen der Geometrie) 156.

- Northcott, D. G. (Algebraic foundations of the theory of local dilatations) 389.
- ., J. Ma. (Elementare Beispiele zur konformen Abbildung) 295.
- O'Brien, V. (Chaplygin functions) 64.
- O'Dwyer, J. J. (Electron distribution function in insulators) 235.
- Obláth, R. (Puissances parfaites) 265.
- Ogasawara, T. and Sh. Maeda (Theorem of Dye) 329.
- Ogieveckij, I. E. (Tauberian theorems for double series) 283.
- Ohmura, T. (Electromagnetic field) 451; (Stability of the electron) 451; (Variational methods. III.) 452.
- Oikawa, K. (Conformal mappings of a Riemann surface) 77.
- Okai, S. and M. Sano (Deuteron stripping reactions) 454.
- Okubo, T. (Groups of affine collineations. I.) 397.
- Olech, C. (Ordinary non-linear differential equations) 94.
- Olejník, O. A. (Cauchysches Problem für nicht-lineare Differentialgleichungen) 98; (Discontinuous solutions of non-linear differential equations) 98.
- Oliveira, J. Tiago de s. Tiago de Oliveira, J. 23, 24.
- Ono, T. (Orthogonal groups over number fields) 260.
- Oosterwijk Bruyn, J. J. van (Minimum des primes de l'assurance temporaire) 372.
- Oppelt, W. (Technische Regelvorgänge) 153.
- Osima, M. (On a paper by J. S. Frame) 260; (Generalized symmetric group. II.) 260.
- Ostmann, H.-H. (Additive Zahlentheorie. I. II.) 31.
- Ostrom, T. G. (Double transitivity in finite projective planes) 380.
- Ostrovskij, G. M. (Graphische Integration nichtlinearer Gleichungen der Schwingungstheorie) 145.
- Ostrowski, A. (Determinanten mit überwiegender Hauptdiagonale) 138; (Verfahren von Steffensen und Householder) 140; (Darstellung von symmetrischen Funktionen) 252.
- Oswald, B. (Applied aerodynamics and flight mechanics) 206.
- Oswatitsch, K. (Verallgemeinerung des Potentials auf Strömungen mit Drehung) 418.
- Ouchi, T., K. Senba and M. Yonezawa (Mass reversal) 444.
- Overhauser, A. W. s. H. Ehrenreich 235.
- Ozaki, Sh., S. Kashiwagi and T. Tsuboi (Bounded analytic transformations) 81.
- Özden, K. (Biegung dünner Platten) 414.
- Paasche, I. (Moessnerscher Satz) 7; (Fraktionssatz von Steiner) 383.
- Páez, Susana Z. de Sosa s. Sosa Páez, Susana Z. de 119.
- Paggi, M. (Funzioni che soddisfano ai più comuni teoremi di addizione) 334.
- Pailloux, H. (Vibrations latérales d'une poutre chargée) 196.
- Pál, L. (Stochastic processes in cosmic radiation) 227.
- Palomba, G. (Teoria matematica del bilancio contabile) 371.
- Pan, Cheng-Tung ( $\sigma(n)$  and  $\varphi(n)$ ) 275.
- T. K. (Centers of curvatures) 165.
- Papadopoulos, V. M. (Scattering by a semi-infinite resistive strip) 211.
- Papapetrou, A. (Rotverschiebung und Bewegungsgleichungen) 214.
- Papić, P. (Espaces pseudo-distanciés complets) 401.
- Papy, G. (Vecteurs tangents à une variété de classe  $C^r$ ) 171.
- Paria, G. (Elastic stress distribution in a three-layered system) 413.
- Park, D. (Crystal statistics) 232.
- Parker, R. V. (Stirling's numbers as polynomials) 283.
- Parodi, M. (Propriétés des polynomes) 252.
- Parsons, D. H. (Plastic flow with axial symmetry) 415.
- Parzen, E. (Consistent estimates of the spectral density of a stationary time series) 364.
- Patterson, E. M. (Linear algebras of genus zero) 25.
- Pauc, Chr. et A. Revuz (Intégration par parties) 47.
- Pearce, R. M. (Neutron diffusion equation) 455.
- Pekar, S. I. (Nucleomesodynamics in strong coupling. I.) 449.
- s. I. M. Lifšic 232.
- Penfield, R. H. and H. Zatzkis (Invariance requirements) 217.
- Penrose, L. S., Sh. M. Smith and D. A. Sprott (Stability of allelic systems) 371.
- Perčinkova-Včková, D. (Formation d'équations aux dérivées partielles) 308.
- Percus, J. and L. Quinto (Application of linear programming to competitive bond bidding) 374.
- Peremans, W. (Free algebras with an empty set of generators) 261.
- Perfect, H. (Diagonal elements of a non-negative matrix) 9; (Canonical forms) 251.
- Perry, C. L. s. G. W. Evans II 208.
- N. C. and J. C. Morelock (Propagation of error by multiplication) 137.
- Persidskij, S. K. (Zweite Ljapunovsche Methode) 96.
- Peschka, W. (Axialverdichter als Schallquelle) 421.
- Pesin, I. N. ( $Q$ -quasikonforme Abbildungen) 296.
- Petersen, G. M. (Summability methods) 55; (Almost convergence) 55; („Almost convergence“ and uniformly distributed sequences) 283.
- Petersson, H. (Eisensteinsche Reihen) 85; (Partitionenprobleme) 270.
- Peyovitch, T. (Théorèmes des intégrales généralisées) 48.
- Pfluger, A. (Harmonische Funktionen auf Riemannsche Flächen) 110.
- Phariseau, P. (Diffraction of light by supersonic waves) 211.
- Philipson, C. (First four moments of a truncated distribution) 358.
- L. L. (Extension in flexural vibrations of rings) 417.
- Phillips, R. S. s. H. A. Dye 326.
- Picasso, E. (Conica di Kommerell) 167; (Linee di Segre e di Darboux) 167.
- Picht, J. (Atomphysik. I.) 186.
- Picone, M. (Elementare problema di estremo) 112; (Para-

- metro monormale di una varietà regolare) 174.
- Picone, M. (Onoranze a) 246.
- Pienc, K. (School mathematics) 242.
- Pierce, J. R. and L. R. Walker (Growing electric space-charge waves) 230.
- Pini, B. (Problema di Dirichlet) 106.
- Pinkham, R. S. (Inversion of Laplace and Stieltjes transforms) 318.
- Pinl, M. (Integration isotroper Komplexe) 165.
- Pinney, E. (Nonlinear differential equations systems) 90.
- Piranian, G. (Orders of lacunarity of a power series) 67.
- Pitman, E. J. G. (Derivatives of a characteristic function at the origin) 343.
- Pjateckij-Šapiro, I. I. (Modular Abel functions) 85.
- Pleijel, Å. (I. Fredholm) 246.
- Plessis, N. du (Spherical Fejér-Riesz theorems) 109.
- Plis, A. (Existence domain for non-linear partial differential equation) 99; (Cauchy problem for partial differential equations) 100.
- Pliss, V. A. (Nonlinear differential equation) 93.
- Plumier, S. et O. Rozet (Congruences de sphères de Ribaucour) 392.
- Pogorelov, A. V. (Continuous mappings of bounded variation) 398; (Gauss theorem) 399.
- Pogorelov, A. W. (Konvexe Flächen) 175.
- Pogorzelski, W. (Équation parabolique) 103; (Problème aux limites pour l'équation parabolique) 103.
- Poincaré, H. (Oeuvres. XI.) 241.
- Pol, Balth. van der s. J. Touchard 301.
- Pollak, H. O. s. D. J. Dickinson 66.
- Pol'skij, N. I. (Application of approximate methods) 136.
- Pomeranchuk, Iu. Ia. s. L. D. Landau 450.
- Popoff, K. (Processus thermodynamiques irréversibles) 431.
- Popov, B. S. (Résolution générale d'une classe d'équations) 335.
- E. P. (Bogolubov's asymptotic method) 336.
- Popova, H. (Logarithmetics of finite quasigroups. II.) 255.
- Postnikov, A. G. (Diophantische Ungleichungen) 269; (Dirichlet  $L$ -series) 273; (Abschätzung einer Exponentialsumme) 274.
- Potapov, M. K. (Jackson type theorems) 58.
- Potts, D. H. (Elementary integrals) 280.
- Poussin, Ch.-J. de la Vallée s. Vallée Poussin, Ch.-J. de la 37.
- Prager, W. (Conjugate states of plane strain) 412.
- — s. W. Freiburger 193.
- Prékopa, A. and A. Rényi (Independence in the limit of sums) 346.
- Preston, G. B. (Normal inverse semigroups) 256.
- — C. (Abelian groups and their character groups) 16.
- Prigogine, I. (Statistical mechanics of irreversible processes) 430.
- Prima, R. C. di s. G. F. Carrier 420.
- Prins, H. J. s. R. Doornbos 361.
- Proceedings of the First Congress on Theoretical and Applied Mechanics 407.
- Prodi, G. (Equazioni a derivate parziali di tipo iperbolico) 101; (Problema al contorno per equazioni a derivate parziali ellittiche) 309; (Funzioni di B. Levi) 328.
- Protter, M. H. (Pseudoanalytic functions) 298.
- Proudman, I. (Rotation of viscous fluid) 201.
- Pruvost, Pierre s. André Danjon 456.
- Pták, Vlastimil s. Miroslav Fiedler 139.
- Pucci, C. (Misura di involucri di insiemi) 49; (Proprietà degli involucri) 49; (Inscrivibilità di un ottaedro in un insieme convesso) 176.
- Pugačev, B. P. (Approximate calculation of eigenvalues) 136.
- Quilghini, D. (Interpolazione di una funzione  $F(P)$ ) 285.
- Quine, W. V. (Formulas with valid cases) 250.
- Quinto, Leon s. Jerome Percus 374.
- Rabinowitz, P. s. P. Davis 144.
- Radhakrishna Rao, C. s. Rao, C. Radhakrishna 367, 368.
- Radhakrishnan, S. (Plastic buckling of cylinders) 416.
- Radok, J. R. M. (Dynamic plane elasticity) 412.
- Rahman, Q. I. (Zeros of a class of polynomials) 252; (Entire functions of infinite order) 292.
- Raj, Des (Optimum probabilities in sampling without replacement) 363; (Overlapping maps in sample surveys) 369.
- Rajkov, D. A. (Bundles of hyperplanes) 322.
- Ramakrishnan, A. et S. K. Srinivasan (Intégrales stochastiques) 354.
- C. S. (Dual of a PBIB design) 368.
- Raman, Varadaraja Venkata s. Gilbert Karpman 215.
- Ramanujan, M. S. (Products of summability matrices) 55.
- Rankin, R. A. (Automorphic forms) 86.
- Rao, C. Radhakrishna (Inter block information in variational trials) 367; (Quasifactorial and related designs) 368.
- Rasković, D. P. (Frequency equation of small vibrations of holonomic systems) 409.
- Ratcliffe, J. A. (Diffraction theory) 438.
- Rauch, H. E. (Harmonic and analytic functions) 79.
- Ray, D. (Stationary Markov processes) 351.
- Reade, M. O. (Newtonian vector functions) 164.
- Rechlickij, Z. I. (Stability of linear differential equations with a lagging argument) 333.
- Rédei, L. (Sätze von Kroncker-Hensel und von Szekeres) 26.
- Ree, R. (Witt algebras) 262.
- Rees, D. (Homological algebra) 27.
- Reichelderfer, P. V. (Covering theorem for transformations) 278.
- Reiner, I. (Two-adic density of representations by quadratic forms) 272.
- Remmert, R. (Meromorphe Funktionen) 80.
- Rényi, A. s. A. Prékopa 346.
- Resch, D. (Baeklund transformations) 307.
- Rešetnjak, Ju. G. (Konvexe Flächen) 176.
- Reuter, G. E. H. s. F. F. Bon-sall 328.



- Revuz, A. s. Chr. Pauc 47.
- Rhodes, F. (Isometries to uniform spaces) 404.
- Ribaud, Gustave s. Pierre Ver-  
notte 420.
- Ribner, H. S. (Spectral theory  
of buffeting and gust respon-  
ses) 426.
- Ricci, G. (Teorema di H. Bohr)  
73.
- Rice, H. G. (Completely re-  
cursively enumerable classes)  
5.
- Richtmyer, R. D. s. P. D. Lax  
89.
- Riesel, H. (Prime numbers) 35.
- Riesz, F. und B. Sz.-Nagy  
(Funktionalanalysis) 119.
- Riney, T. D. (Coefficients in  
asymptotic factorial expan-  
sions) 68.
- Ríos, S. (Planungsforschung)  
374.
- Ritus, V. I. (Renormalization  
in the equations of Tamm-  
Dancoff method) 445.
- Ritz, M. s. D. Emendörfer 226.
- Rivlin, R. S. (Stress relaxation  
in incompressible elastic ma-  
terials) 192.
- — — s. A. E. Green 418.
- Robertson, H. H. (Phase calcu-  
lations for nuclear scattering)  
337.
- Robinson, A. (Problem by  
Erdős-Gillman-Henriksen)  
264.
- Rodossij, K. A. (Exceptionelle  
Nullstelle) 274.
- Roelcke, W. (Wellengleichung  
bei Grenzkreisgruppen) 301.
- Rogers, C. A. (Two integral  
inequalities) 48; (Integral  
inequality) 48.
- Rojas Lagarde, A. (Irreduzi-  
bilität von Systemen linearer  
Differentialgleichungen) 89.
- Rollnik, H. (Streumaxima und  
gebundene Zustände) 217;  
(Zerfallende Zustände) 217.
- Romain, J. (Oscillateur liné-  
aire harmonique) 443.
- Roman, J. Sancho de San s.  
Sancho de San Roman, J.  
400.
- Romano, F. s. P. G. Hodge jr.  
416.
- Ronkin, L. I. (Typen einer  
ganzen Funktion) 79.
- Rosati, M. (Funzioni ellittiche  
modulari) 85.
- Rose, M. E. (Non-linear para-  
bolic equations) 147.
- Rosen, Ph. (Electromagnetic  
waves in an ionized gas) 229.
- Rosenauer, N. (Four-bar lin-  
kages) 164; (Space mecha-  
nisms) 409.
- Rosenberg, A. (Cartan-Brauer-  
Hua theorem) 24.
- Rosenblatt, Murray s. Ulf  
Grenander 364.
- Rosina, B. A. (Circuiti dispari-  
delle curve algebriche) 163.
- Ross, E. (edited by) (Confe-  
rence on electron micro-  
scopy) 438.
- M. (Pion effects on Fermi  
interactions) 220.
- Roy, J. and R. G. Laha (Lin-  
ked block designs) 367;  
(Associate partially balanced  
designs) 368.
- S. K. s. K. S. Krishnan 238.
- Royston, E. (History of proba-  
bility and statistics. III.)  
357.
- Rozenfel'd, B. A. (Lobačevski-  
sche Geometrie) 156.
- Rozental', I. L. (Relativistische  
Transformationen) 227.
- Rozet, O. s. S. Plumier 392.
- Rozovskij, M. I. (Probleme des  
Kriechens) 193; (Semisym-  
bolic method in hereditary)  
elasticity theory) 414.
- Rubel, L. A. (Carlson's theo-  
rem) 291.
- Rubin, Herman s. Herman  
Chernoff 363.
- Rudin, M. E. (Separable nor-  
mal nonparacompact space)  
177.
- Rumer, Ju. B. (5-Optik) 215.
- Ryžkov, V. V. (Order of appli-  
cability of surfaces) 165.
- Rzewuski, J. s. W. Królikowski  
218.
- Sachs, R. G. (Phase shifts in  
pion-nucleon scattering) 222.
- — — s. S. B. Treiman 221.
- Sadowsky, M. A. s. D. F.  
Muster 189.
- Šafarevič, I. R. (Gleichungen  
höheren Grades) 138.
- Sagan, H. (Dreidimensionales  
Variationsproblem) 315.
- Sagastume Berra, A. E. (Ho-  
momorphismus für Grup-  
poide) 11.
- Saito Nobuhiko and M. Namiki  
(Quantummechanics-like de-  
scription of Brownian motion)  
431.
- Sakai, Sh. ( $W^*$ -algebras) 124.
- Sakamoto, Michiko s. Eiichi  
Ishiguro 228.
- Sakovič, G. P. (Attraktion an  
stabilen Verteilungen) 344.
- Salet, W. J. H. (Aufgaben über  
Analysis und Algebra. I.) 40;  
(II.) 41.
- Salić, H. (Blasiussche Reihen)  
306.
- Samarskij, A. s. P. Alexandroff  
246.
- Samuel, P. (Espace des idéaux  
d'un anneau local) 26.
- San Román, J. Sancho de s.  
Sancho de San Román, J.  
166, 400.
- Sancho de San Román, J.  
(Kurven konstanter Affin-  
weite) 166; (Breite-Begriff  
für Eikurven) 400.
- Sano, Mitsuo s. Sueji Okai 454.
- Santoboni, L. (Assicurazioni di  
annualità su una o due teste)  
372.
- Sapa, V. A. (Variationsprin-  
zipien in der Mechanik) 408.
- Saperstein, A. M. and L. Du-  
rand (Nucleon-nucleon phase  
shifts) 451.
- Sapogov, N. A. (Beste Annähe-  
rung analytischer Funktio-  
nen) 79.
- Saran, S. (Transformations of  
hypergeometric functions)  
64.
- Sarkisjan, M. S. (Biegung eines  
Stabes) 190.
- Sarmanov, O. V. (Discrete  
limit law in Markoff chain)  
354.
- Satake, I. (Compactification of  
Siegel space) 300.
- Satō, M. (Uniform convergence  
of Fourier series. VI.) 61.
- — s. Shin-ichi Izumi 286.
- Sawicki, J. (Neutron polariza-  
tion in ( $p, n$ ) reactions) 225.
- Scarfiello, R. s. A. González  
Domínguez 319.
- Schäffer, J. J. (Result in  
number theory) 266.
- Schafroth, M. R. and J. M.  
Blatt (Phenomenological  
equations for superconduc-  
tors) 231.
- Schecher, H. (Vereinfachung  
von Rechenplänen) 340.
- Scheffé, H. (Models for the  
analysis of variance) 366;  
(„Mixed model“ for analysis  
of variance) 366.
- Schenkman, E. (Splitting theo-  
rem) 14.
- Schiffer, J. P. s. Alfred A.  
Kraus jr. 455.
- Schmieden, C. und K.-H. Mül-  
ler (Strömung einer Quell-  
strecke im Halbraum) 418.
- Schouten, J. A. (Currents. I.)  
172.

- Schreiber, M. (Unitary dilations of operators) 329.
- Schröder, J. (Differenzenverfahren bei nichtlinearen Randwertaufgaben. II.) 336.
- Schubart, H. (Painlevésche Transzendenten) 293.
- Schumann, W. O. (Einfluß des Erdmagnetfeldes auf elektrische Wellen zwischen Erde und Ionosphäre) 435.
- Schützenberger, M. P. (Représentation des demi-groupes) 10.
- Schwartz, J. (Riemann's method) 64.
- Schwartz, L. s. Faculté des Sciences de Paris 102.
- Schwarz, G. (Leitfähigkeitsanisotropie von Polyelektrolyten) 230.
- Št. (Universal forms in discretely valued fields) 35.
- Schwehel, S. L. (Three-body scattering problem) 443.
- Scoins, H. I. s. H. C. Bolton 146.
- Sconzo, P. (Störungen in heliozentrischen Koordinaten) 239.
- Scott, Dana (Primitive notion for Euclidean geometry) 155.
- Elizabeth L. s. Jerzy Neyman 240.
- W. T. (Baecklund transformations) 307; (Hodograph transformation) 307.
- Scotto Lavina, G. (Vibrazioni dei sistemi elastici) 197.
- Sebastião e Silva, J. (Calcul différentiel dans les espaces localement convexes. I. II.) 130, 327; (Rectifications) 131.
- Segre, B. (Punti fissi delle trasformazioni analitiche. I—III.) 81; (Invarianti topologico-differenziali) 159.
- Seibold, W. (Spoilerwirkung im Überschallbereich) 423.
- Seidenberg, A. (Picard-Vessiot theory) 265.
- Seiler, J. A., B. A. Cotter and P. S. Symonds (Impulsive loading of elastic-plastic beams) 417.
- Selberg, A. (Harmonic analysis and discontinuous groups) 82.
- Seleznev, A. (Functions monogenic) 78.
- Sen, B. R. and R. Subramaniam (Effective width of  $T$ -beams) 411.
- Senba, Kei s. Tadashi Ouchi 444.
- Sendov, B. (Monotonic functions) 284.
- Šervatov, V. G. (Hyperbelfunktionen) 66.
- Severi, F. (Frammenti ricomposti e integrati. I.) 162.
- Shao, Pin-Tsung (Values of arithmetical functions) 33.
- Shepherdson, J. C. (Aristotelian syllogistic) 247.
- Shibata, T. and T. Kimura (Forms of relativistic dynamics) 443.
- Shimazu, H. (Particle with two mass states of spin 1 and 0) 444.
- Shimomura, T. (Mathematik in der Polis) 243.
- Shirkov, D. V. s. V. Z. Blank 446.
- Sikkema, P. C. (Sum-equations. I. II.) 137; (Linear differential operators of infinite order) 330.
- Silin, V. P. s. V. L. Ginzburg 233.
- Silva, J. Sebastião e s. Sebastião e Silva, J. 130, 131, 327.
- Silverman, R. A. (Turbulent mixing theory applied to radio scattering) 433.
- R. J. (Means on semigroups and Hahn-Banach extension property) 325.
- Simaika, J. (Dispersion d'une distribution de directions) 344.
- Šimanov, S. N. (Characteristic exponents of linear differential equations) 93.
- Simon, R. s. J. Counson 456.
- Simoni, F. de (Geometrizzazione delle equazioni dinamiche) 398.
- Simons, R. M. (Bending of shallow spherical shells) 192.
- Singal, M. K. and R. Behari (Characteristic lines of a hypersurface  $V_n$ ) 394.
- Singer, I. (Éléments de meilleure approximation) 130.
- Singh, B. (Sequence of Fourier coefficients) 60.
- S. K. (Exceptional values of entire functions) 74.
- V. N. (Partial sums of hypergeometric series) 289.
- Sinjukov, N. S. (Mappings of Riemannian spaces) 393.
- Širkov, D. V. s. N. N. Bogoljubov 445.
- Širokov, A. P. (Berichtigung) 172.
- Ju. M. (Relativistic invariance of quantum theory) 216.
- Skal'skaja, I. P. s. G. A. Grinberg 435.
- Skolem, Th. (Complete induction and uniqueness of primitive recursion) 6.
- Skorobogat'ko, V. Ja. (Differentialungleichungen für elliptische Gleichung) 311.
- Skyrme, T. H. R. (Nuclear surface) 224.
- Slater, L. J. and A. Lakin ( ${}_6\Psi_6$  summation theorem) 289.
- Slebodziński, W. (Équivalence des formes différentielles extérieures) 172.
- Šlionskij, G. G. (Bounded schlicht functions) 294.
- Slobodeckij, L. N. und V. M. Babič (Dirichletsches Integral) 50.
- Slowikowski, W. (Mikusiński's operational calculus) 131; (Application of Pauli ring) 439.
- Slugin, S. N. (Chaplyguin method for operator equations) 136; (Chaplyguin method for ordinary differential equations) 335.
- Smirnov, Ju. M. (Geometrie unendlicher gleichmäßiger Komplexe) 179.
- Smirnova, Ch. A. (Aufgabe über  $g$ -Kreise) 386.
- Smith, A. M. O. (Rapid laminar boundary-layer calculations) 203.
- Frederick W. s. Henry M. Nodelman 433.
- K. T. (Riesz potentials) 314.
- Sheila Maynard s. L. S. Penrose 371.
- Snapper, E. (Field theory. I—III.) 29.
- Sobolev, V. I. (Splitting of linear operators) 132.
- Società Italiana di Statistica (Atti della XV e XVI riunione scientifica. Roma) 357.
- Sokolov, A. A. and B. K. Kerimov (Scattering of spinless particles) 219.
- A. V. s. S. V. Vonsovskij 234.
- Solov'ev, L. S. s. Ė. L. Burštejn 437.
- V. G. (New model in field theory) 448.
- Solymár, L. s. R. Kovács 435.
- Soné, T. and I. Fujisawa (Archimedes' spirals) 387.
- Sóos, Gy. (Automorphismen in Räumen von Linienelementen) 396.



- Sosa Páez, S. Z. de und L. N. Muñoz (Sphäre im Hilbert-Raum) 119.
- Sousa, Maria de Fátima Fontes de s. Fátima Fontes de Sousa, Maria de 8.
- South Asian Conference on Mathematical Education 242.
- Špaček, A. (Inversion des transformations aléatoires) 349; (Zufällige Mengenfunktionen) 349.
- Spampinato, N. ( $V_5$  determinata dalle coniche osculatrici una curva algebrica piana) 163.
- Spanier, E. H. (Duality and  $\mathcal{S}$ -theory) 180.
- Specht, W. (Primzahlsätze) 31.
- Spence, D. A. (Turbulent boundary layers) 205.
- Speranza, F. (Trasformazioni puntuali di 2ª specie fra piani) 390; (Applicabilità proiettiva) 390.
- Sperner, E. (Luftdruckverteilungen) 458.
- Springer, G. (Baecklund transformations) 307.
- Sprott, D. A. (Series of balanced incomplete block designs) 368.
- s. L. S. Penrose 371.
- Sragovič, V. G. (Statistics of unstationary systems) 430.
- Srinivasan, S. K. s. A. Ramakrishnan 354.
- Stanković, B. (Inversion d'une transformation intégrale) 118.
- Stark, J. M. (Distortion in pseudo-conformal mapping) 299.
- Stečkin, S. B. s. N. K. Bari 57.
- Stefaniak, H. St. (Grenzschicht-Differentialgleichungen) 204.
- Stefánsson, S. (Diameters of a parabola) 387.
- Stehle, P. (Dynamical principle for classical mechanics) 407.
- Stein, E. (Product varieties of two rational normal curves) 389.
- M. (Interpolation of linear operators) 324.
- K. (Überlagerungen komplexer Räume) 80.
- Steinberg, J. (Lois de commutation de transformations intégrales) 317.
- R. (Theorem of Hadwiger) 120.
- Steklov, V. A. (Asymptotischer Ausdruck einiger Funktionen) 60.
- Stelson, H. E. (Laplace transforms applied to interest functions) 372.
- Sternberg, E. s. R. A. Eubanks 190.
- Eli s. G. L. Neidhardt 413.
- Stewart, R. W. (Irrotational motion associated with free turbulent flows) 425.
- Stiefel, E. (Fredholm integral equations) 335.
- Stoilow, S. (Principes topologiques des fonctions analytiques) 76.
- Stojanović, R. (Intransitive groups of motions) 170.
- Stojanovič, R. (Brachistochronic motion) 407.
- Stoljarov, N. A. (Stieltjessches Integral) 47.
- Stolle, H.-W. (Theorie der Federkonstanten) 413.
- Stone, A. P. (Stereographic projection of the sphere) 387.
- Storror, F. s. V. Belevitch 152.
- Štraus, A. V. (Entwicklung nach Eigenfunktionen) 97; (Resolvents for differential operator) 135.
- Strel'cov, V. V. (Fläche negativer Krümmung) 174; (Zugehörigkeit von Flächen) 399.
- Stuart, A. (Kendall's rank correlation statistic) 369.
- Stubban, J. O. (Euclidean geometry) 379.
- Stumpff, P. (Kometenaufnahmen) 239.
- Subrahmanyam, N. V. s. P. V. Krishnaiah 137.
- Subramoniam, R. s. B. R. Sen 411.
- Suetuna, Z. (Begriff der Totalität) 247.
- Sugawara, Masao s. Akira Kanazawa 449.
- Sulanke, R. (Zusammenhang in Finsler-Räumen) 172.
- Sundaresen, M. K. s. R. H. Dalitz 450.
- Sunouchi, Gen-Ichirô (Power series of class  $H^p$ ) 71.
- Supino, G. (Funzioni metaarmoniche) 315.
- Suppiger, E. W. and N. J. Taleb (Vibration of beams) 195.
- Süssmann, G. s. F. M. Medina 224.
- Svešnikov, A. s. P. Alexandroff 246.
- G. (Approximate computation method in designing a wave guide) 436.
- Symonds, P. S. s. J. A. Seiler 417.
- Sz.-Nagy, Béla s. Friedrich Riesz 119.
- Szép, J. s. N. Itô 14.
- Szmydt, Z. (Équations différentielles hyperboliques) 102.
- Szybiak, A. (Plane sets with positive transfinite diameter) 111.
- Taam, Choy-Tak (Asymptotic relations between systems of differential equations) 94.
- Taffara, L. s. P. Budini 227.
- Takács, L. (Erlang's formula) 355.
- Takahashi, K.-i. (Lineare homogene Differentialgleichungen) 302.
- Takeno, H. (Spherical wave solutions) 441.
- Taleb, Nazih J. s. Edward W. Suppiger 195.
- Talwar, S. P. and S. S. Abbi (Change in shape of a gravitating fluid sphere in an electric field) 214.
- and J. N. Tandon (Radial pulsation of magnetic stars) 456.
- Tamura, T. (Correction) 256.
- Tanaka, Ch. (Functions analytic in the unit circle) 71.
- Hajime s. Toshiyuki Murota 447.
- M. (Prime factors of integers) 273.
- Tandon, J. N. s. S. P. Talwar 456.
- Tanno, Y. (Inversion formula for convolution transforms) 118.
- Tarnawski, E. (Spaces of functions satisfying Dini's condition) 122.
- Tarski, A. (Primitive notions of Euclidean geometry) 155.
- , Chen-Chung Chang and B. Jónsson (Ordinal algebras) 2.
- s. Evert W. Beth 155.
- Tavger, B. A. and V. M. Zajcev (Magnetic symmetry of crystals) 15.
- Taylor, A. E. (Theorem of Hellinger and Toeplitz) 132.
- s. Charles J. A. Halberg jr. 133.
- J. (Sequential tests for the mean of a normal distribution) 360.
- G. (Quantum electrodynamics and Hilbert space theory) 447.



- Teghem, J. (Estimations de sommes trigonométriques) 274.
- Temko, K. V. (Convex capacity of sets) 62.
- Ter-Martirosjan, K. A. s. I. T. Djatlov 449.
- Teramoto, Ei (*H*-theorem. II.) 429.
- Terleckij, Ja. P. (Relativistic repulsion effects in a scalar field) 445.
- s. V. B. Magalinskij 222.
- Terpstra, T. J. (Kendall's rank correlation statistic. I. II.) 369.
- Terracini, A. (Elementi curvilinei spaziali) 389; (Particolari superficie  $W$  dello  $S_5$ ) 391; (Nuove superficie particolari dello  $S_5$ ) 391.
- Tesson, F. (Systèmes fluides limités par une surface de contrôle variable) 200.
- Thébault, V. (Questions d'arithmétique) 31; (Triangle bordé de carrés) 383; (Systèmes de cercles et de points cosphériques) 385; (Sphères associées à un tétraèdre) 386.
- Thellung, A. (Energy spectrum in quantum hydrodynamics. II.) 230.
- Thierrin, G. (Automorphismes intérieurs d'un demi-groupe) 10.
- Thomas, T. Y. (Slip surfaces in plastic solids) 415.
- Thompson, G. L. (Game-theoretic problem) 379.
- jr., W. A. (Balanced incomplete block designs) 367.
- Thorndike, L. (Medieval latin manuscripts at the Vatican. I.) 245.
- Thron, W. J. (Functional equation  $f[f(z)] = g(z)$ ) 75.
- Thullen, P. (Konvergenzproblem der relativen Häufigkeiten) 342.
- Tiago de Oliveira, J. (Modules et anneaux de caractéristique et cardinalité quelconques) 23; (Residuale von Systemen) 24.
- Tietze, H. (Zu Carathéodory's Einführung in Euler's Arbeiten über Variationsrechnung) 112.
- Tiffen, R. (Vibrations of semi-infinite solids and plates) 416.
- Timan, A. F. and L. I. Tučinskij (Approximation of differentiable functions) 58.
- Tingley, A. J. (Poisson formula for heat flow equation) 103.
- Tiomno, J. s. S. W. MacDowell 444.
- Tits, J. (Groupes de Lie exceptionnels) 382.
- Tjablikov, S. V. s. V. V. Tolmačev 236.
- Tobocman, W. (Transition amplitudes) 217.
- Todeschini, B. (Correnti ipersoniche) 207.
- Tolins, I. S. s. B. A. Boley 411.
- Tollmien, W. (Spektralanalyse homogener Turbulenz) 425.
- Tolmačev, V. V. and S. V. Tjablikov (Partial functions for a ferromagnet) 236.
- Tolpygo, K. B. and Z. I. Urickij (Polaron mobility) 235.
- Tomić, M. (Somme de la série de Fourier) 61.
- Tominaga, H. (Galois theory of simple rings) 265.
- s. Takasi Nagahara 264.
- Tomita, M. (Harmonic analysis) 125.
- Tompkins, C. B. s. I. Heller 378.
- Tonkov, L. V. s. N. V. Azbelev 145.
- Topp, L. J. s. M. J. Turner 410.
- Toraldo di Francia, G. (Onde elettromagnetiche in un mezzo dielettrico non omogeneo) 212; (Gittata di un missile) 408.
- Tortrat, Albert s. André Blanc-Lapierre 430.
- Tóth, L. Fejes s. Fejes Tóth, L. 386.
- Touchais, M. (Applications techniques de la logique) 1.
- Touchard, J. et B. van der Pol (Équations différentielles vérifiées par fonctions modulaires elliptiques) 301.
- Toupin, R. A. (Elastic dielectric) 238.
- Townsend, A. A. (Equilibrium boundary layers) 425.
- Transue, W. R. s. E. S. Kennedy 244.
- Treiman, S. B. and R. G. Sachs (Neutron-electron interaction) 221.
- Trenogin, V. A. (Representation of functions of many variables by superposition) 323.
- Tricomi, F. G. (Analisi matematica. I. II.) 40; (Sistemi ortonormali di funzioni) 285; (Funzioni ipergeometriche confluenti) 289.
- Trošin, G. D. (Konvergenz der Partialsummen einer Reihe gegen ganze Funktion) 67.
- Trostel, R. (Wärmespannungen in einer Hohlkugel) 191.
- Truell, Rohn s. C. F. Ying 212.
- Tsuboi, Teruo s. Shigeo Ozaki 81.
- Tsuchikura, T. (Theorems on Fourier series) 286.
- Tsuji, M. (Theorem of Erdős and Gillis) 111; (Non-negative subharmonic function in a half-plane) 315.
- Tučinskij, L. I. s. A. F. Timan 58.
- Tucker, A. W. (Dual systems of linear relations) 375.
- s. A. J. Goldman 375, 376.
- s. H. W. Kuhn 375.
- Tulcea, Cassius Ionescu s. Ionescu Tulcea, Cassius 126.
- Tummers, J. H. (Points associés à un triangle) 383.
- Turán, P. (Neue Methode der Analysis) 41; (Zeros of zeta-function) 68.
- Turner, M. J., R. W. Clough, H. C. Martin and L. J. Topp (Stiffness and deflection analysis) 410.
- Turrittin, H. L. (Equazioni differenziali ordinarie lineari) 93.
- Turumaru, T. (Direct product of operator algebras. IV.) 329.
- Überall, H. (High-energy interference effect of bremsstrahlung) 228.
- Uchida, Sh. and M. Yasuhara (Rotational field behind a curved shock wave) 424.
- Uchiyama, S. (Mean value of  $V(f)$ . III.) 10.
- Udagawa, K. and G. Nakamura (Queuing system) 355.
- M. (Limit theorems for the sums of random variables) 345.
- Ueda, Akira s. Toshiyuki Murota 218, 447.
- Ufljand, Ja. S. s. G. A. Grinberg 435.
- Ui, H. (Deuteron induced reaction. I.) 454.
- Ul'janov, P. L. (Cauchysche A-Integrale. I.) 70.

- Umegaki, Hisaharu (Conditional expectation in operator algebra. II.) 125.
- Umezawa, H. s. M. Konuma 219.
- Urabe, M. (Numerical iteration) 140.
- Urban, P. s. T. Kassecker 453.
- Urickij, Z. I. s. K. B. Tolpygo 235.
- Utz, W. R. s. H. D. Brunk 52.
- Uzawa, H. (Preference and axioms of choice) 374.
- Vaccaro, M. (Complessi simiplici  $\alpha$ -omogenei) 405.
- Vachaspati (Quantum mechanics in generalized Hilbert space) 216.
- Vajnštejn, I. A. s. M. A. Krejnes 152.
- Valk, H. S. and B. J. Malenka (Dispersion contribution to high-energy electron-deuteron scattering) 455.
- Vallée Poussin, Ch.-J. de la (Fonction  $\zeta(s)$  de Riemann) 37.
- Vandiver, H. S. and M. W. Weaver (Associative algebra and algebraic theory of numbers. III.) 255.
- Varga, O. (Kawaguchische Räume) 170.
- Richard S. s. Richard R. Goldberg 117.
- Varma, C. B. L. s. B. R. Bhonsle 288.
- Veksler, A. Z. s. S. V. Vonsovskij 234.
- Vekua, I. N. (Differentialgleichungen erster Ordnung vom elliptischen Typus) 105.
- Veneckij, I. G. und G. S. Kil'dišev (Mathematische Statistik) 357.
- Ventcel', T. D. (Differenzmethode zur Lösung der ersten Randwertaufgabe) 103.
- Verblunsky, S. (Expansion in exponential series) 64; (Differential-difference equations) 90.
- Verner, A. L. s. I. Ja. Bakel'man 50.
- Vernotte, P. (Calcul numérique, calcul physique, application à la thermocinétique) 420.
- Vertejm (Wertheim), B. A. (Newton's method) 136.
- Vesentini, E. (Jacobiani di funzioni meromorfe) 182.
- Vidav, I. (Propriétés de la norme dans les algèbres de Banach) 124.
- Vietoris, L. (Häufigkeit und Wahrscheinlichkeit) 341.
- Vigier, Jean-Pierre s. Aimé Fuchs 354.
- Vilenkin, N. Ja. (Lokal kompakte, nulldimensionale Gruppen) 16.
- Villa, M. (Trasformazioni puntuali) 167; (Trasformazioni puntuali di 3<sup>a</sup> specie fra piani) 390; (Applicabilità proiettiva) 390.
- e L. Muracchini (Corrispondenze fra superficie della varietà di Segre) 390.
- Villari, G. (Cicli limite e fusione di separatrici) 305.
- Vincensini, P. (Transformation d'un réseau asymptotique en réseau conjugué) 392.
- Vinen, W. F. s. H. E. Hall 230.
- Vinogradov, A. L. („Fast binäres“ Problem) 270.
- V. S. (Neuman's problem for partial differential equation of elliptic type) 313.
- Viola, T. (Ensembles de points sur le plan hyperbolique) 277.
- Višik, M. I. and L. A. Ljusternik (Stabilization of differential equations in Hilbert space) 330.
- Vivier, M. (Théorèmes d'algèbre extérieure) 253.
- Volpato, M. (Continuità di un funzionale) 112.
- Volterra, E. (Eigenvibrations of curved elastic bars) 194; (Equations of motion for bars) 195.
- Vonsovskij (Wonssowski), S. V., A. V. Sokolov und A. Z. Veksler (Wexler) (Photoeffekt in Metallen) 234.
- Vorovič, I. I. (Bubnov-Galerkin method) 198.
- Vosper, A. G. (Critical pairs of subsets) 34; (Addendum to „Critical pairs of subsets“) 34.
- Vranceanu, G. (Transformations crémoniennes) 172.
- Vvedenskaja, N. D. (Difference method's solution of Cauchy's problem) 99.
- Wadhwa, Y. D. (Slow viscous drag) 201.
- Waerden, B. L. van der (Reduktionstheorie quadratischer Formen) 36; (Zur Arbeit „Die Cohomologietheorie der Polyeder“) 179; (Egyptian and Alexandrian calendar) 243; (Computation of the X-distribution) 359.
- Wagner, H. M. (Theory of consumer behavior) 374.
- Walecka, D. s. R. Gomez 219.
- Walker, L. R. s. J. R. Pierce 230.
- Wallace, A. D. (Gebietstreue in semigroups) 15.
- H. (Tangency and duality) 160.
- Walsh, C. E. (Convergence factors) 281.
- J. E. (Estimating population mean) 362.
- J. L. (Degree of approximation to analytic functions by rational functions) 290.
- — — s. T. S. Motzkin 252.
- Wanders, G. (S-Matrixtheorie) 444.
- Wangersky, P. J. and W. J. Cunningham (Time lags in equations of growth) 370.
- Wannier, G. H. s. D. J. Dickinson 66.
- Warzée, J. (Problème de Milne) 456.
- Washnitzer, G. (Characteristic classes of an algebraic fiber bundle. I.) 183.
- Watanabe, Yoiti (Constraint in a quantum system) 443.
- Yoshikatsu (Laplace-Transformation) 317.
- Watson, G. L. s. B. W. Jones 272.
- N. (Bilinear transformation) 386.
- S. (Circular multivariate distribution) 344.
- Ważewski, T. (Méthode de A. Pliś) 99.
- Weaver, M. W. s. H. S. Vandiver 255.
- Weidenhammer, F. (Nichtlineare Eigenschwingungen des belasteten Stabes) 417.
- Weier, J. (Topologie der Sphären) 184.
- Weil, A. (Field of definition of a variety) 160.
- Weinberger, H. F. (Maximum property of Cauchy's problem) 100.
- Weiner, J. (Elasto-plastic thermal-stress analysis of a free plate) 416.
- Weisfeld, Morris s. Leon Blitzler 239.
- Weiss, E. (Boundedness in topological rings) 28.
- G. H. (Coincidence of some random functions) 346.
- L. (Moment problem) 321.
- Welch, B. L. (Linear combina-



- tions of several variances) 362.
- Wermer, J. (Algebra of complex-valued continuous functions on the circle) 123.
- Weyl, F. J. (Applied mathematics in the United States) 241.
- Wheeler, John A. s. Robert N. Euwema 447.
- Wheelon, Albert D. s. Leon Blitzer 239.
- Whitehead, J. H. C. s. M. G. Barratt 180.
- Widder, D. V. (Integral transforms) 116; (Trasformazione integrale) 117.
- Wiebelitz, R. (Systeme linearer Differentialgleichungen und Volterra'sche Integralgleichungen) 88.
- Wilcox, A. B. (Certain group algebras) 128.
- Wilkes, M. V. (Long-division algorithm) 335.
- Williams, W. E. (Diffraction by a cylinder of finite length) 426.
- Wing, G. Milton s. Richard Bellman 420.
- Wintner, A. (Successive approximation in initial value problems) 87; (Weyl's imbedding problem) 164; (Addenda to the paper on Bôcher's theorem) 302; (Cauchy's stable distributions) 319; (Distributions symétriques à fonctions caractéristiques convexes) 321.
- Wise, J. (Stochastic processes of autoregressive and moving-average type) 355.
- Witte, Edith s. Sheila Macintyre 241.
- Wolf, F. (Perturbation by changes one-dimensional boundary conditions) 332.
- Wolfe, Ph. (Determinateness of polyhedral games) 377.
- Wolff, H.-D. (Reserve-Berechnung steigender Versicherungssummen) 373.
- Wolff, P. A. (Plasma resonance) 229.
- Wolfson, K. G. (Algebra of bounded functions. II.) 124.
- Wolska, J. (Problème aux limites à la dérivée tangentielle) 313.
- Wong jr., James P. s. Cecil Hastings jr. 152.
- Woodruff, T. O. (Orthogonalized plane-wave method) 232.
- Wright, F. B. (Semigroups and submodular functions) 120.
- Wu, T. Yao-Tsu (Perturbations in the flow of a fluid) 202.
- Wunderlich, W. (Ellipsenumfang) 152.
- Wylie jr., C. R. s. L. C. Barrett 88.
- Wynn, P. (Numerical transformation of slowly convergent sequences) 338.
- Xeroudakes, G. (Diophantine system) 32.
- Yacoub, K. R. (Semi-special permutations. I.) 259.
- Yamada, M. (Compositions of semigroups) 256.
- Yamamoto, T. and H. Matsuda (Grand canonical distribution method) 209.
- Yamazaki, K. (Field theory in functional form) 217.
- Yang, Hsun-Tiao and L. Lees (Rayleigh's problem at low Mach number) 421.
- Yanowitch, M. (Non-linear buckling of circular plates) 414.
- Yasuhara, Michiru s. Shigeo Uchida 424.
- Yeh, Hsuan s. Salamon Eskinazi 426.
- Yiftah, Sh. (Constantes des théories physiques) 186.
- Ying, C. F. and R. Truell (Scattering of a plane longitudinal wave by a spherical obstacle) 212.
- Yokota, I. (Cellular decompositions of unitary groups) 406.
- Yonezawa, Minoru s. Tadashi Ouchi 444.
- Yoshii, T. (Algebras of bounded representation type) 25.
- Young, L. C. (New methods in variational problems) 114.
- Yuan, S. W. (Laminar flow in channels) 427.
- Yûjôbô, Z. (Absolutely continuous functions) 295; (Supplements to: Absolutely continuous functions) 295.
- Zaanen, A. C. s. W. A. J. Luxemburg 123, 323.
- Zacharias, M. (Aufgabe von Senkatachalam Iyer) 382.
- Zadiraka, K. V. (Non-linear differential equations) 97.
- Zajcev, V. M. s. B. A. Tavger 15.
- Žarkov, G. F. (Nucleon-nucleon scattering) 223.
- Žarković, S. S. (Problem der relativen Wirksamkeit) 362.
- Zatzkis, H. s. R. H. Penfield 217.
- Zemmer, J. L. ( $p$ -rings) 25.
- Ziegler, H. s. R. Grammel 188.
- Zienau, S. s. E. Corinaldesi 216.
- Zierep, J. (Leewellen in der Stratosphäre) 458.
- Zolotarev, Ju. G. (Stabilität in erster Näherung) 304.
- Zubov, V. I. (Stabilität der Bewegung) 95; (System of ordinary differential equations) 95.
- Zuckerman, Herbert S. s. Edwin Hewitt 127.
- Zygmund, A. (Littlewood-Paley function  $g^*(\theta)$ ) 72.
- s. A. P. Calderón 115, 116.
- Zyryanov, P. S. (Electrical conductivity of metals) 234.
- — — and V. M. Eleonskij (Hartree equations) 234.